Math. Un. an. Link

109 – 2

<3663648911001 1

<3663648911001 1

Bayer. Staatsbibliothek

Deutlicher und gründlicher

Unterricht

in den

Anfangsgründen

der

Geometrie, Stereometrie und Trigonometrie

für

die Jugend, und diejenigen Liebhaber dieser Wissenschaften, welche sich durch Privatfleiß darin selbst unterrichten wollen.

Von

Anton Link,

ehemahligen Katecheten und Lehrer der Katechetik, gegenwärtigen Consistorial-Rathe und Stadtpfarrer zu Braunau im Erzherzogthume Österreich ob der Enns.

Linz und Leipzig 1821.

Im Verlage der k. k. priv. akademischen Kunst-Musik- und Buchhandlung.

Lehrbuch

der reinen

Mathematik,

in einer

leichtfaßlichen Darstellung

für

die Jugend, und diejenigen Liebhaber dieser Wissenschaft, welche sich durch Privatfleiß darin selbst unterrichten wollen.

Von

Anton Link,

ehemahligen Katecheten und Lehrer der Katechetik, gegenwärtigen Consistorial-Rathe und Stadtpfarrer zu Braunau im Erzherzogthume Oesterreich ob der Enns.

Zweyter Theil,

welcher die Geometrie, Stereometrie und die ebene Trigonometrie enthält.

Linz und Leipzig 1821.

Im Verlage der k. k. priv. akademischen Kunst-, Musik- und Buchhandlung.

51

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Was ich in der Vorrede zu dem ersten Theile dieses mathematischen Lehrbuches sagte, das bitte ich, auch hier bey dem gegenwärtigen zweyten Theile desselben zu berücksichtigen.

Dieser zweyte Theil enthält die Geometrie, Stereometrie und ebene Trigonometrie.

Ich befliß mich, die wichtigsten und wissenswürdigsten Lehren und Sätze dieser drey Zweige der reinen Mathematik hier mit Deutlichkeit und Gründlichkeit vorzutragen.

Der gütige Beyfall, womit der erste Theil dieses Lehrbuches von Mehrern aufgenommen wurde, läßt mich hoffen, daß auch dieser gegenwärtige zweyte Theil nicht ganz ohne Beyfall werde aufgenommen werden.

Was den ersten Theil dieses Lehrbuches betrifft, so haben sich in demselben, da ich wegen zu weiter Entfernung des Druckortes die Correctur nicht selbst übernehmen konnte, eine ziemlich große Menge Druckfehler eingeschlichen, von denen zwar mehrere (aber bey weitem nicht alle) in einem eigenen Blatte dem ersten Theile beygefügt sind. Die in der oberdeutschen allgemeinen Literaturzeitung des Jahres 1807 CXXIX. über diesen ersten Theil enthaltene

Recension äußert den Wunsch, daß dem zweyten Theile ein Verzeichniß der zurückgebliebenen Fehler des ersten Theiles möchte beygefügt werden. Diesem gerechten Wunsche zu entsprechen, habe ich daher diesem zweyten Theile das besagte Verzeichniß beygesetzt, aus dem der Anfänger die Fehler des ersten Theiles zu verbessern ersucht wird.

Ich werde dafür Sorge tragen, so viel an mir ist, daß die neue, zweyte, verbesserte Auflage des ersten Theiles, nach Möglichkeit correct gedruckt wird.

Zum Beschlusse nenne ich hier mit Dank jene mathematischen Schriften öffentlich, durch deren Studium ich in den Stand gesetzt worden bin, dieses mein Lehrbuch zu verfassen: a) Die ersten Anfangsgründe der reinen Mathematik von J. G. C. Kiesewetter. b) Heinr. Wilh. Clemm's mathematisches Lehrbuch. c) Die Elemente der Mathematik von Johann Friedrich Lorenz. d) Kästner's Anfangsgründe der reinen Mathematik. e) Wilh. Fried. Wucherer's Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie. f) Anleitung zur Geometrie von A. O. Meyer. g) Gründliche Anleitung zur theoretischen und practischen Geometrie und Trigonometrie von Jos. Spengler. h) Nähere Unterweisung in den philosophischen und mathematischen Wissenschaften für die obern Classen der Schulen und Gymnasien, von Joh. Jacob Ebert.

Linz, den letzten März 1820.

Der Verfasser.

Einige Verbesserungen und Druckfehler, die den ersten Theil dieses Lehrbuches betreffen.

Seite 67, Zeile 8 und 11 von oben sollte in dem Beyspiele der Division der Quotient 10 anstatt 1 stehen.

S. 98, §. 58. ist der Beweis bey der Division der Brüche nicht ordentlich und deutlich genug geführt worden, er ist auf die Auflösung nicht ganz passend, und sollte so heißen: „Den Quotienten von zwey Brüchen, die mit einander dividirt werden sollen, findet man dadurch, wenn man sie unter gleiche Benennung bringt, und dann den Zähler des Dividendus durch den Zähler des Divisors theilt, oder kürzer (sollte es weiter heißen), wenn man den Dividendus mit dem umgekehrten Divisor multiplicirt." Und dann sollte in dem darauf folgenden Beweise angeführt werden, daß, wenn Brüche gleiche Nenner haben, und man dividirt diese letztern mit einander, der Quotient jederzeit 1 sey, 1 dividirt aber nicht; folglich seyen die gleichen Nenner bey der Division der Brüche wegzulassen.

S. 125 — 126 ist der Beweis nicht an dem rechten Orte, indem er aus der erst folgenden Proportions-

lehre genommen ist. Schicklicher wäre dieser: Der Werth des Bruches bleibt unverändert, wenn der Zähler mit der nähmlichen Zahl multiplicirt, und das Product wieder mit der nähmlichen Zahl dividirt wird.

Nun aber geschieht dieses hier bey $\frac{3}{10}$ fl., wo mit 60 kr. zuerst der Zähler multiplicirt, d. i. $\frac{3}{10} \times 60$ kr. $= \frac{180}{10}$ kr., und dann wieder mit 60 kr. dividirt wird, d. i. $\frac{18}{60} = 18$ kr.

S. 180, Zeile 4 v. unt. $260^2 = 129600$ statt 1296.

S. 197, Z. 5. v. ob. muß vor dem letzten h^3 der Coefficient 27 stehen.

S. 199, Z. 12 v. ob. ist die wahre Cubikzahl 1,865',409,391.

Ebendas. Z. 6 v. unt. muß es $+f^3$ (anstatt f^2) heißen.

Ebend. Z. 5 v. unt. fehlen noch drey Producte, nähmlich: $3df^2 + 3ef^2 + f^3$.

S. 200, Z. 4. v. ob. lies $135a^2b^2d$ (statt a^2bd) und $60c^2d$ (statt c^2), und $225abd^2$ (statt 45), und $150cd^2$ (statt 30).

S. 230, Z. 8. v. ob. muß der Divisor 4a (statt 2a) stehen.

S. 238, Z. 7. v. ob. muß das letzte Product $b^3 =$ 216 um eine Stelle weiter gegen die Rechte gesetzt werden.

S. 240, Z. 7. v. ob. soll die Summe 19656 um eine Stelle gegen die Linke vorgerückt seyn.

S. 249, I. Beyspiel, Z. 1, muß das dritte Product — $135ac^2$ (anstatt — c) haben.

Ebend. II. Beyspiel, letzte Zeile muß heißen: $3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 6a^2b + 12ab^2 - 86^2$.

S. 274, letzte Zeile muß in der Wurzel $\sqrt{3^{12}}$ die Zahl 5 als der Nenner von 72 geschrieben werden.

S. 285, 3. Zusatz. $a : b = \frac{a}{b}$ soll heißen $\frac{b}{a}$.

S. 319, Z. 9. v. ob. muß nach $\frac{ae}{cm}$ das Multiplications = anstatt Aequationszeichen gesetzt werden.

S. 320, Z. 12 v. ob. muß §. 185. anstatt 184. citirt seyn.

S. 328, Z. 10 v. ob. setze man in 8 Tagen anstatt in 6 Tagen.

S. 427, II. Beyspiel, ist in der Aufgabe eine Irrung, Z. 3 und 4; es soll heißen: Jedes Mahl 2 Mahl so viel Gulden u. s. w.

S. 516, Z. 4 v. oben 10×15 muß heißen 10×2.

S. 535, Z. 6 v. unt. anstatt aus der Iten und der IIIten, soll es heißen, aus der Iten und IIten Gleichung.

Kurze Uebersicht
des Inhaltes des zweyten Theiles.

Einleitung.

Gegenstand und Theile der Geometrie . Seite 1

Erster Theil.
Longimetrie und Planimetrie.

Erster Abschnitt.

Von den Linien und Flächen 13

Zweyter Abschnitt.

Von den Winkeln 21

Dritter Abschnitt.

Von den Figuren 28
I. Von den geradlinigten Figuren . . . 30
II. Von der Kreislinie 42

Vierter Abschnitt.

Lehrsätze zur Bestimmung der Größe der Winkel . 54

Fünfter Abschnitt.

Lehrsätze und Aufgaben, besonders in Hinsicht auf Dreyecke 74

Sechster Abschnitt.

Von den Parallellinien 100

Siebenter Abschnitt.

Von den Vierecken, insbesondere von den Parallelogrammen . . . . . Seite 118

Achter Abschnitt.

Von der Verwandlung geradliniger Figuren . . 137

Neunter Abschnitt

Von Linien, Winkeln und Figuren in und an dem Kreise, und von dessen Verwandlung und Ausmessung . 149

Zehnter Abschnitt.

Vom Längen- und Flächenmaße, und vom Ausmessen geradliniger Figuren 180

Eilfter Abschnitt.

Vom Messen des Kreises und der dazu gehörigen Figuren 204

Zwölfter Abschnitt.

Von dem Verhältnisse und der Ähnlichkeit der Dreyecke, und der Figuren überhaupt 210

Dreyzehnter Abschnitt.

Von der Quadratur ebener Figuren . . . 242

Vierzehnter Abschnitt.

Anwendung der bisherigen Lehren auf die ausübende Geometrie 244

Zweyter Theil.

Stereometrie, oder die Ausmessung der Körper.

Erster Abschnitt.

Von der Begränzung der Körper. Von der Lage der Linien gegen die ebenen Flächen, und der Flächen gegen einander 283

Zweyter Abschnitt.

Erklärung der merkwürdigsten, geometrischen Körper und ihrer Eigenschaften 303

Dritter Abschnitt.

Vergleichung der geometrisch. Körper unter einander Seite 321

Vierter Abschnitt.

Vom Ausmessen der geometrischen Körper . . 340

Dritter Theil.

Ebene Trigonometrie.

Einleitung.

Erklärung der Trigonometrie 369

Unterschied zwischen der Trigonometrie und der Geometrie 370

Eintheilung der Trigonometrie, in die ebene und sphärische 370

Nutzen der Trigonometrie 371

Was man unter trigonometrischen Linien versteht . 372

Erster Abschnitt.

Erklärung der trigonometrischen Linien und Darstellung ihrer Eigenschaften. I. Vom Sinus und Cosinus 373

II. Von der Tangente und Secante . . . 380

III. Von den Cotangenten und Cosecanten . . 383

Zweyter Abschnitt.

Berechnung der trigonometrischen Linien . . 384

Dritter Abschnitt.

Wirkliche Berechnung der Dreyecke . . . 396

Geometrie.

Einleitung.

Gegenstand und Theile der Geometrie.

§. 1.

Was die Geometrie ist.

Jedes Ding in der Welt, wenn es auch noch so klein ist, hat eine Ausdehnung, d. h. es hat eine gewisse Länge, Breite und Dicke. Diese, jedem Dinge zukommende Ausdehnung nun für sich allein betrachtet, ohne dabey auf die Materie Rücksicht zu nehmen, an der diese Ausdehnung vorkommt, ist der Gegenstand der Geometrie.

Die Geometrie hat es also mit der Ausdehnung zu thun, deren Größe sie bestimmen und messen lehrt.

§. 2.

Unterschied zwischen der theoretischen und practischen Geometrie.

Die Geometrie, welche von der Ausdehnung im Allgemeinen handelt, ohne auf eine bestimmte an irgend einem Dinge befindliche Ausdehnung Rücksicht

zu nehmen, welche die Grundsätze im Allgemeinen abhandelt, nach denen man bey der Ausmessung der Ausdehnung zu verfahren hat, heißt die theoretische Geometrie. Sie stellt die Ausdehnung im Allgemeinen durch gewisse (selbst construirte) Figuren dar, und macht so ihre Begriffe und Lehrsätze anschaulich. Die Anwendung der in der theoretischen Geometrie abgehandelten Lehrsätze auf die Ausdehnung bestimmter Gegenstände, z. B. eines Feldes, eines Berges, eines Waldes u. s. w. macht den Gegenstand der practischen Geometrie aus. Die practische Geometrie lehrt also die Ausdehnung wirklicher Gegenstände ausmessen.

Da gegenwärtiges Lehrbuch bloß die reine Mathematik abhandelt, so kann darin nur von der theoretischen Geometrie die Rede seyn (1. Th. Einl. §. 2.). Doch werden in demselben, um so den Nutzen der theoretischen Geometrie zu zeigen, hier und da, und besonders im vierzehnten Abschnitte, einige Anwendungen auf die Ausdehnung wirklicher Gegenstände vorkommen.

§. 3.

Was man unter einem geometrischen Körper versteht.

Die Ausdehnung, die jedem Dinge zukommt, ist dreyfach: Die Ausdehnung nach der Länge, nach der Breite und nach der Dicke oder Höhe, d. h. jedes Ding ist in die Länge, Breite und Dicke ausgedehnt. Das nun, was eine Länge, Breite und Dicke hat, nennt man in der Geometrie einen Körper. Ein geometrischer Körper ist also ein solcher Körper, der ausgedehnt ist nach der Länge, Breite und Dicke. So sind z. B. ein Ofen, ein Stein, ein Buch, ein Baum in so fern geometrische Körper, in

wie fern sie eine Ausdehnung in die Länge, Breite und Dicke haben.

Bey dem geometrischen Körper wird bloß auf die Ausdehnung in die Länge, Breite und Dicke, nicht aber auf die Materie gesehen, an dem diese Ausdehnung vorhanden ist.

Ein geometrischer Körper hat also dem Gesagten zufolge drey Ausmessungen, nähmlich in die Länge, Breite und Dicke.

§. 4.

Was eine Fläche ist, und wodurch sie sich von einem Körper unterscheidet.

Nach dem vorigen Paragraph ist jedes Ding, das eine Länge, Breite und Dicke hat, ein geometrischer Körper. Diesem zufolge ist also ein Blatt von diesem Buche auch ein geometrischer Körper; denn es hat ja auch eine Länge, Breite und Dicke. Stellen wir uns aber vor, daß das Blatt gar keine Dicke habe, sondern bloß nach der Länge und Breite ausgedehnt sey; so bekommen wir auf diese Art eine Fläche. Eine Fläche ist nähmlich alles das, was nur nach der Länge und Breite ausgedehnt ist. So ist z. B. der Schatten, den dieses Buch auf die Wand wirft, eine Fläche; weil er eine Ausdehnung in die Länge und Breite hat.

Der Unterschied zwischen einem Körper und einer Fläche besteht also darin: Ein Körper ist ausgedehnt nach der Länge, Breite und Dicke; eine Fläche aber hat bloß Ausdehnung nach der Länge und Breite, und laßt daher auch nur zwey Ausmessungen zu, nähmlich nach der Länge und Breite.

§. 5.

Was eine Linie ist.

Wenn wir uns von der Fläche, die aus Länge und Breite besteht, die Breite wegdenken, so bleibt uns nur noch die Länge, die für sich allein betrachtet eine Linie heißt. Eine Linie ist also das, was bloß Ausdehnung nach der Länge hat, und daher bloß der Länge nach ausgemessen werden kann.

Eine mathematische Linie auf dem Papiere zu zeichnen, ist eine Unmöglichkeit; denn jede gezeichnete Linie, wenn sie auch noch so fein wäre, hat jederzeit nebst der Länge auch eine Breite, und ist also keine Linie, sondern eine schmale Fläche. Eine Linie, die man auf dem Papiere bey mathematischen Figuren zeichnet, soll nur anzeigen, wo eine mathematische Linie stehen sollte.

§. 6.

Was ein Punct ist.

Jede Linie hat einen Anfang und ein Ende. Der Ort nun, wo eine Linie anfangt oder sich endiget, heißt ein Punct. Der Punct ist also die Gränze einer Linie, und hat daher gar keine Ausdehnung.

Der mathematische Punct besteht bloß in unsern Gedanken, und kann durch kein Instrument auf dem Papiere verzeichnet werden; denn jeder Punct, der zu Papiere gebracht wird und in einem Tüpfelchen besteht, hat allzeit eine Größe, und ist kein Punct, sondern eine runde Fläche. Wenn also ein Punct auf dem Papiere gemacht wird, so zeigt dieser nur an, wo ein mathematischer Punct stehen sollte.

§. 7.

Eintheilung der Geometrie.

Die Größen, womit sich die Geometrie beschäftiget, sind Linien, Flächen und Körper (§. 1.); sie kann also füglich in drey Theile getheilt werden. Der erste Theil beschäftiget sich mit den Linien, und heißt Longimetrie (Längenmessung), der zweyte mit den Flächen, und heißt Planimetrie (Flächenmessung), und der dritte mit den Körpern, und wird Stereometrie (Körpermessung) genannt.

Da aber die Longimetrie nur von einem kleinen Umfange ist, so wollen wir sie mit der Planimetrie in einem Theile abhandeln.

§. 8.

Darstellung der Grundsätze, welche in der Geometrie ihre Anwendung finden.

Nebst den in der Einleitung des ersten Theiles (dritt. Abschn. §. 12.) aufgestellten, in der Mathematik allgemein vorkommenden Grundsätzen finden noch folgende in der Geometrie ihre Anwendung:

1) Gleiches zu Gleichem gibt Gleiches. Die Wahrheit dieses Satzes kann man sich durch Beyspiele erläutern, etwa auf folgende Art: Wenn ich in jeder Hand 6 fl., also in einer so viel, wie in der andern habe, und ich lege noch in jede Hand 2 fl., so habe ich dann in jeder Hand 8 fl.; ich bekomme also, da ich Gleiches zu Gleichem nehme, wieder Gleiches. Ferner, wenn ich an beyde Seiten einer Tafel gleich viel Striche schreibe, und dann noch eine gleiche Anzahl Striche zu beyden Seiten hinzufüge, so erhalte ich auf beyden Seiten gleich viel Striche. Oder allgemein ausgedrückt: Wenn

$$\frac{\begin{array}{l} a = b \\ c = d \end{array}}{\text{so ist } a+c = b+d}$$

Hieraus sieht man, daß Gleiches zu Gleichem hinzugefügt, gleiche Summen gibt.

2) Zu Gleichem Ungleiches, oder zu Ungleichem Gleiches hinzugethan, gibt Ungleiches. Z. B. wenn zwey Fässer sind, deren jedes 5 Eimer Wein in sich enthält, und ich thue in das erste noch 3, in das zweyte aber noch 5 Eimer Wein; so wird dann das erste 8 Eimer und das zweyte 10 Eimer in sich fassen. Hier habe ich zu Gleichem Ungleiches gethan, und habe ungleiche Summen erhalten. Setzen wir aber, das eine Faß habe 5 Eimer und das andere 7 Eimer Wein in sich, und in jedes werden noch 5 Eimer, also in beyde gleichviel gethan; so kommen ungleiche Summen heraus; denn dann faßt das erste 10 und das zweyte 12 Eimer Wein in sich. Zu Ungleichem Gleiches gethan gibt also Ungleiches.

Dieses allgemein ausgedrückt; Wenn

$$\frac{\begin{array}{l} e > f \\ \text{und } g = h \end{array}}{\text{so ist } e+g > f+h} \qquad \frac{\begin{array}{l} \text{ferner wenn } m = n \\ i > k \end{array}}{\text{so ist } m+i > n+k.}$$

Wenn also Gleiches zu Ungleichem, oder Ungleiches zu Gleichem hinzugethan wird; so erhält man ungleiche Summen, und zwar wird im ersten Falle dort die größere Summe seyn, wo man zu dem Größern das Gleiche hinzugesetzt hat, und im zweyten Falle wird dort die größere Summe seyn, wo man das Größere hinzugesetzt hat.

3) Von Gleichem Gleiches hinwegge-

nommen, bleibt Gleiches. Z. B. wenn an jedem von zwey Bäumen 9 Früchte hangen, und von jedem dieser Bäume 6, also gleichviel weggenommen werden, so bleiben noch an jedem Baume 3 Früchte; die Anzahl der übrig gebliebenen Früchte ist also an beyden Bäumen gleich, sie beträgt nähmlich beyderseits 3. Und so ist es durchaus; Gleiches von Gleichem wegenommen bleibt Gleiches,

d. i. wenn $a = b$
und $c = d$

---

so ist $a - c = b - d$.

4) Gleiches von Ungleichem, oder Ungleiches von Gleichem hinweggenommen, läßt ungleiche Reste; im ersten Falle ist der größere Rest da, wo der größere Minuendus, im zweyten, wo der kleinere Subtrahendus sich findet. Wenn z. B. in zwey Blumenbeeten eine ungleiche Anzahl Blumen, in dem einen 14 und in dem andern 20 wären, und ich nehme aus jedem Beete gleichviel, etwa zwey weg; so würde offenbar die Anzahl der übrig gebliebenen ungleich seyn; in dem ersten Blumenbeete würden nähmlich noch 12, und in dem andern noch 18 Blumen übrig bleiben. Gleiches von Ungleichem hinweggenommen, gibt also ungleiche Reste; denn

wenn $a > b$
und $c = d$

---

so ist $a - c > b - d$.

Ferner, wenn ich in meinen zwey Taschen gleichviel Geld habe, in jeder Tasche 7 fl., und ich nehme aus beyden Taschen ungleich viel weg, aus der einen Tasche 2 fl. und aus der zweyten 3 fl.: so bleiben in der ersten Tasche noch 5 fl. und in der zweyten

noch 4 fl.; es bleiben also ungleiche Reste. Und so ist es überhaupt, so oft man von Gleichem Ungleiches wegnimmt, bleibt Ungleiches,

d. i. wenn $a = b$
und $c > d$

so ist $a - c < b - d$.

5) Gleiches mit Gleichem vervielfältiget, gibt gleiche Producte. Wenn ich z. B. aus zwey Körben voll Aepfel beyderseits 2 Mahl 3 Aepfel nehme, so erhalte ich aus jedem Korbe 6 Aepfel; also aus einem so viel, wie aus dem andern, und zwar darum, weil ich aus jedem Korbe eine gleiche Anzahl, nähmlich 3 gleichviel Mahl, nähmlich 2 Mahl nehme. Dieses gilt überhaupt, wenn man Gleiches mit Gleichem vervielfältiget, so erhält man jederzeit gleiche Producte, d. i.

wenn $a = b$
und $c = d$

so ist $ac = bd$.

6) Gleiches mit Ungleichem, oder Ungleiches mit Gleichem vervielfältiget, gibt ungleiche Producte, und zwar ist das größere Product da, wo der größere Factor sich findet. Wir wollen z. B. annehmen, jemand habe in zwey Zimmern eine gleiche Anzahl Bilder, und nun vermehre er in jedem Zimmer die Anzahl Bilder, die wir auf 20 annehmen wollen, auf verschiedene Art, so, daß er die 20 Bilder des einen Zimmers um das Zweyfache, und die 20 Bilder des andern um das Dreyfache vermehre, $20 \times 2 = 40$ und $20 \times 3 = 60$; hier wird Gleiches, nähmlich 20 mit Ungleichem, nähmlich mit 2 und 3 vervielfältiget, und die daraus

entstandenen Producte, 40 und 50 sind ungleich; woraus erhellet, daß Gleiches mit Ungleichem vervielfältiget, ungleiche Producte gibt.

Nehme ich ferner 3 und 6 Federn 4 Mahl, so vervielfältige ich Ungleiches, nähmlich 3 und 6 mit Gleichem, nähmlich mit 4, und die daraus entstandenen Producte 12 und 24 Federn ($3\times4=12$ und $6\times4=24$) sind ungleich; wenn also Ungleiches mit Gleichem vervielfältiget wird, so entstehen ungleiche Producte, d. i.

wenn $a=b$ und $c>d$	ferner wenn $a<b$ und $c=d$
so ist $ac>db$	so ist $ac<db$.

Wenn also Gleiches mit Ungleichem, oder Ungleiches mit Gleichem vervielfältiget wird, so entstehen ungleiche Producte, und zwar ist das größere Product da, wo der größere Factor sich findet.

7) Gleiches durch Gleiches getheilt, gibt gleiche Quotienten. Wenn ich z. B. zwey gleiche Bogen Papier habe, und ich theile jeden derselben in zwey halbe Bogen; so sind auch die zwey halben Bogen des einen Bogens den zwey halben Bogen des andern Bogens gleich.

Ferner $8=6+2$

$4=4$

$8:4=(6+2):4$

8 durch 4 getheilt, gibt 2, und $6+2$ durch 4 getheilt, gibt auch 2 zum Quotienten, 8 ist aber $=6+2$; wenn also diese beyden gleichen Zahlen durch eine gleiche Zahl (4) getheilt werden, so kommen zwey gleiche Quotienten, nähmlich 2 und 2 heraus. Und so ist es überhaupt, so oft Gleiches mit Gleichem

getheilt wird, kommen jederzeit gleiche Quotienten zum Vorscheine, d. i.

wenn $a = b$
und $c = d$

so ist $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

8) Ungleiches durch Gleiches, oder Gleiches durch Ungleiches getheilt, gibt ungleiche Quotienten, und zwar ist im ersten Falle der größere Quotient da, wo der größere Dividendus, und im zweyten Falle ist der größere Quotient da, wo der kleinere Divisor sich findet. Setzen wir z. B. zwey Stück Tuch, deren das eine um die Hälfte länger ist, als das andere, die also ungleich sind, werden gleichmäßig getheilt, jedes in zwey gleiche Theile; so kommen ungleiche Theile heraus, und zwar werden die Theile bey jenem Stücke größer ausfallen, das das größere ist, wo also der größere Dividendus sich findet. Ferner wenn ich zwey gleiche Bogen Papier ungleich theile, so erhalte ich auch ungleiche Quotienten. Theile ich den einen Bogen in zwey Hälften, und den andern in 4 Quartblätter; so bekomme ich von dem ersten Bogen zwey, und von dem zweyten vier Theile; bey der ersten Theilung kommt ein größerer Quotient heraus, als bey der zweyten Theilung, weil bey jener der Divisor kleiner, als bey dieser ist. Hieraus ergibt sich der obige Grundsatz: Ungleiches durch Gleiches, oder Gleiches durch Ungleiches getheilt, gibt ungleiche Quotienten; d. i.

wenn $a = b$
und $c > d$

so ist $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$

ferner wenn $a > b$
und $c = d$

so ist $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$

Erster Theil.

Longimetrie und Planimetrie.

Erster Abschnitt.

Von den Linien und Flächen.

§. 1.

Erklärungen gerader und krummer Linien.

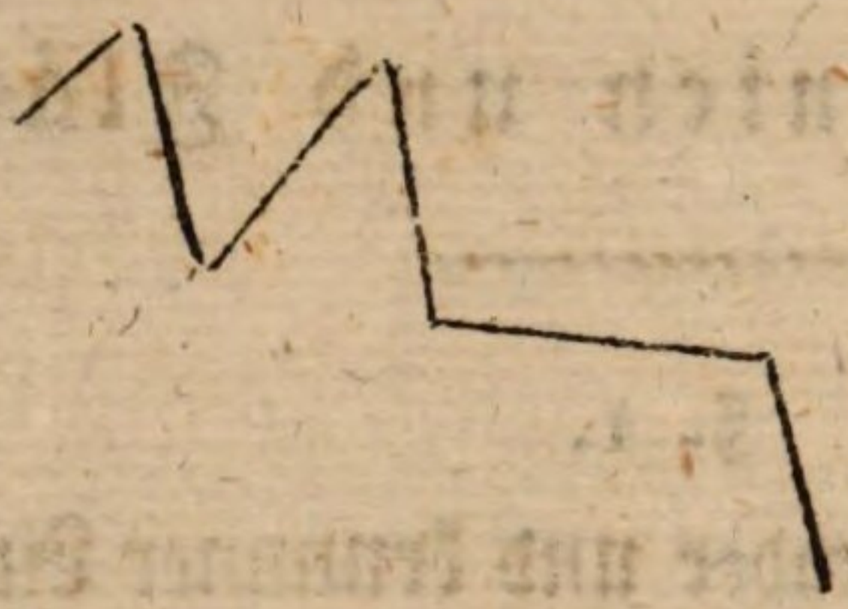
Eine Linie entsteht, wenn sich ein Punct von einem Orte zu dem andern so bewegt, daß er überall Spuren seines Ganges zurückläßt. Wenn man die Spitze eines Bleystiftes auf dem Papier eine Zeitlang so fortbewegt, daß beyde, Papier und Spitze, mit einander in Berührung bleiben; so entsteht auf solche Art zwar eine Linie, aber keine mathematische; indem sie aus einer Reihe Bleyweisklümpchen, welche kleine Körperchen sind, besteht. Unterdessen aber dient doch so eine Linie als eine sinnliche Darstellung der mathematischen Linie. Eben dieß gilt auch von einer mit der Feder gezogenen Linie.

Bewegt sich nun ein Punct von einem Orte zu dem andern in gerader Richtung, so, daß er weder auf die eine, noch auf die andere Seite abweichet; so entsteht eine gerade Linie, wie z. B. ———

Eine gerade Linie ist also eine solche, dessen Theile nach einer Richtung liegen. Bewegt sich aber ein Punct in seiner Bewegung bald rechts, bald links, so entsteht eine krumme Linie, wie z. B. ∽ und ∽

Eine krumme Linie ist also eine solche, deren einzelne Theile nicht einerley Richtung haben.

Es gibt gerad und krumm gebrochene Linien. Gerad gebrochen nennt man jene Linie, die aus geraden Linien zusammen gesetzt ist, jedoch so, daß diese nicht nach einerley Richtung zuliegen. Z. B.



Das Gegentheil nennt man eine krumm gebrochene Linie. Z. B.

Eine gemischte Linie ist eine solche, welche aus geraden und krummen zusammen gesetzt ist.

Man bezeichnet die Linien mit zwey Buchstaben, die man an ihre Endpuncte schreibt, und mit denen man sie benennt. Z. B. A————B heißt: Die Linie AB.

Anmerkung. Jede krumme Linie kann als eine Sammlung lauter kleiner gerader Linien betrachtet, und auch durch Abtheilungen in solche getheilt werden.

§. 2.

Heisch- oder Forderungssätze (Postulate) die Ziehung und Verlängerung gerader Linien betreffend.

1) Man kann zwischen zwey Puncten eine gerade Linie ziehen, wenn noch keine gezogen ist.

1. Anmerkung. Wie man auf dem Papier durch Hülfe des Lineals von einem Puncte zu dem andern

eine gerade Linie ziehe, ist jedem bekannt. Dieses wird nähmlich auf folgende Art bewerkstelliget: Man legt das Linial mit der Linierseite an die gegebenen Puncte, und bewegt die Reißfeder nach der Richtung des Linials durch die gegebenen Puncte, und so ist die gerade Linie gezogen; denn die Linierseite des Linials ist eine gerade Linie; also ist auch die nach dieser geraden Richtung des Linials gezogene Linie eine gerade Linie. Auf dem Felde steckt man die Linien durch Stäbe ab, welches auf folgende Art geschieht: Man schlägt am Anfange und Ende der abzusteckenden Linie zwey Stäbe senkrecht durch Hülfe eines Senkbleyes.

2. Anmerkung. Damit durch Hülfe eines Linials eine richtig gerade Linie gezogen werden kann, so muß es erstens eine breite Oberfläche haben, weil ein mit einer schmalen Oberfläche versehenes Linial beym Ziehen einer Linie sich leicht verrückt, indem es, da es nur wenige Stellen, Puncte auf dem Papier berührt, nicht fest anliegt. Zweytens muß es vollkommen gerad seyn. Ob aber ein Linial gerad ist, kann man auf folgende Art erfahren: Man lege das Linial auf ein Papier, ziehe an der Schneide desselben mit einem sehr zarten, scharf zugespitzten Bleystifte eine Linie; hierauf kehre man das Linial um, so, daß jener Theil, welcher zuvor rechts lag, nun zur Linken zu liegen komme. Jetzt schiebe man es an die zuvor gezogene Linie; liegt es an allen Orten an derselben an, so ist es gerad; liegt es aber an einem Theile derselben etwas ab, so hat es die gehörige gerade Richtung nicht.

2) Man kann jede gerade Linie an beyden Seiten nach Belieben verlängern.

Anmerkung. Diese zwey Heischsätze können nur von geraden Linien gelten, obschon auch krumme

Linien gezogen werden könnten; allein bey diesen weiß man das Gesetz nicht, nach welchem sie gezogen werden sollen. Sie lassen sich auf mannigfaltige Art ziehen; es gibt unendlich viele Arten krummer Linien.

§. 3.

Grundsatz.

Zwischen zwey Puncten ist nur eine gerade Linie möglich; krumme und gebrochene sind unendlich viele möglich; denn ist zwischen den zwey Puncten schon eine gerade Linie gezogen, und man wollte noch eine gerade Linie zwischen diesen zwey Puncten ziehen; so würde diese mit der vorigen nothwendig in eine zusammenfallen; es kann also nur eine gerade Linie zwischen zwey Puncten gezogen werden. Anders verhält sich die Sache mit krummen Linien; diese können zwischen zwey Puncten in unzähliger Menge gezogen werden; indem es unzählig viele Seitenwege zwischen zwey Puncten gibt, durch welche krumme Linien geführt werden können.

§. 4.

Folgesätze.

Aus dem vorigen Paragraph ergeben sich folgende Sätze:

1) Wenn zwey Puncte auf einer geraden Linie bekannt sind, so ist die Linie ihrer Lage nach völlig bestimmt. Weiß man überdieß noch ihre Endpuncte, so ist auch ihre Größe (Länge) bestimmt.

2) Wenn eine Linie mit einer andern

zwey Puncte gemein hat, so sind beyde ihrer Lage nach eine und dieselbe.

3) Zwey verschiedene Linien können nur einen Punct mit einander gemein haben.

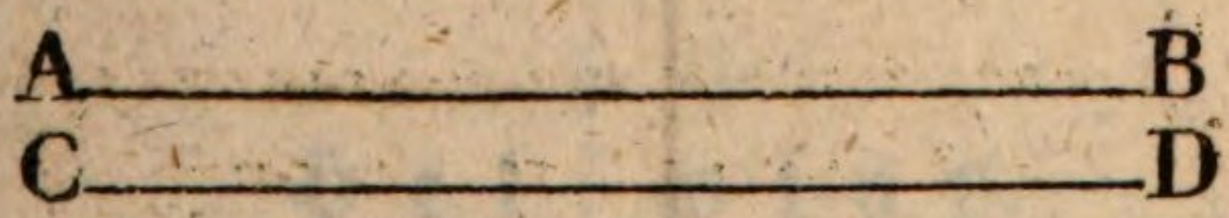
4) Alle geraden Linien sind einander ähnlich; denn alle geraden Linien kommen in allen ihren Bestimmungen, nur vielleicht nicht in der Größe überein; also sind sie einander ähnlich (1. Thl. Einl. Dritt. Abschn. §. 12.). Haben aber die geraden Linien auch noch gleiche Größe, so sind sie einander nicht nur ähnlich, sondern auch gleich; sie sind congruent, d. h. wenn man sie auf einander legt, so decken sie einander, sie fallen in ihren Gränzen (in ihren Endpuncten) zusammen.

5) Auch die einzelnen Theile einer geraden Linie sind der ganzen Linie ähnlich; denn sie unterscheiden sich von der ganzen Linie nur in Ansehung der Größe.

§. 5.

Erklärung der Parallellinien.

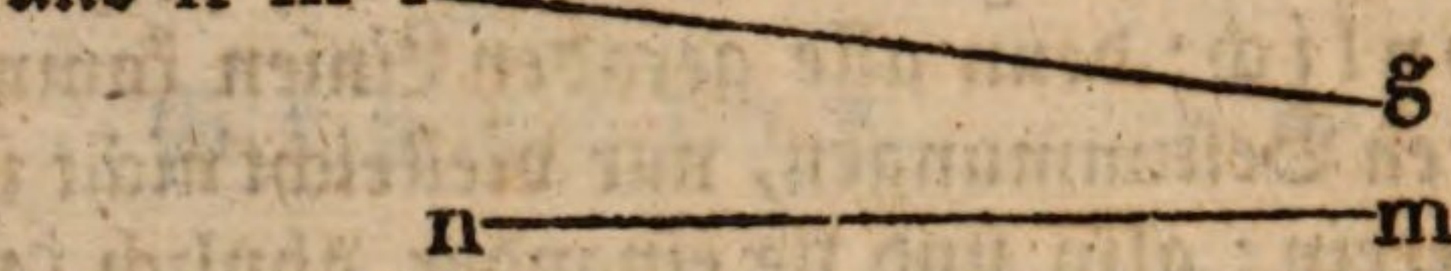
Zwey Linien, die so neben einander herlaufen, daß sie in allen ihren Puncten überall gleich weit von einander abstehen (das Wagengeleis kann hier als ein sinnliches Beyspiel dienen), nennt man gleichlaufende oder Parallellinien. So sind die folgenden zwey Linien AB und CD Parallellinien



Denn beyde Linien stehen überall gleich weit von einander ab.

Stehen zwey Linien nicht überall gleich weit von einander ab, sondern an einem Orte weiter, an dem andern näher; so heißen sie im ersten Falle auseinanderlaufend (divergirend), im zweyten zusammenlaufend (convergirend).

Z. B. f g und n m

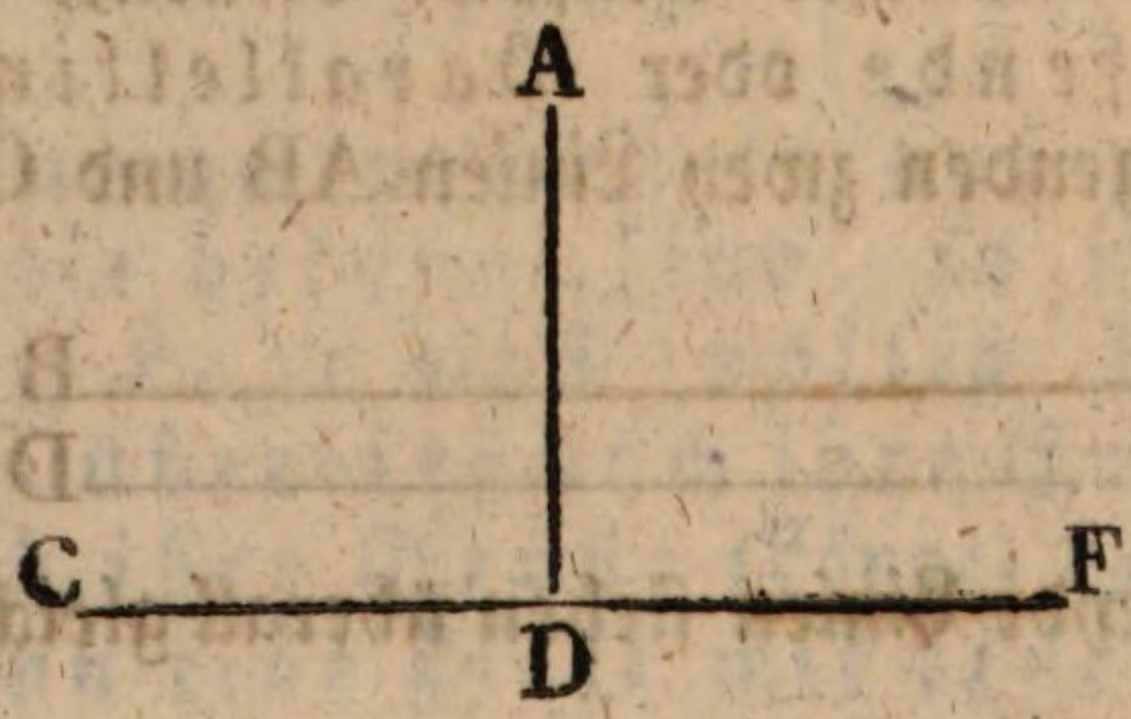


Bey f und n sind die Linien f g und n m auseinanderlaufend, divergirend; bey g und m aber sind sie zusammenlaufend, convergirend. Eine Linie, welche mit dem stehenden Wasser parallel lauft, heißt wagrecht (horizontal).

§. 6.

Erklärung der senkrechten Linie.

Wenn eine Linie auf einer andern so steht, daß sie sich weder auf die eine, noch andere Seite mehr neigt, wie in der unten beygefügten Abbildung die Linie AD; so heißt sie senkrecht, Perpendicularlinie. Die Linie AD steht auf CF senkrecht; denn sie steht auf CF so aufrecht, daß sie sich auf keine Seite neiget; sie ist also eine senkrechte, eine Perpendicularlinie.



§. 7.

Erklärung.

Ein Punct liegt außerhalb einer geraden Linie, wenn er weder in ihr, noch in ihrer Verlängerung liegt.

§. 8.

Erklärungen.

Eine Fläche heißt eben, oder eine Ebene, wenn jede gerade Linie, die man von irgend einem Puncte derselben zu irgend einem andern in ihr zieht, ganz in der Fläche liegt. So ist z. B. die Oberfläche eines Tisches eine Ebene (freylich keine vollkommene); denn ihr mögt aus was immer für einem Puncte auf der Oberfläche des Tisches zu was immer für einem andern Puncte derselben eine gerade Linie ziehen, so fällt diese alle Mahl ganz in die Oberfläche.

Eine Fläche heißt uneben, eine Unebene, wenn die gerade Linie, die man aus was immer für einem Puncte der Fläche zu einem andern beliebigen Puncte derselben zieht, nicht in der Fläche, sondern außerhalb derselben zu liegen kommt. So ist z. B. ein holprichter Weg eine unebene Fläche.

Eine Fläche heißt krumm, wenn kein Theil von ihr eben ist. Ein sinnliches Bild einer krummen Fläche gibt die Fläche eines Gewölbes.

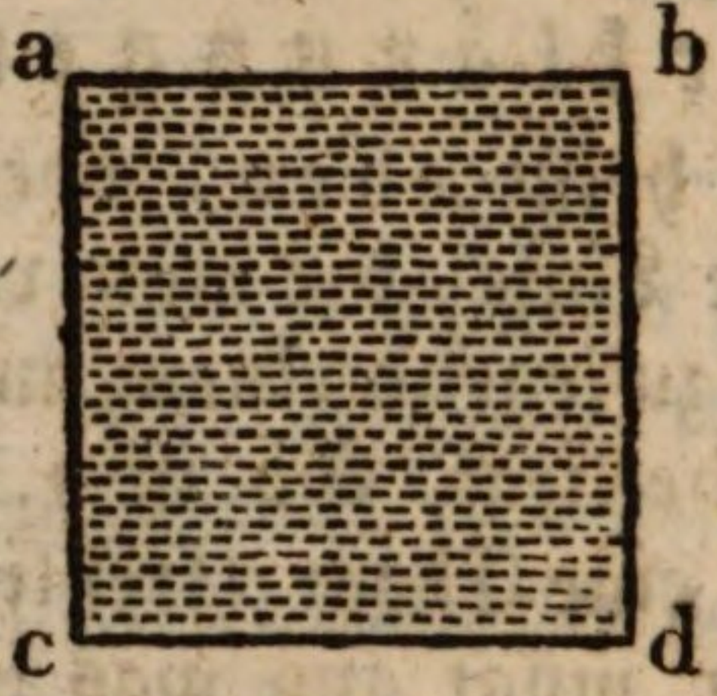
Anmerkung. Wenn wir künftig von Linien, Winkeln, Figuren u. s. w. sprechen, so nehmen wir jederzeit an, daß sie in einer Ebene verzeichnet sind.

§. 9.

Heitschsatz.

Man kann jede Ebene ins Unendliche verlängern.

Eine ebene Fläche entsteht, wenn sich eine Linie in die Quere bewegt, und ununterbrochene Spuren ihres Ganges zurückläßt. Wenn sich z. B. die Linie a b in der beygefügten Figur nach c d bewegt und überall Spuren ihres Ganges zurückläßt, so ist der Platz innerhalb a b c d eine Fläche.



Aus der Entstehung einer ebenen Fläche erhellet, daß jede ebene Fläche ins Unendliche verlängert werden kann. Um die Fläche a b c d zu verlängern, dürfte man nur die Linie a b über c d hinausführen, wodurch die Fläche a b c d ins Unendliche könnte verlängert werden.

Zusatz. Da sich die Linie, welche eine Fläche beschreibt, nach verschiedenen und mannigfaltigen Richtungen wenden kann; so ist es offenbar, daß es Flächen von mannigfaltigen Gestalten geben kann.

Zweyter Abschnitt.

Von den Winkeln.

§. 1.

Was ein Winkel ist.

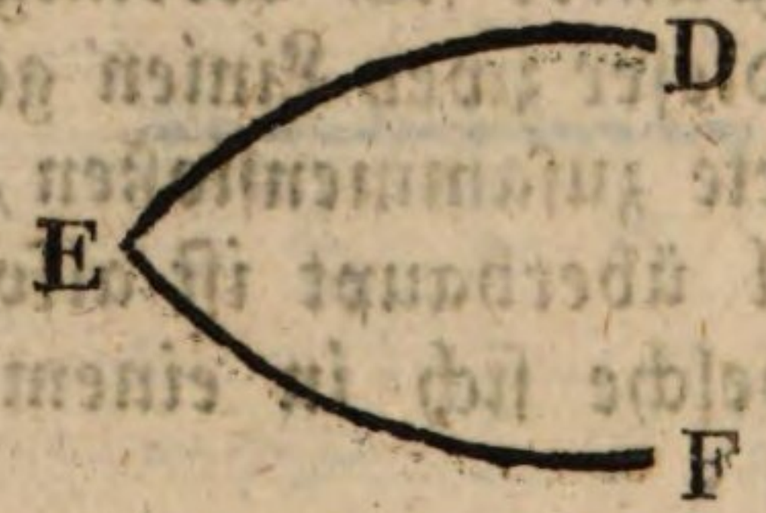
Hier kommen zwey Linien vor, die Linien AC und AB, und wie wir sehen, so treffen beyde diese Linien in dem Puncte A zusammen. Wenn nun zwey Linien eine solche Stellung gegen einander haben, daß sie in einem Puncte sich vereinigen, so nennt man die Neigung dieser zwey Linien gegen einander, die in einem Puncte zusammenstoßen, einen Winkel. Ein Winkel überhaupt ist also die Neigung zweyer Linien, welche sich in einem Puncte vereinigen.

Die Linien CA und BA, die den Winkel bilden, heißen die Schenkel des Winkels. Und der gemeinschaftliche Punct A, worin die Schenkel zusammenstoßen, heißt der Scheitelpunct oder die Spitze des Winkels.

Ein Winkel wird entweder mit drey Buchstaben, oder auch nur mit einem Buchstaben bezeichnet. Wenn von einem Winkel die Rede ist, so bezeichnet man ihn nur mit einem kleinen Buchstaben des lateinischen Alphabets, den man zwischen die Schenkel an die Spitze setzt, so ist z. B. der obige Winkel durch x bezeichnet; oder man bezeichnet ihn auch mit einem großen Buchstaben, der außen an die Spitze gestellt wird, so hat obiger Winkel außer der Spitze den großen Buchstaben A; man kann ihn also den Winkel x, oder den Winkel A nennen.

Ist von mehrern Winkeln die Rede, so bezeichnet man sie mit drey kleinen oder drey großen Buchstaben, die man an ihre Spitzen und Schenkel schreibt, wo aber jederzeit, welches wohl zu merken ist, bey der Benennung der Buchstabe am Scheitelpuncte in die Mitte genommen werden muß. Obiger Winkel kann also auch dem Gesagten zufolge CAB oder BAC genannt werden.

Wenn die Linien (die Schenkel), welche den Winkel bilden, geradlinigt sind, wie bey dem Winkel CAB; so heißt er ein geradlinigter Winkel. Sind aber die Schenkel eines Winkels krumme Linien, wie in dem folgenden Winkel DEF,



so heißt der Winkel ein krummlinigter Winkel. Der Winkel DEF ist also ein krummlinigter Winkel. Ist der eine Schenkel eines Winkels eine krumme und der andere eine gerade Linie, so heißt er ein vermischtlinigter Winkel.

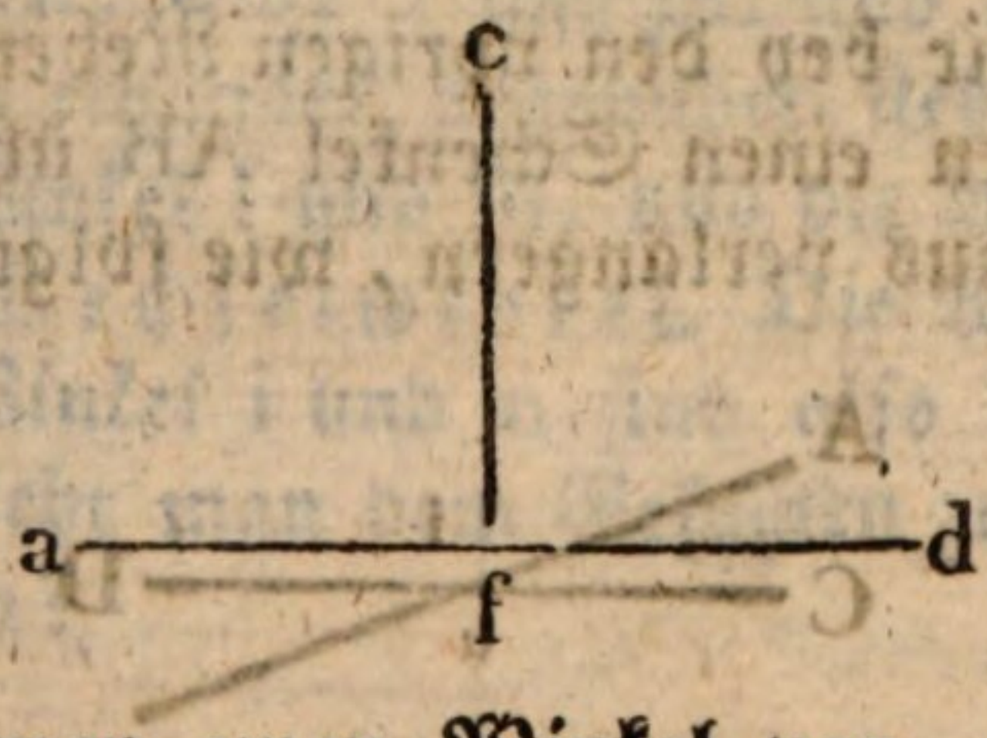
Es gibt also geradlinigte, krummlinigte und vermischtlinigte Winkel.

Um einen Winkel zu bezeichnen, bedient man sich gewöhnlich dieses Zeichens $<$, welches mit Winkel ausgesprochen wird. So z. B. heißt dieser Ausdruck: Der $<$ a ist dem $<$ b gleich, so viel, als: Der Winkel a ist dem Winkel b gleich.

Anmerkung. Wenn wir in der Folge von Winkeln sprechen, und weiter nichts dazu setzen, so sind alle Mahl geradlinigte Winkel dabey zu verstehen.

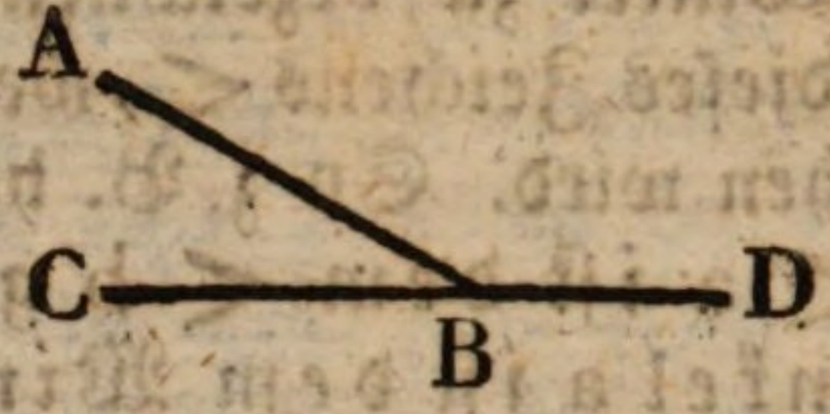
§. 2.

Was Nebenwinkel sind.



Hier kommen zwey Winkel vor, nähmlich die Winkel afc und cfd, welche sich so neben einander befinden, daß sie einen gemeinschaftlichen Schenkel, nähmlich cf haben; denn dieser Schenkel gehört sowohl zu dem Winkel afc, als zu dem Winkel cfd; dann haben beyde diese Winkel auch noch einen gemeinschaftlichen Scheitelpunct, nähmlich den Punct f, der zu beyden Winkeln gehört. Derley Winkel nun, die einen gemeinschaftlichen Schenkel und den nähmlichen Scheitel haben, heißen Nebenwinkel. Die Winkel afc und cfd sind also Nebenwinkel.

Hier folgen zur bessern Einsicht noch zwey Nebenwinkel, nähmlich CBA und ABD.

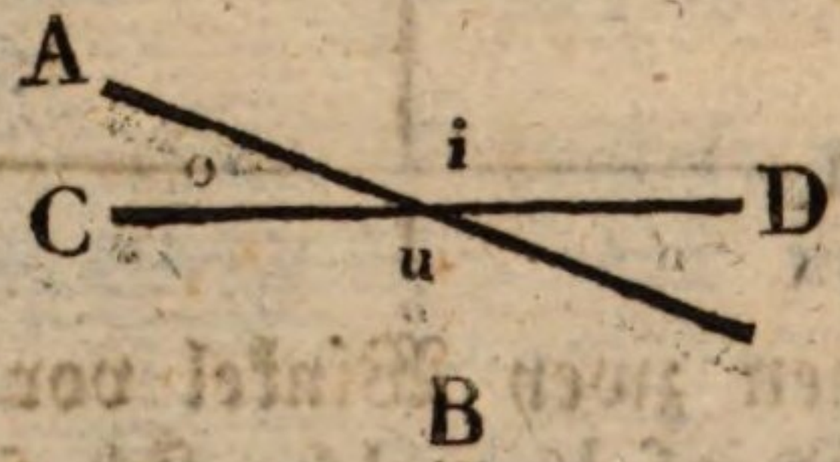


Warum sind diese zwey Winkel CBA und ABD Nebenwinkel? Was versteht man also unter Nebenwinkeln für Winkel?

§. 3.

Was Scheitelwinkel sind.

Wenn wir bey den vorigen Nebenwinkeln CBA und ABD den einen Schenkel AB über den Scheitelpunct hinaus verlängern, wie folgt:



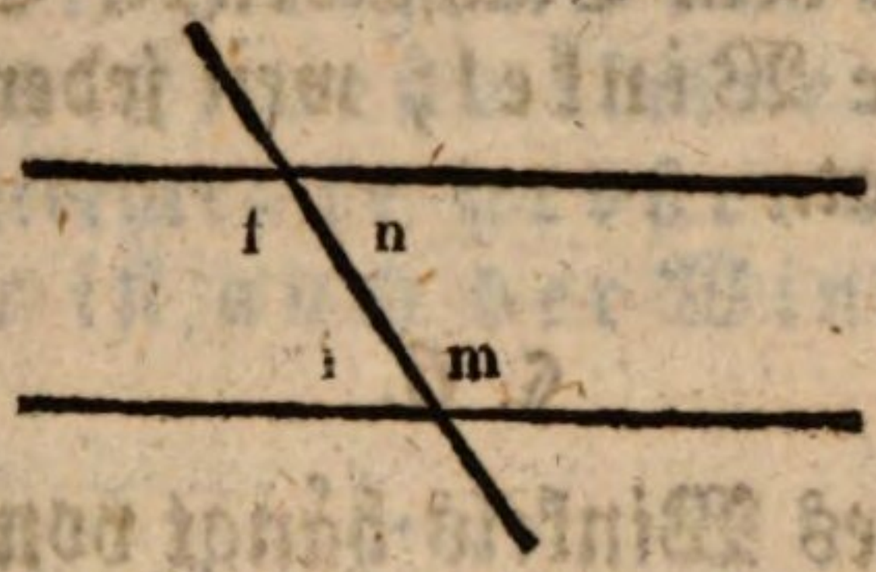
so entstehen die vier Winkel, nähmlich o, i, u und n, von denen jederzeit zwey einander gegenüber liegen, als: o und n, u und i, die so beschaffen sind, daß sie einen gemeinschaftlichen Scheitelpunct, nähmlich den Scheitelpunct B haben. Solche Winkel nun, die einander gegenüber liegen und einen gemeinschaftlichen Scheitel haben, heißen Scheitelwinkel oder auch Verticalwinkel. Die Winkel o und n, und auch die Winkel u und i sind Verticalwinkel.

Anmerkung. Das lateinische X stellt vier Verticalwinkel vor.

§. 4.

Was Wechselwinkel sind.

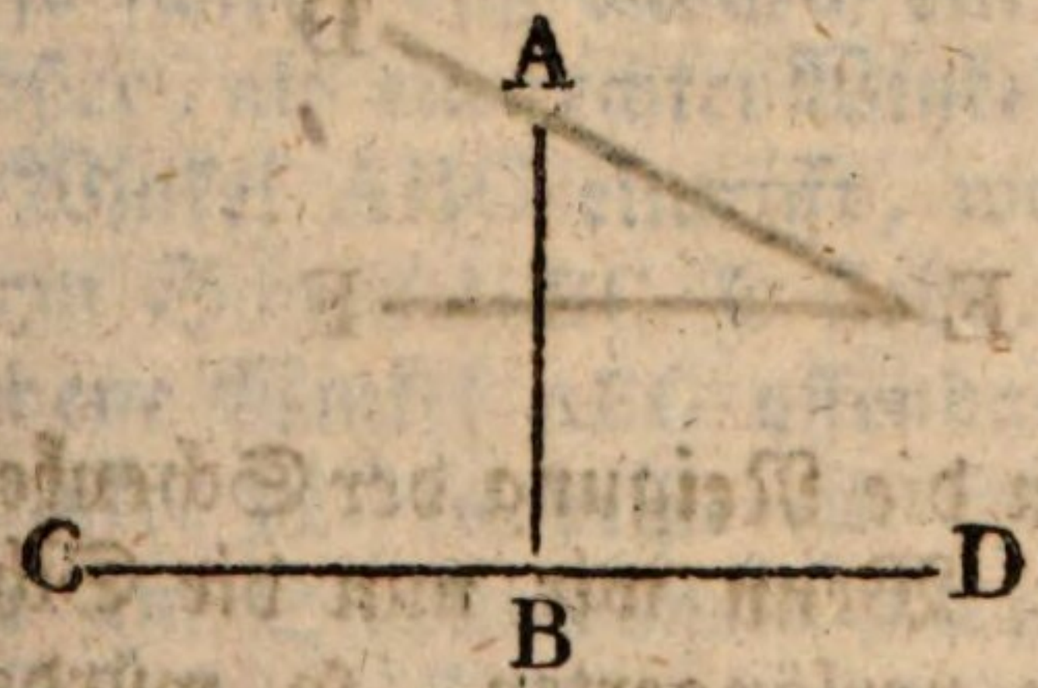
Wenn zwey Linien von einer dritten Linie durchschnitten werden, wie folgt:



so entstehen innerhalb der zwey Linien vier Winkel, f, n, i und m, von denen alle Mahl zwey einander gegenüber stehen, als: f und m, und die Winkel i und n. Derley einander gegenüber stehenden Winkel, wie die Winkel f und m, und die Winkel n und i nennt man Wechselwinkel. Die Winkel f und m, und die Winkel i und n sind also Wechselwinkel. Was versteht man dem Gesagten zufolge unter Wechselwinkeln?

§. 5.

Was ein rechter Winkel ist.



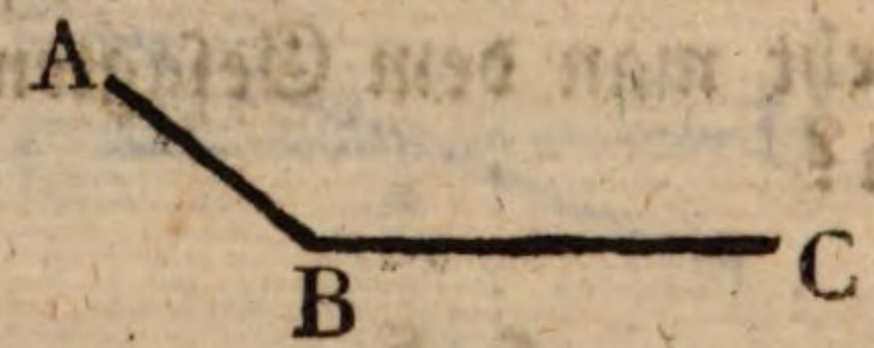
Hier steht die gerade Linie AB auf der Linie CD so, daß sie sich weder auf die eine, noch andere Seite mehr neiget, d. h. sie steht auf ihr senkrecht (Erst.

Abschn. §. 5.) und, wie es der Augenschein zeigt, bildet sie zugleich mit ihr zwey Nebenwinkel, nähmlich CBA und ABD; welche einander gleich sind. Nun so einen Winkel, dessen Nebenwinkel ihm gleich ist, nennt man einen rechten Winkel, und man bezeichnet ihn mit dem Buchstaben R. CBA und ABD sind also rechte Winkel; weil jeder einen gleichen Nebenwinkel hat.

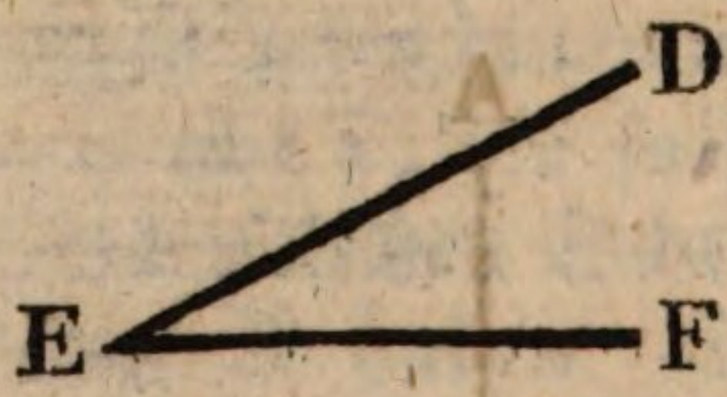
§. 6.

Die Größe eines Winkels hängt von der Neigung seiner Schenkel ab.

Wie wir §. 1. gehört haben, so ist ein Winkel die Neigung zweyer Linien, die sich in einem Puncte vereinigen. Je nachdem nun diese Neigung bey einem Winkel groß oder klein ist, so ist auch der Winkel groß oder klein. So ist offenbar der Winkel ABC



größer, als der Winkel DEF;



weil in jenem die Neigung der Schenkel größer, als in diesem ist. Wenn wir nun die Schenkel in beyden Winkeln verlängerten, so würde dadurch die Neigung der Schenkel gegen einander nicht verändert werden; denn diese bleibt sich immer gleich, man mag die Schenkel verlängern, so weit man will;

folglich wird auch der Winkel, dessen Schenkel verlängert werden, weder größer, noch kleiner; wenn man also die Größe eines Winkels bestimmen will, so hat man nicht auf die Länge der Schenkel, sondern bloß auf die Neigung der Schenkel zu sehen. Je kleiner die Neigung der Schenkel eines Winkels ist, desto kleiner ist der Winkel, und umgekehrt: je größer dieselbe ist, desto größer ist auch der Winkel.

§. 7.

Was schiefe, stumpfe und spitzige Winkel sind.

Wenn wir die zwey im vorigen Paragraph verzeichneten Winkel ABC und DEF noch ein Mahl vor uns nehmen, und darauf sehen, wie sie gebildet sind, so ergibt sich, daß in jedem derselben der eine Schenkel, nähmlich der obere, beym Winkel ABC der Schenkel AB, und beym Winkel DEF der Schenkel DE, eine schiefe Linie ist; man heißt diese Winkel darum schiefe Winkel. Schiefe Winkel sind also solche Winkel, bey denen der eine Schenkel auf dem andern Schenkel schief steht. Steht nun der eine Schenkel auf dem andern Schenkel eines Winkels so schief, daß dadurch ein Winkel entsteht, der größer, als ein rechter Winkel ist, wie dieses bey dem Winkel ABC eintrifft, wo der Schenkel AB auf dem Schenkel BC so steht, daß der dadurch entstandene Winkel ABC offenbar größer, als ein rechter Winkel ist: so heißt ein solcher Winkel, weil er unten am Scheitelpuncte stumpf ist, ein stumpfer Winkel. Steht aber der eine Schenkel auf dem andern Schenkel eines Winkels so schief, daß dadurch ein Winkel entsteht, der kleiner ist, als ein rechter Winkel, wie dieses der Fall bey dem

Winkel DEF ist: so heißt ein solcher Winkel, weil er unten am Scheitelpuncte spitzig ist, ein spitziger Winkel.

Dem Gesagten zufolge ist ein stumpfer Winkel ein solcher Winkel, der größer als ein Rechter ist; ein spitziger Winkel hingegen ist ein solcher Winkel, der kleiner ist, als ein Rechter. Und beyde diese Winkel, der stumpfe und spitzige Winkel, führen den gemeinschaftlichen Nahmen schiefe Winkel.

Dritter Abschnitt.

Von den Figuren.

§. 1.

Was man unter einer Figur versteht, und wann sie eben oder krumm ist.

Zwey gerade Linien, da sie sich nur in einem Puncte berühren können (Erst. Abschn. §. 4. Nr. 3.), sind nicht im Stande eine Fläche einzuschließen oder zu begränzen. Hierzu werden wenigstens drey gerade Linien erfordert. Drey gerade Linien können eine Fläche einschließen. Ist nun eine Fläche rund um von Linien eingeschlossen, so heißt sie eine Figur. Eine Figur ist also eine solche Fläche, die rund um von Linien eingeschlossen oder begränzt ist.

Anmerkung. Daß auch nur eine Linie, wenn sie nähmlich krumm ist, eine Fläche einschließen könne, und daß auch zwey Linien, deren die eine eine

gerade, die andere eine krumme Linie ist, eine Fläche zu begränzen im Stande sind, wird jeder leicht einsehen. Von solchen Flächen aber, die von krummen, oder gemischten Linien eingeschlossen sind, ist hier nicht die Rede. Weiter unten wird davon Meldung geschehen.

Die Linien, welche die Fläche einschließen, heißen Seiten. Alle Seiten (die ganze Gränze) der Figur heißt ihr Umfang, Umriß oder Perimeter.

Ist die begränzte Fläche eine Ebene, so heißt die Figur eben; ist sie aber krumm, so heißt auch die Figur krumm. Wir reden hier und auch in der Folge bloß von ebenen Figuren.

§. 2.

Was eine geradlinigte, krumme und vermischtlinigte Figur ist.

Eine Figur kann entweder lauter gerade, oder lauter krumme, oder krumme und gerade Linien zugleich zu ihren Seiten haben. Hat sie lauter gerade Linien zu ihren Gränzen, so heißt sie eine geradlinigte Figur. Sind ihre Seiten lauter krumme Linien, so nennt man sie eine krummlinigte Figur. Besteht der Umfang einer Figur theils aus krummen, theils aus geraden Linien, so gibt man ihr den Nahmen vermischtlinigte Figur.

I.

Von den geradlinigten Figuren.

§. 1.

Lehrsatz.

Jede geradlinigte Figur hat so viel Ecken oder Winkel, als sie Seiten hat, und umgekehrt, so viel Seiten, als sie Winkel hat.

Beweis. Da sich zwey gerade Linien nur in einem Puncte berühren können, durch deren Berührung ein Winkel entsteht; so bildet die erste Seite einer geradlinigten Figur mit der zweyten Seite den ersten Winkel, die dritte Seite mit der zweyten den zweyten, die vierte mit der dritten den dritten Winkel u. s. w., und da die letzte Seite die Figur schließt, so bildet diese mit der vorletzten Seite einen Winkel, und eben so bildet sie auch mit der ersten Seite einen Winkel; wenn also die geradlinigte Figur aus vier Seiten besteht, so hat sie auch vier Winkel, besteht sie aus fünf Seiten, so kommen in ihr fünf Winkel vor u. s. w.; man kann also im Allgemeinen behaupten, daß jede geradlinigte Figur aus so viel Winkeln besteht, als an ihr Seiten vorkommen. Umgekehrt: Jede geradlinigte Figur hat so viel Seiten, als in ihr Winkel vorkommen.

Beweis. Der erste Winkel einer geradlinigten Figur hat zwey Seiten, jeder folgende Winkel erfordert eine neue Seite, der letzte Winkel aber hat zwey Seiten, die zum ersten und vorletzten Winkel

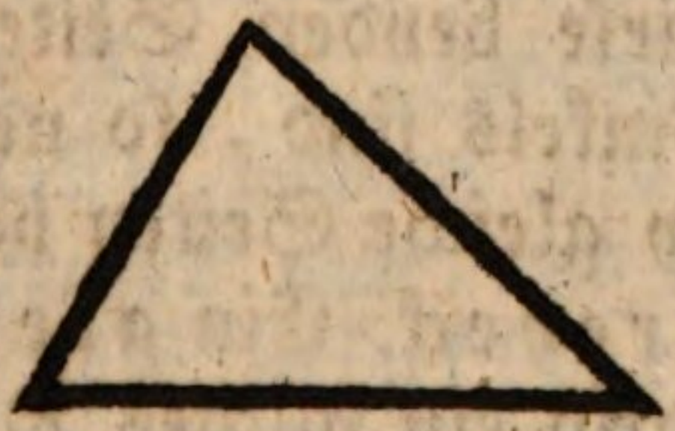
gehören; wenn also die Figur aus vier Winkeln besteht, so kommen an ihr auch vier Seiten vor; besteht sie aus fünf Winkeln, so sind auch an ihr fünf Seiten vorhanden u. s. w. Aus so viel Winkeln eine geradlinigte Figur besteht, eben so viele Seiten hat sie also auch zu ihrem Umfange.

Anmerkung. Damit der eben geführte Beweis anschaulich wird, darf man nur die weiter unten verzeichneten drey- und mehrseitigen Figuren zu Hülfe nehmen, bey denen jederzeit die Anzahl der Winkel mit der Anzahl der Seiten übereinstimmt.

§. 2.

Erklärung eines Dreyeckes.

Jede geradlinigte Figur muß wenigstens drey gerade Linien zu ihren Seiten haben (Dritt. Abschn. §. 1.). Hier folgt eine mit drey geraden Linien eingeschlossene Figur, die unter den geradlinigten Figuren die erste und einfachste ist.

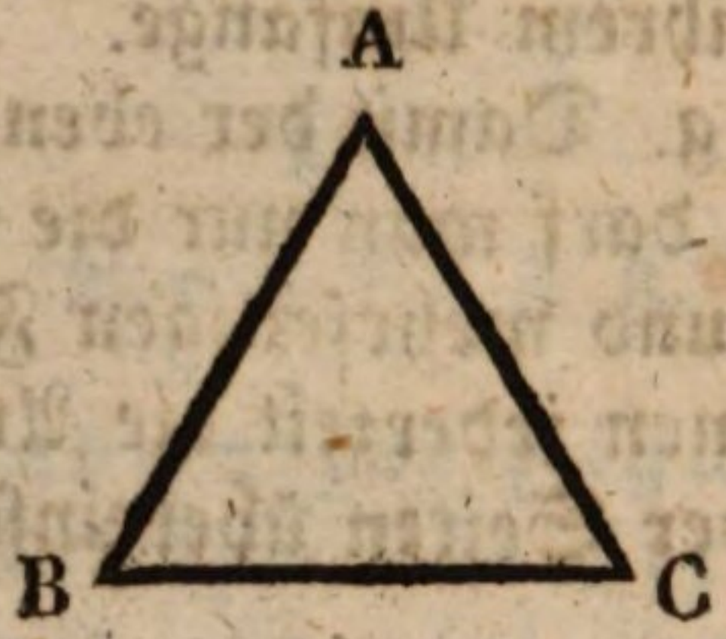


Diese Figur enthält drey Seiten und eben so viel Winkel. Man nennt eine solche Figur ein Dreyeck oder Triangel. Ein Dreyeck ist also eine solche Figur, welche von drey Seiten eingeschlossen ist und drey Winkel hat. Sind die drey Seiten eines Dreyeckes, wie in dem oben verzeichneten Dreyecke, gerade Linien, so heißt es ein geradliniges Dreyeck.

§. 3.

Unterschied der Dreyecke in Ansehung ihrer Seiten.

In dem folgenden Dreyecke ABC



sind alle drey Seiten gleich lang. So ein Dreyeck nun, das drey gleiche Seiten hat, heißt ein gleichseitiges Dreyeck. Ein gleichseitiges Dreyeck ist also eine solche Figur, bey der alle drey Seiten gleich lang sind.

Daß es aber durchaus nicht nothwendig ist, daß alle drey Seiten an einem Dreyecke gleich lang seyn müssen, liegt am Tage. Es können auch bey einem Dreyecke bloß zwey Seiten von gleicher Länge seyn. Und weil dann diese beyden Seiten auch zugleich Schenkel eines Winkels sind, so nennt man so ein Dreyeck, das zwey gleiche Seiten hat, ein gleichschenklichtes Dreyeck. Ein gleichschenklichtes Dreyeck ist also ein solches Dreyeck, bey dem zwey Seiten gleich lang sind.

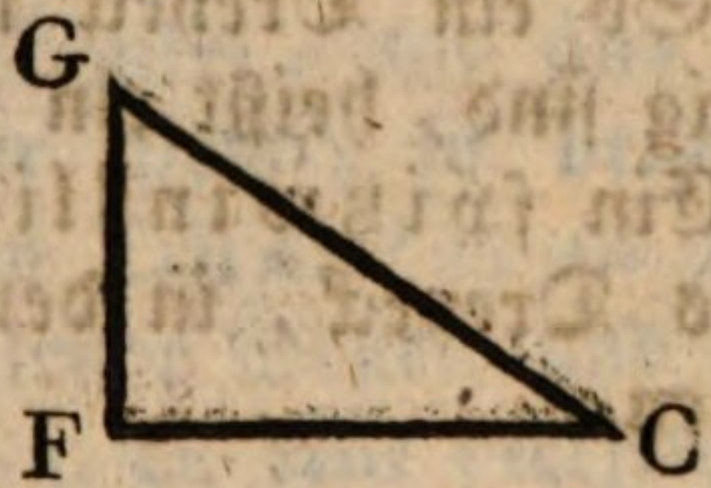
Die zwey gleichen Seiten eines gleichschenklichten Dreyeckes nennt man die Schenkel des Dreyeckes; die ungleiche Seite heißt die Grundlinie, der Punct, wo die Schenkel des Dreyeckes zusammenlaufen, heißt die Spitze; alles, was von der Grundlinie nach der Spitze zuliegt, heißt über der Grundlinie; was unter der Grundlinie liegt, heißt unter der Grundlinie.

Daß bey einem Dreyecke auch drey ungleiche Seiten vorkommen können, wird man leicht einsehen. Hat nun ein Dreyeck drey ungleiche Seiten, so heißt es ein ungleichseitiges Dreyeck. Ein ungleichseitiges Dreyeck ist also ein solches Dreyeck, bey dem alle drey Seiten von verschiedener Länge sind.

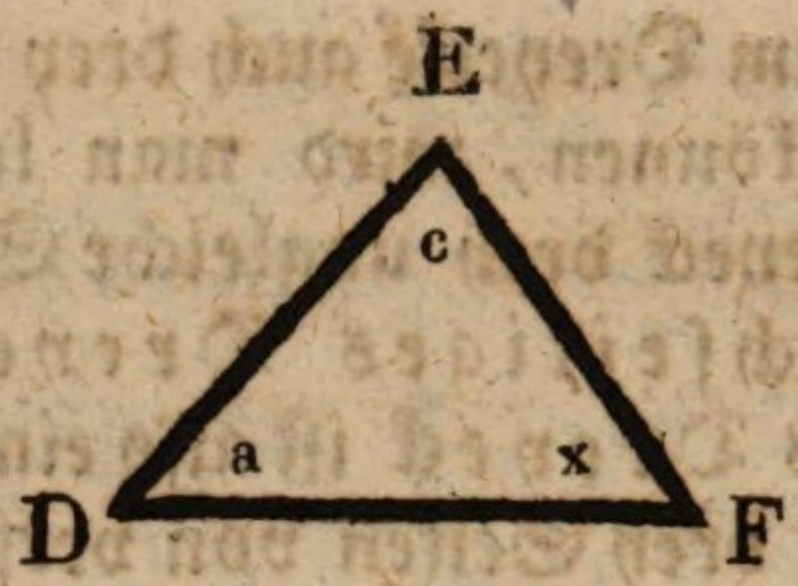
So können wir also die Dreyecke in Absicht ihrer Seiten unterscheiden. Jetzt wollen wir die Winkel der Dreyecke mit einander vergleichen.

§. 4.

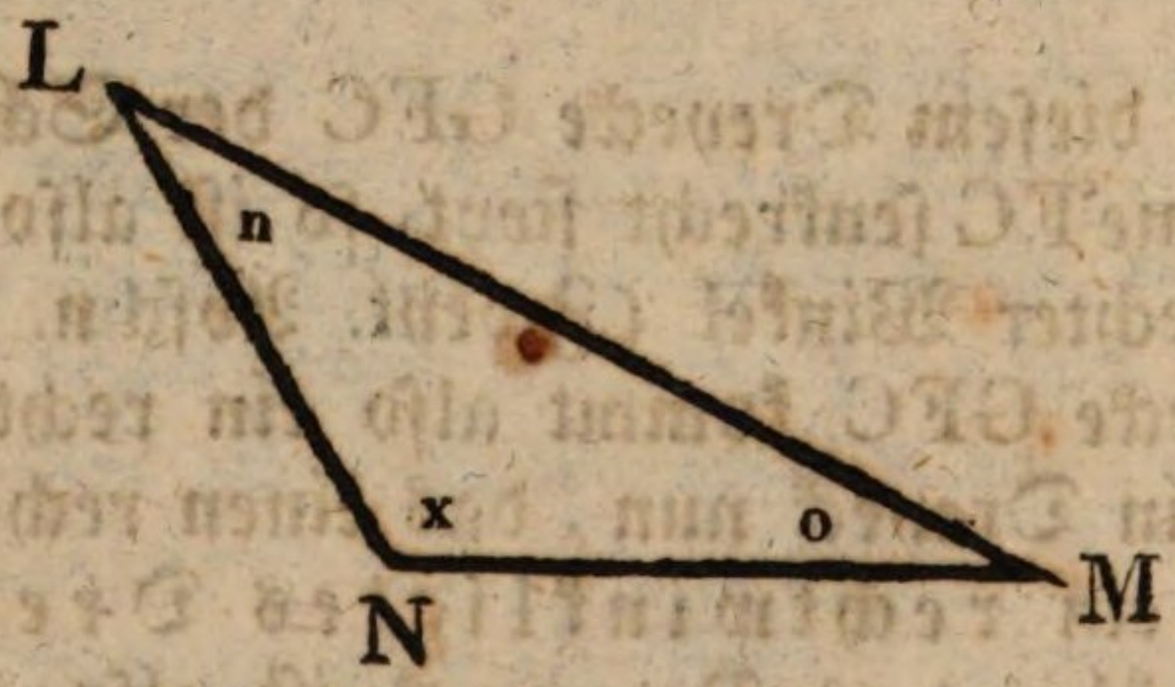
Unterschied der Dreyecke in Ansehung ihrer Winkel.



Da in diesem Dreyecke GFC der Schenkel GF auf der Linie FC senkrecht steht, so ist also der Winkel a ein rechter Winkel (Zweyt. Abschn. §. 4.); in dem Dreyecke GFC kommt also ein rechter Winkel vor. So ein Dreyeck nun, das einen rechten Winkel hat, heißt ein rechtwinkligtes Dreyeck. Ein rechtwinkligtes Dreyeck ist also ein solches Dreyeck, das einen rechten Winkel in sich faßt. Die Seite GC, welche dem rechten Winkel entgegen steht, worauf die zwey Schenkel des rechten Winkels stehen, heißt Hypothenus, und die andern zwey Seiten GF und FC, welche den rechten Winkel bilden, heißen Catheten. Man könnte sie auch die beyden Senkrechten nennen.



Wenn wir den Winkel a in diesem Dreyecke DEF mit dem Winkel a des vorigen Dreyeckes GFC vergleichen, so sehen wir, daß der Winkel a in dem Dreyecke DEF ein spitziger Winkel ist (Zweyt. Abschn. §. 7.), und wenn wir auch noch die zwey übrigen Winkel c und x betrachten, so erhellet, daß auch diese spitzige Winkel sind; das Dreyeck DEF hat also drey spitzige Winkel. So ein Dreyeck nun, worin alle drey Winkel spitzig sind, heißt ein spitzwinkligtes Dreyeck. Ein spitzwinkligtes Dreyeck ist also ein solches Dreyeck, in dem lauter spitzige Winkel vorkommen.



In diesem Dreyecke LNM ist der Winkel x, da er größer ist, als ein Rechter (Zweyt. Abschn. §. 7.), ein stumpfer Winkel; die übrigen zwey Winkel aber, nähmlich n und o sind spitzige Winkel. So ein Dreyeck nun, in dem ein stumpfer Winkel vorkommt, heißt ein stumpfwinkligtes Dreyeck. Ein stumpfwinkligtes Dreyeck ist also ein solches Dreyeck, worin ein stumpfer Winkel ist.

§. 5.

Erklärung eines Quadrates.

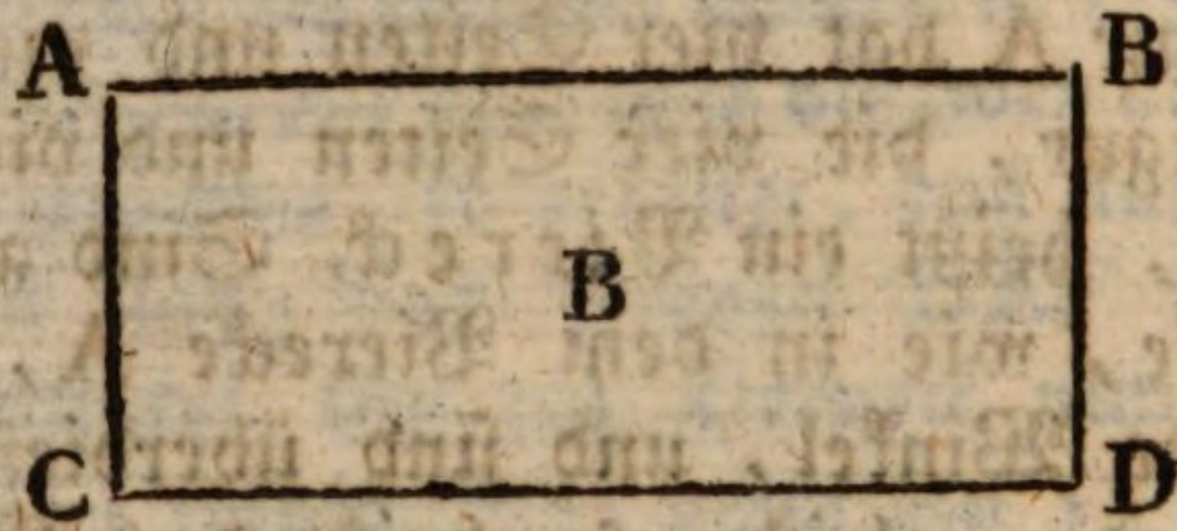
Die Figur A hat vier Seiten und vier Winkel. So eine Figur, die vier Seiten und vier Winkel (Ecken) hat, heißt ein Viereck. Sind aber in einem Vierecke, wie in dem Vierecke A, alle vier Winkel rechte Winkel, und sind überdieß die vier Seiten einander gleich, so heißt das Viereck ein Quadrat. Ein Quadrat ist also eine solche Figur, die vier gleiche Seiten und lauter rechte Winkel hat. So ist z. B. eine vierseitige Fensterscheibe, die vier gleiche Seiten hat und aus vier rechten Winkeln besteht, wenn wir uns die Dicke wegdenken, als ein Quadrat zu betrachten.

Anmerk. Die Benennung Quadrat kommt in der Mathematik, und auch im gemeinen Leben oft vor; es ist daher nöthig, daß man den richtigen Begriff mit diesem Worte verbinde. Sagt man z. B. der Wald, oder das Feld ist ein Quadrat, der Platz bildet ein Quadrat; so heißt das so viel, als: Die Oberfläche des Waldes, die Oberfläche des Feldes, die Oberfläche des Platzes ist von einer solchen Beschaffenheit, daß sie von vier gleich langen Seiten, die mit einander lauter rechte Winkel bilden, eingeschlossen ist. Auch bey Stunden, Schuhen, Ruthen u. s. w. wird das Wort Quadrat gebraucht. Eine Quadratstunde ist eine solche viereckige Fläche,

die aus vier gleichen Seiten besteht, deren jede Seite eine Stunde lang ist, und die mit einander so verbunden sind, daß sie lauter rechte Winkel bilden. Was ist also ein Quadratschuh, eine Quadratruthe, eine Quadratelle?

§. 6.

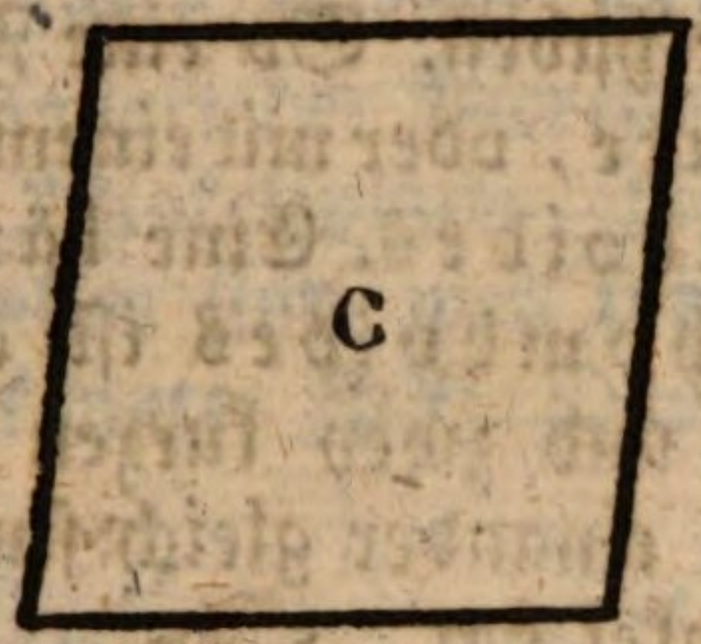
Erklärung eines Rechteckes (Oblongums).



Wenn wir diese Figur B mit der vorigen Figur A vergleichen, so ergibt sich, daß die Figur B auch vier rechte Winkel und vier Seiten hat, wie die Figur A; allein bey B sind die vier Seiten nicht alle gleich lang, wie bey A; bey B sind, wie es der Augenschein darthut, nur die einander gegenüber liegenden Seiten, nähmlich AC und BD, ferner AB und CD, gleich. So ein Viereck nun, das vier rechte Winkel hat, und bey dem die gegenüber liegenden Seiten sich gleich sind, nennt man ein länglichtes Viereck, oder Rechteck, oder Oblongum. Ein Oblongum oder Rechteck, ist also eine solche Figur, worin vier rechte Winkel enthalten, und bey der die gegenüber liegenden Seiten sich gleich sind. So ist z. B. eine gewöhnliche Thüre, wenn wir die Dicke davon wegrechnen, ein Oblongum.

§. 7.

Erklärung einer Raute.

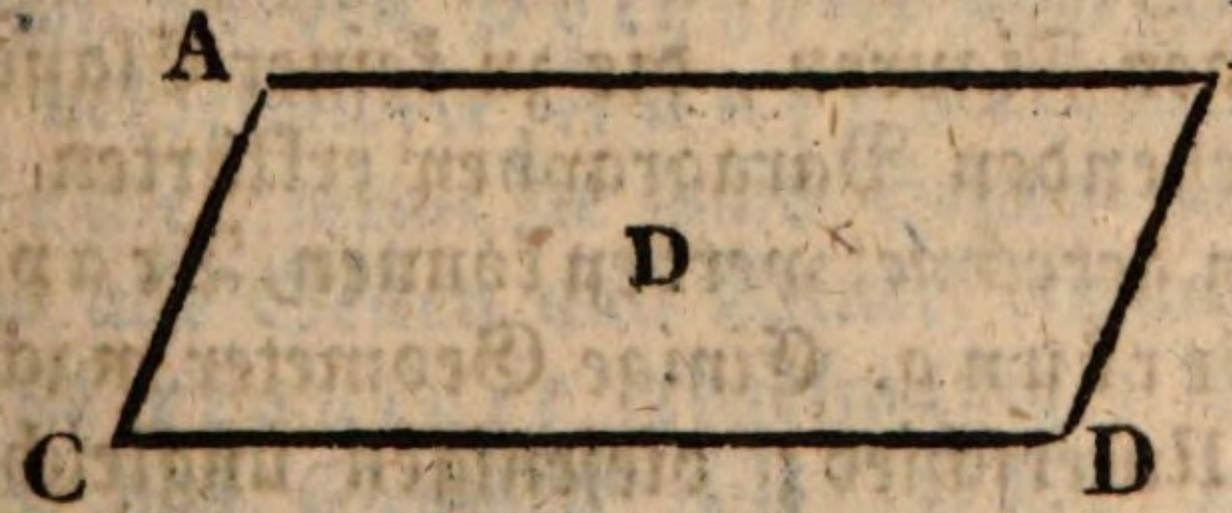


Hier haben wir eine Figur, die vier gleich lange Seiten zu ihrem Umfange hat, die aber so mit einander verbunden sind, daß sie lauter schiefe Winkel, wovon zwey spitzige und zwey stumpfe Winkel sind, bilden. Eine solche Figur nennt man eine Raute oder ein Rhombus. Eine Raute ist also ein solches Viereck, welches vier gleiche Seiten und eben so viel schiefe Winkel hat, wovon zwey stumpf und zwey spitzig sind.

Wodurch unterscheidet sich die Raute von einem Quadrate?

§. 8.

Erklärung einer längligten Raute.



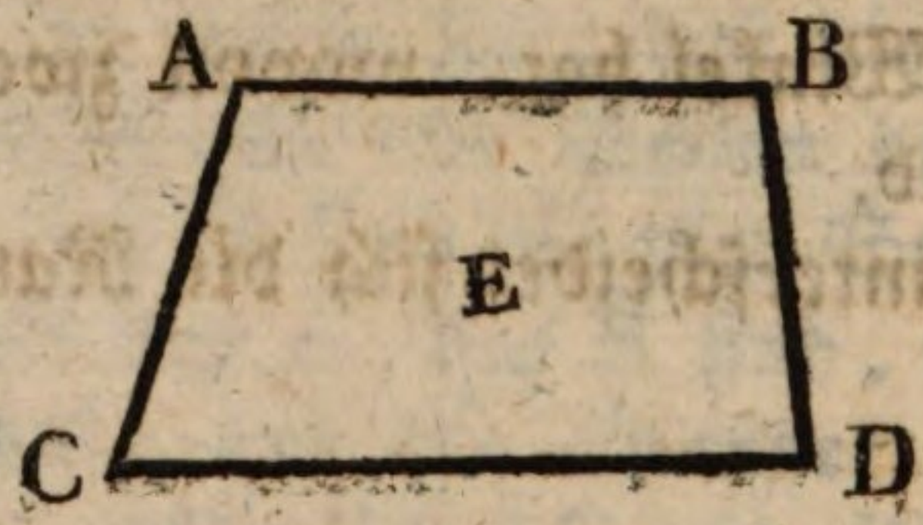
Die Figur D hier kommt mit der Figur C des vorigen Paragraphs darin überein, daß sie eben so wie diese vier schiefe Winkel hat; sie unterscheidet

sich aber von ihr dadurch, daß nicht alle ihre Seiten gleich lang sind; sie hat zwey lange und zwey kurze Seiten, deren die zwey erstern und die zwey letztern eine gleiche Länge haben. So eine Figur heißt eine längligte Raute, oder mit einem fremden Kunstausdrucke Rhomboides. Eine längligte Raute, oder ein Rhomboides ist also ein Viereck mit zwey langen und zwey kurzen Seiten, wovon je zwey und zwey einander gleich sind, und welches lauter schiefe Winkel hat.

Wodurch unterscheidet sich die längligte Raute von dem Rechtecke, bey dem auch die zwey kürzern, und die zwey längern Seiten eine gleiche Länge haben?

§. 9.

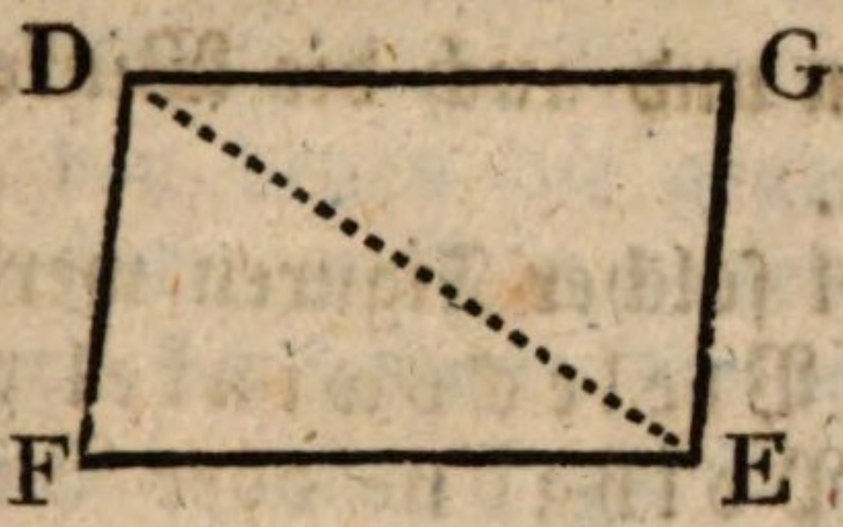
Erklärung der Trapezien.



In diesem Vierecke ist keine Seite der andern gleich. So ein Viereck heißt ein Trapez, oder ungleichseitiges Viereck. Ueberhaupt nennt man alle vierseitigen Figuren, die zu keiner Classe der in den vorhergehenden Paragraphen erklärten vierseitigen Figuren gerechnet werden können, Trapezien.

1. Anmerkung. Einige Geometer machen hier noch einen Unterschied; diejenigen ungleichseitigen Vierecke, in denen zwey Seiten parallel sind, nennen sie Trapezien; die, in welchen keine Seite einer andern weder gleich, noch parall ist, heißen sie Trapezoiden.

2. Anmerkung. Man pflegt die Vierecke mit den beyden Buchstaben zu benennen, die sich an den entgegengesetzten Winkelspitzen befinden. So heißt das oben verzeichnete Viereck AD oder CB. Bey dieser Bezeichnungsart der Vierecke nehme man aber alle Mahl solche Winkelspitzen, die durch keine gerade Linie verbunden sind, weil sonst eine Zweydeutigkeit entstehen könnte. Z. B. Das Viereck

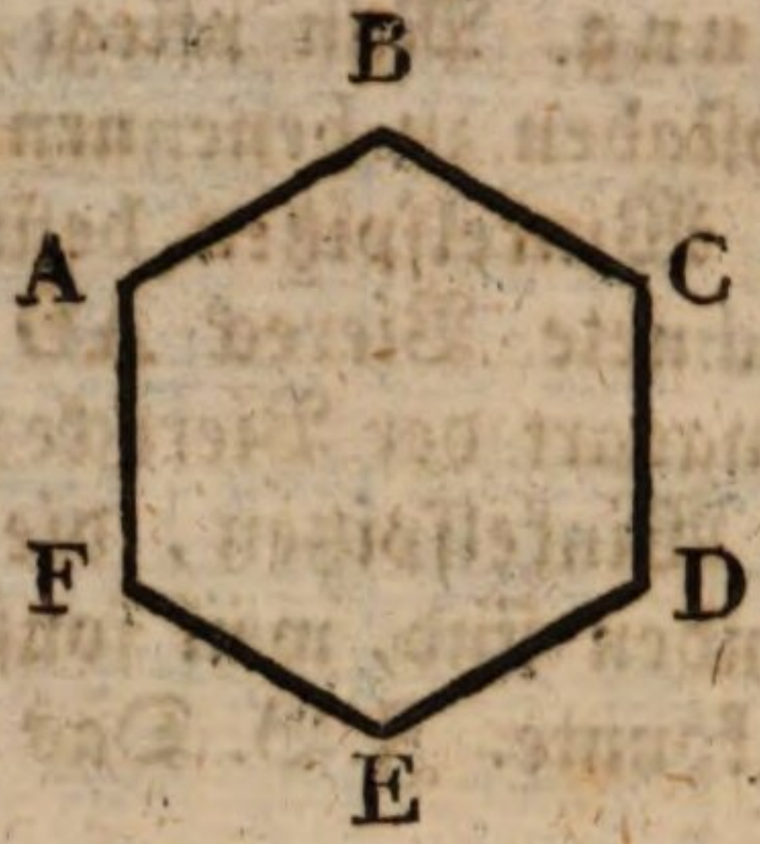


benenne man mit FG, und nicht mit DE, weil von D bis E eine Linie gezogen ist, die auch DE heißt, wo man also nicht wüßte, ob durch DE das Viereck oder die von D bis E gezogene Linie zu verstehen sey.

§. 10.

Erklärung der Polygone oder Vielecke.

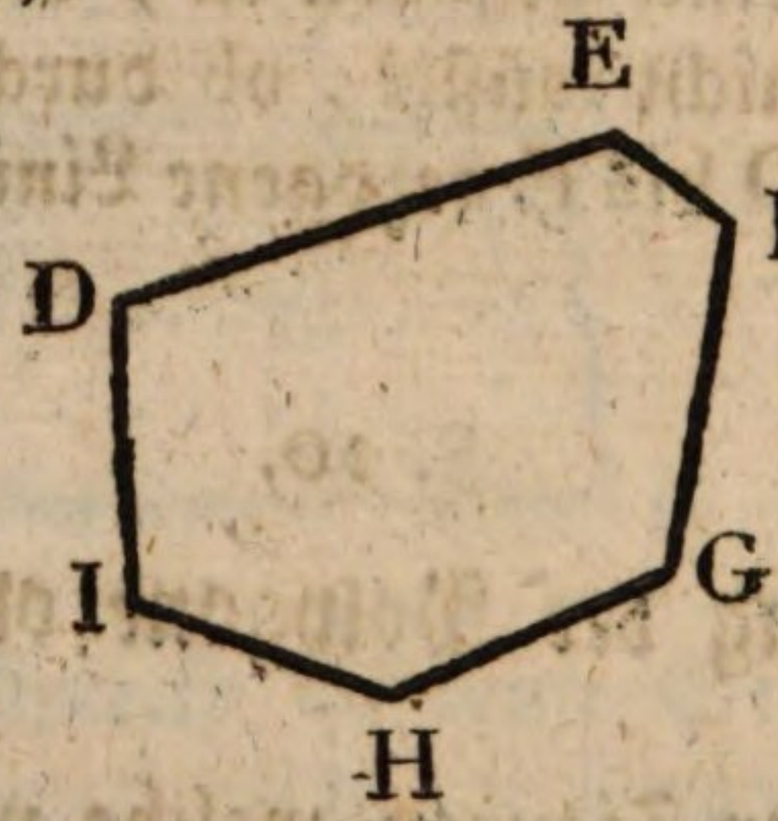
Alle übrigen Figuren, welche mehr als vier Seiten haben, werden Polygone oder Vielecke genannt; insbesondere Fünfecke, wenn sie fünf, Sechsecke, wenn sie sechs Seiten haben u. s. w. Und sind alle Seiten und Winkel einander gleich, so heißen sie reguläre (regelmäßige) Vielecke. So ist z. B. das Sechseck ABCDEF ein reguläres Sechseck;



denn die Seiten und auch die Winkel desselben sind einander gleich.

Die Winkel solcher Figuren werden Polygonwinkel, d. i. Vielecks winkel genannt; und die Seiten heißen Polygon- oder Vielecksseiten.

Sind aber die Seiten und Winkel eines Vieleckes einander nicht gleich, wie z. B. in dem Vielecke DEFGHI,



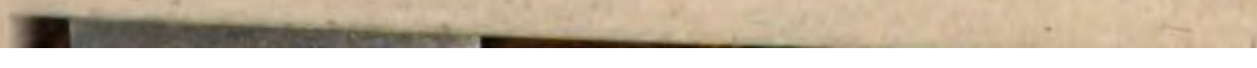
so nennt man eine solche Figur ein irreguläres (unregelmäßiges) Vieleck.

Vielecke mit gleich viel Seiten heißen gleichnahmigt.

§. 11.

Erklärung eines Parallelogramms.

Parallel- oder gleichlaufende Linien sind solche Linien, die überall in allen ihren Puncten



gleich weit von einander abstehen (Erst. Abschn. §. 5.). In welchen Figuren können nun solche gleichlaufende Linien vorkommen? Daß in einem Dreyecke keine Parallellinien seyn können, ist offenbar; denn in einem jeden Dreyecke hat jede Linie eine Neigung gegen die andere, und bildet mit ihr einen Winkel; folglich kann in einem Dreyecke keine Linie zur andern parallel seyn. Wohl aber kann dieses bey Vierecken Statt finden. Insbesondere findet dieses bey den Quadraten, Rechtecken, Rauten und längligten Rauten Statt, bey denen die gegenüber stehenden Seiten parallel sind; weil in diesen Figuren, wie es ihr Begriff mit sich bringt, die gegenüber stehenden Linien überall in allen ihren Puncten einen gleichen Abstand haben.

Ein solches Viereck nun, bey dem jede zwey einander gegenüber stehenden Seiten parallel sind, heißt ein Parallelogramm (ein gleichlaufendes Viereck). Ein Parallelogramm ist also ~~ein~~ solches Viereck, dessen gegenüber liegende Seiten gleichlaufend (parallel) sind.

§. 12.

Erklärung der Diagonallinie.

Eine gerade Linie, die innerhalb eines Viereckes oder Parallelogramms, von einem Winkel bis zu dem andern gegenüber stehenden Winkel gezogen wird, wie hier die Linie AD,

heißt eine Diagonallinie.

Anmerkung. Man bedient sich der Diagonallinien, um dadurch, wie wir weiter unten sehen werden, eine Figur abzutheilen.

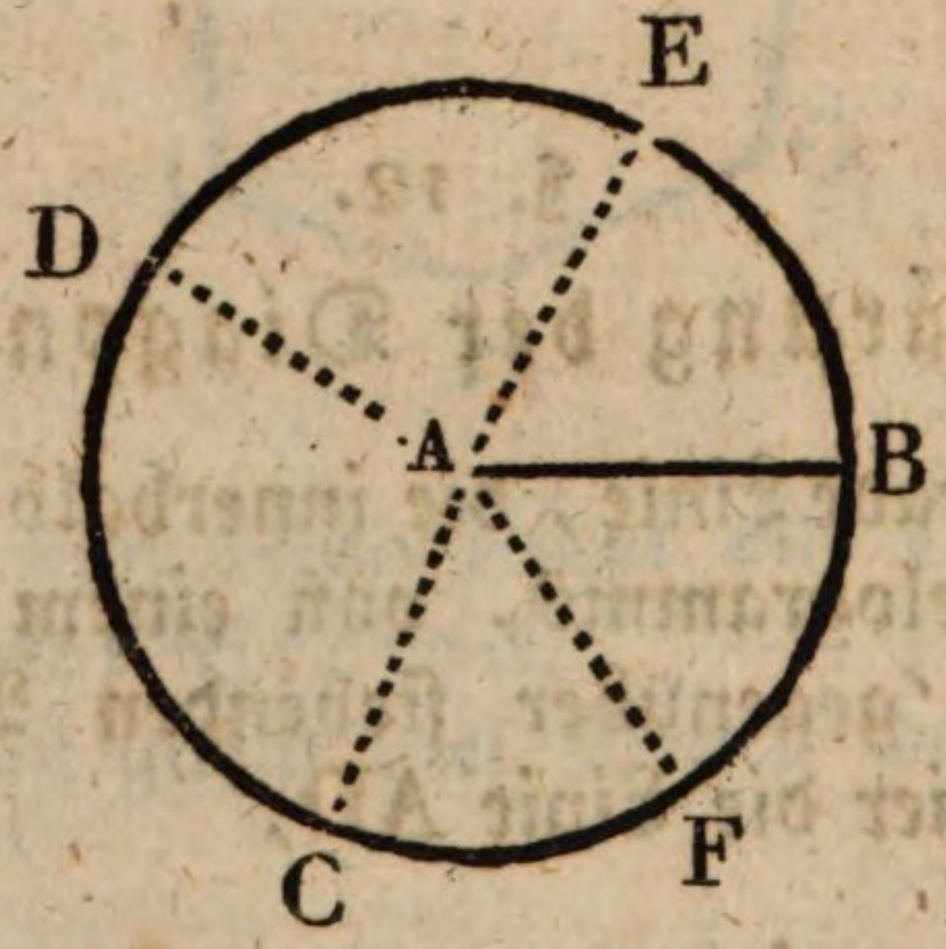
II.

Von der Kreislinie.

§. 1.

Erklärung des Kreises oder Zirkels.

Setzen wir, diese gerade Linie A———B bewege sich um den stillstehenden Endpunct A so lange herum, bis der andere Endpunct B wieder in seine erste Lage kommt, so wird dadurch eine krumme Linie beschrieben, wie folgt:



Wenn wir nun die Entfernungen von dem festliegenden Puncte A bis zu jedem Puncte der krummen Linie EBFCD mit einander vergleichen, als AF, AC, AD, AE u. s. w., so haben diese Entfer-

nungen eine gleiche Länge. Eine so entstandene krumme Linie, welche in allen ihren Puncten gleich weit vom festliegenden Puncte, hier A, entfernt ist, heißt eine Kreis- oder Zirkellinie, oder schlechtweg ein Zirkel. Eine Zirkel- oder Kreislinie, oder ein Zirkel ist also eine solche krumme Linie, welche so um einen festen Punct herumgeht, daß sie in allen ihren Puncten gleich weit von demselben entfernt ist.

Anmerkung. Das Werkzeug, womit man eine Kreislinie zu beschreiben pflegt, ist der Zirkel. Er besteht, wie bekannt, aus zwey unten spitzig zulaufenden Füßen, die oben in einem Kopfe mit einander verbunden sind, so, daß sie nach Belieben erweitert werden können. Die Güte dieses Werkzeuges hängt von folgenden zwey Eigenschaften ab: 1) müssen die zwey Füße (Schenkel) so zugespitzt seyn, daß sie bey ihrem Schlusse in einen einzigen sehr feinen Punct zusammenlaufen; 2) muß ihre Bewegung bey dem Kopfe sanft und gleichförmig, nicht hüpfend seyn, und die Schenkel müssen sich aus der Lage, in die sie ein Mahl gebracht sind, nicht leicht wieder verrücken. Es ist gut, wenn der Zirkel die Einrichtung hat, daß die gemachte Oeffnung der Schenkel vermittelst eines Schlüssels am Kopfe fest geschraubt werden kann.

§. 2.

Erklärung des Umkreises, des Mittelpunctes, des Halb- und Durchmessers eines Kreises.

Die krumme Linie, welche die Zirkelfläche einschließt, heißt der Umkreis oder die Peripherie. Der festliegende Punct, hier A, heißt, weil er von allen Puncten der Peripherie gleiche Entfernung hat, und also in der Mitte liegt, der Mittelpunct, oder auch das Centrum des Zirkels.

Die gerade Linie, hier BC, welche von irgend einem Puncte in der Zirkellinie durch den Mittelpunct zum entgegenstehenden Puncte mißt, durchmißt, führt den Nahmen Durchmesser, oder Diameter des Zirkels. Der Durchmesser eines Zirkels ist also eine solche gerade Linie, die von einem Puncte der Peripherie zu dem andern gegenüber stehenden Puncte so gezogen ist, daß sie durch den Mittelpunct geht.

Die Linie AC aber, welche von irgend einem Puncte in der Zirkellinie nur zum Mittelpuncte geht, folglich nur halb so lang, als der Diameter ist, wird Halbmesser, oder auch Radius des Zirkels genannt. Der Halbmesser ist also die gerade Linie, welche vom Mittelpuncte bis zu irgend einem Puncte in der Peripherie geht.

§. 3.

Grundsatz.

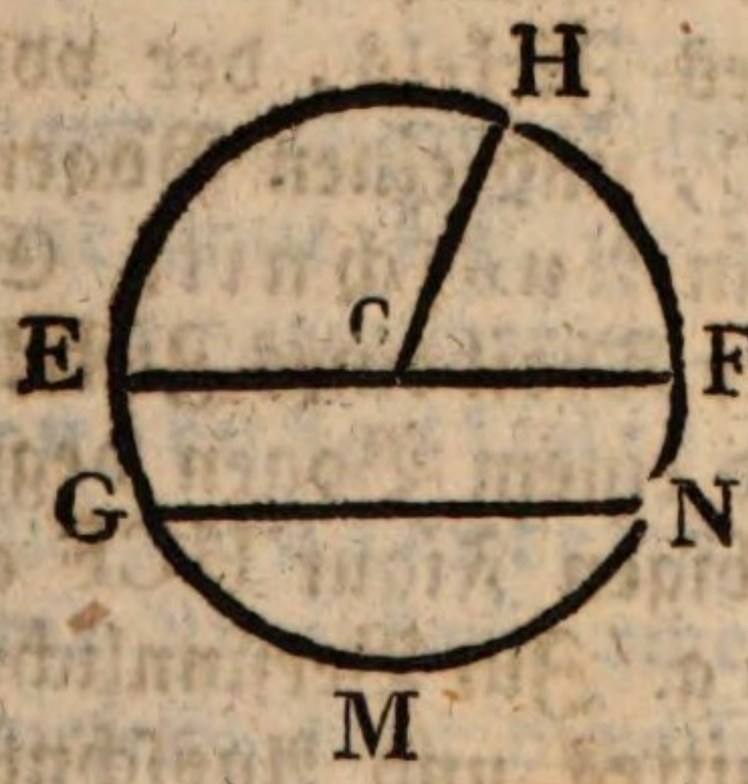
Alle Radien eines und des nähmlichen Zirkels sind einander gleich, haben gleiche Länge.

Da, wie es der Begriff eines Zirkels mit sich bringt (§. 1.), alle Puncte der Peripherie eines Zirkels gleich weit von dem Mittelpuncte abstehen; so müssen also nothwendig alle geraden Linien, die in einem und demselben Zirkel von was immer für Puncten der Peripherie zum Mittelpuncte gezogen werden, gleich lang seyn; derley Linien aber heißen Radien (§. 2.); folglich sind alle Radien eines und des nähmlichen Zirkels einander gleich. So sind z.B. die §. 1. verzeichneten Radien AC, AD, AE, AB, AF gleich groß.

Zusatz. Da ein Durchmesser aus zwey Radien besteht, so sind auch die Durchmesser eines und des nähmlichen Kreises einander gleich. (1. Th. §. 102. 1.).

§. 4.

Erklärung der Sehne, des Bogens, des Abschnittes und des Ausschnittes eines Kreises.



Die geraden Linien EF und GN in dem bengezeichneten Kreise sind von einer solchen Beschaffen-

heit, daß beyde von einem Puncte der Peripherie bis zu einem andern Puncte derselben gehen. Jedoch sind sie von ungleicher Länge. Die Linie EF geht durch den Mittelpunct C, und ist größer als die Linie GN, welche nicht durch den Mittelpunct geht. Die Linie EF heißt Durchmesser (§. 2.); die Linie GN aber wird Sehne (Chorde) genannt. Eine Sehne ist also eine solche gerade Linie im Kreise, die von einem Puncte der Peripherie bis zu einem andern Puncte derselben geht, ohne das Centrum zu durchschneiden.

Durch die in dem obigen Kreise gezogenen Linien wird, wie wir sehen, die Peripherie in mehrere Stücke getheilt, als: in HF, FN, NMG, EG, EH. So ein Stück oder Theil der Peripherie eines Zirkels nun heißt ein Bogen. Ein Bogen wird also jeder Theil, jedes Stück des Umkreises genannt. So sind z. B. HF, FN, NMG, GE und EH lauter Bögen.

Durch die Sehne GN wird ein Theil der Zirkelfläche abgeschnitten, nähmlich GNM. Man nennt so einen Theil des Zirkels, der durch eine Sehne abgeschnitten wird, einen Abschnitt. Ein Abschnitt ist also ein Theil des Zirkels, der durch eine Sehne und einen Bogen begränzt ist.

Der Theil des Zirkels, der von zwey Radien, als: HC und FC, und einen Bogen, als: HF begränzt ist, heißt ein Ausschnitt. Ein Ausschnitt ist also ein solcher Theil eines Zirkels, der von zwey Halbmessern und einem Bogen begränzt wird. So ist z. B. in der obigen Figur HCF ein Ausschnitt.

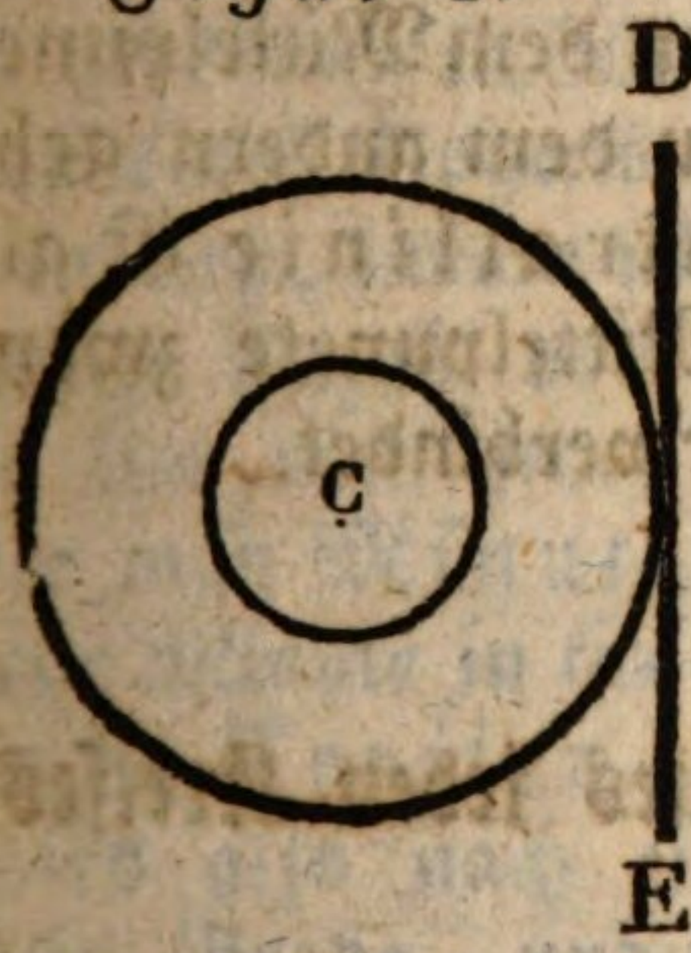
Anmerkung. Zur Versinnlichung des Begriffes eines Abschnittes und Ausschnittes wollen wir eine Kässcheibe zum Beyspiele annehmen, die, wenn ihre Dicke weggedacht wird, als ein (obschon unvoll-

kommener) Kreis gelten kann. Schneidet man nun ein Stück von einer Kässcheibe so weg, daß der Schnitt unter dem Mittelpuncte in gerader Richtung gemacht wird; so entsteht auf solche Art ein Abschnitt. Macht man aber in die Kässcheibe zwey schiefe aber doch gerade Einschnitte, die so beschaffen sind, daß sie sich in dem Mittelpuncte vereinigen; so erhält man hierdurch einen Ausschnitt. Wie entsteht also ein Abschnitt, und wie ein Ausschnitt? Was ist zwischen beyden für ein Unterschied?

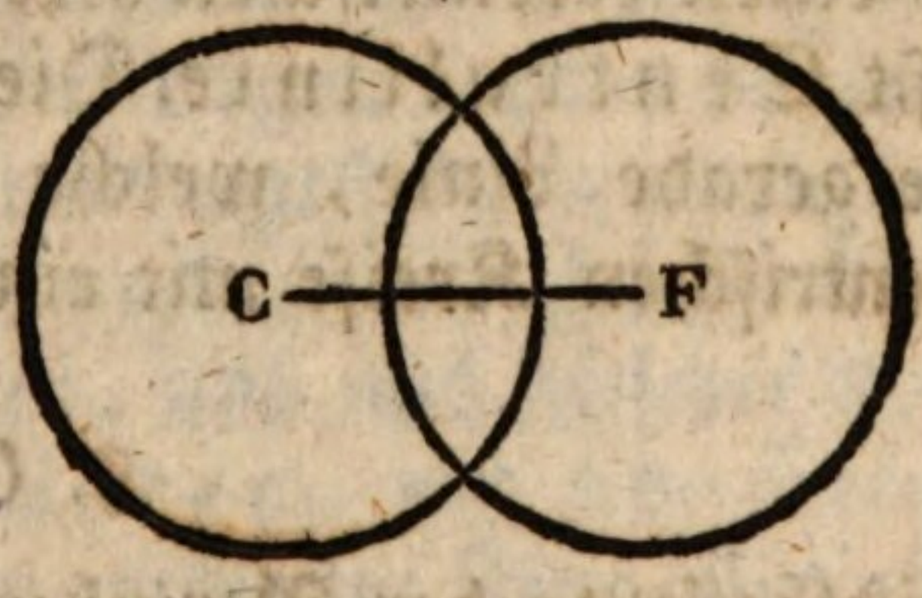
§. 5.

Erklärung der Tangente, der concentrischen und eccentrischen Zirkel und der Centrallinie.

Figur 1.



Figur 2.



Bey der Figur 1. befindet sich an dem äußern Kreise eine gerade Linie DE, welche den Kreis berührt, ohne ihn zu durchscheiden. Eine solche Linie heißt eine Berührungslinie oder Tangente des Kreises. Die Tangente ist also jene gerade Linie, welche die Peripherie eines Zirkels so berührt, daß sie dieselbe nicht durchschneidet.

Die zwey Kreise der Figur 1. haben einen und denselben Mittelpunct C. Man nennt derley Kreise

concentrische Kreise. Concentrische Kreise sind also solche Kreise, welche einen gemeinschaftlichen Mittelpunct haben. So sind z. B. an einem Uhrenblatte zwey und oft mehrere concentrische Kreise.

Zusatz. Von zwey concentrischen Kreisen ist jederzeit einer nothwendig kleiner, als der andere; denn sie haben einen gemeinschaftlichen Mittelpunct, und der eine Kreis befindet sich in dem andern; dieser ist nun offenbar kleiner als derjenige concentrische Kreis, in dem er sich befindet; folglich ist von zwey concentrischen Kreisen einer jederzeit kleiner, als der andere.

Figur 2. enthält zwey Kreise, deren jeder einen eigenen Mittelpunct hat. Man nennt solche Kreise eccentrisch. Eccentrische Kreise sind also solche Kreise, die verschiedene Mittelpuncte haben.

Die gerade Linie DE, die von dem Mittelpuncte des einen eccentrischen Kreises zu dem andern geht, heißt Centrallinie. Die Centrallinie ist also jene gerade Linie, welche die Mittelpuncte zweyer eccentrischen Kreise mit einander verbindet.

§. 6.

Eintheilung der Peripherie eines jeden Kreises.

Wenn wir die Peripherie eines Kreises, wie in der beygezeichneten Figur geschehen ist, in zehn

gleiche Theile theilen; so erkennen wir dann, daß jedes Stück des in zehn Theile getheilten Kreises der zehnte Theil des ganzen Kreises ist. Nehmen wir mehrere Theile zusammen, z. B. fünf Theile, und vergleichen wir diese mit der ganzen Peripherie; so sehen wir, daß diese fünf Theile zusammen die Hälfte vom Ganzen sind. Durch diese Eintheilung der Peripherie in zehn gleiche Theile erlangen wir also den Vortheil, daß wir von jedem Stücke und auch von dem Verhältnisse eines Theiles, oder mehrer Theile zur ganzen Peripherie eine deutliche Vorstellung bekommen.

Man ist darüber einig geworden, den Umfang (die Peripherie) eines jeden Kreises, er mag groß oder klein seyn, in 360 gleiche Theile, welche man Grade nennt, einzutheilen. Da sich aber durch diese Eintheilung in 360 Grade nicht immer das Verhältniß eines Bogens zum Umfange genau genug angeben ließ, indem nicht jeder Bogen gerade durch eine ganze Anzahl von Graden dargestellt werden kann; so hat man jeden Grad noch in 60 gleiche Theile, die man Minuten nennt, und aus gleicher Absicht jede Minute in 60 Secunden, und jede Secunde in 60 Terzien u. s. w. getheilt. Jede Peripherie wird also nach einer allgemeinen Uebereinkunft in 360 Grade, und jeder Grad in 60 Minuten, jede Minute in 60 Secunden u. s. w. getheilt. Man pflegt die Grade durch dieses Zeichen °, die Minuten durch dieses ′, die Secunden auf diese Weise ″ kurz auszudrücken. Z. B. für 24 Grade, 4 Minuten, 20 Secunden und 9 Terzien schreibt man kurz: 24°4′20″9‴.

Anmerkung. Diese Eintheilung der Peripherie eines jeden Zirkels in 360 gleiche Theile ist deßwegen angenommen worden, weil diese Zahl sehr bequem zu berechnen ist; denn sie läßt sich durch

mehrere Zahlen auftheilen, ohne daß ein Rest übrig bleibt, als: durch 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12 u. s. w.

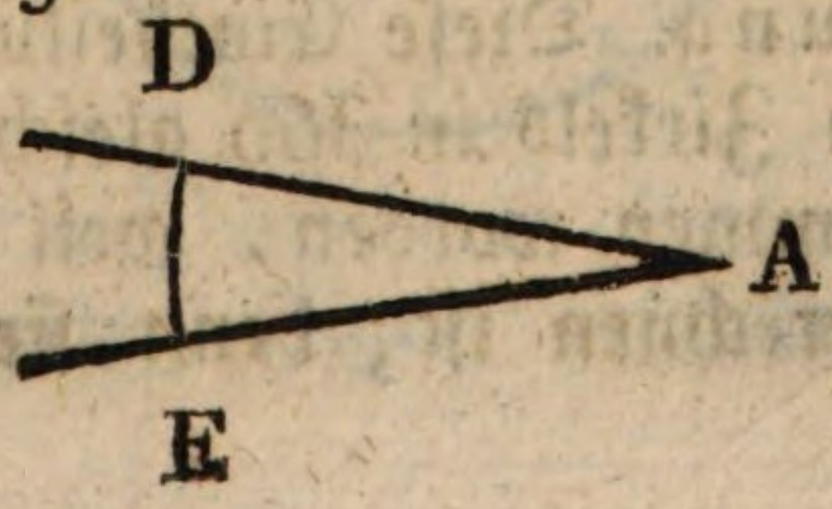
1. Folgesatz. Die Grade, Minuten, Secunden u. s. w. eines größern Kreises sind größer, als jene eines kleinern Zirkels. Eben dieses gilt auch von den Minuten, Secunden u. s. w.

2. Folgesatz. Die halbe Peripherie oder $\frac{P}{2}$ ist immer $= 180°$; denn $\frac{360}{2} = 180$, und der vierte Theil der Peripherie eines Kreises, den man Quadrant nennt, beträgt $90°$, oder $\frac{P}{4} = 90°$; denn $\frac{360}{4} = 90$.

§. 7.

Wie man einen Winkel mißt.

Die Größe eines Winkels hängt einzig und allein von der Neigung seiner Schenkel ab (Zweyt. Abschn. §. 6.). Je nachdem diese groß oder klein ist, ist auch der Winkel groß oder klein. Um nun bestimmen zu können, wie groß die Neigung eines Winkels ist, pflegt man von seinem Scheitelpuncte aus zwischen seinen Schenkeln einen Bogen zu ziehen. Dieses geschieht durch Hülfe des Zirkels. Den einen Fuß davon setzt man an die Spitze des zu messenden Winkels, und mit dem andern zieht man nach beliebiger Oeffnung zwischen den beyden Schenkeln einen Bogen, wie hier folgt:

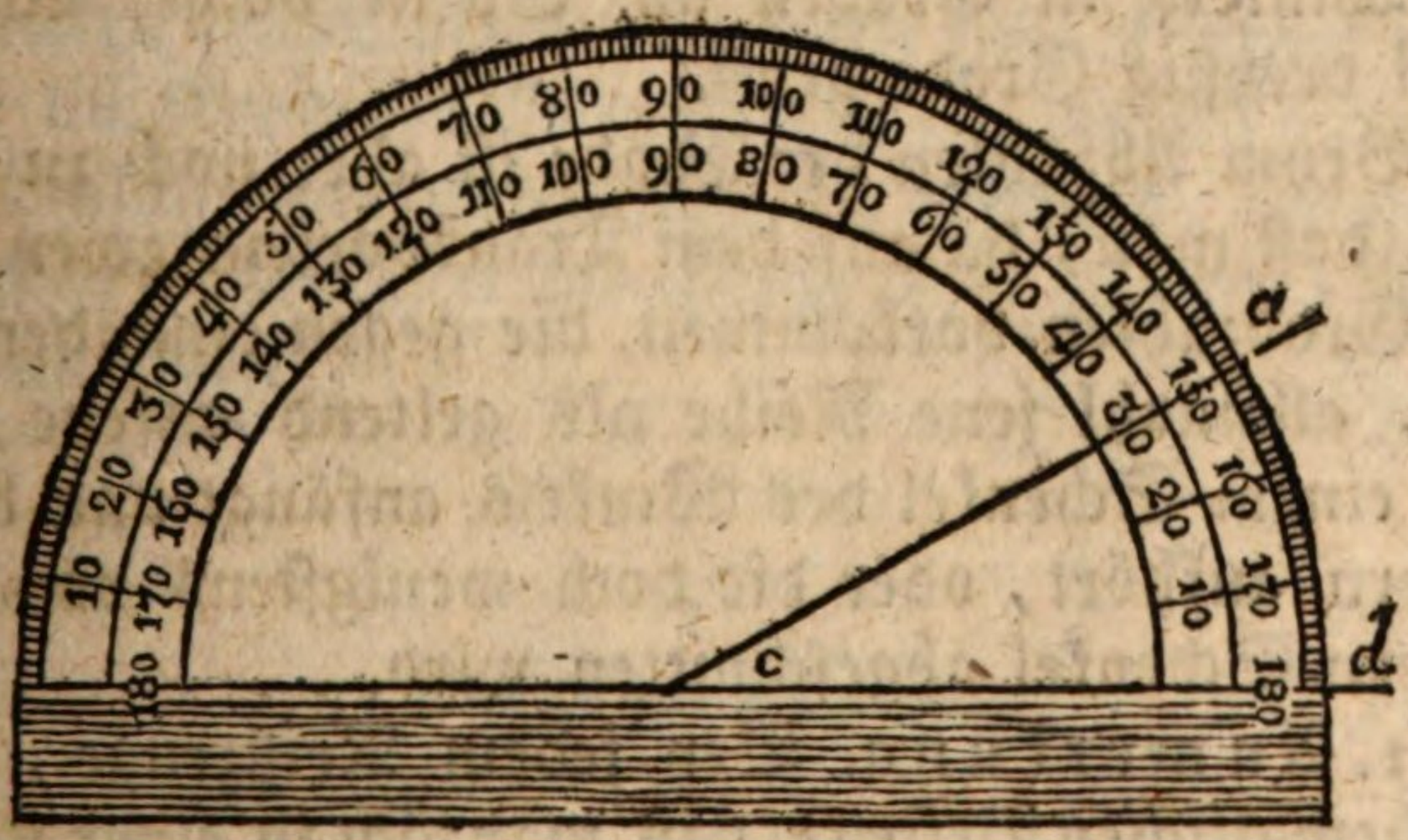


So viel nun dieser Bogen, hier DE, Grade hat, so groß, sagt man, sey auch der Winkel. Wenn z.B. der Bogen, den man zwischen den Schenkeln des Winkels gezogen hat, der vierte Theil von seiner ganzen Peripherie ist, so sagt man, der Winkel sey 90° groß.

Um die Größe des zwischen den Schenkeln gezogenen Bogens zu bestimmen, müßte man denselben in einen ganzen Kreis verwandeln, und dann diesen in 360° eintheilen, wo es sich dann ergeben würde, wie viel Grade auf den zwischen den Schenkeln des Winkels befindlichen Bogen fallen, welche das Maß des Winkels sind. Allein, um sich dieser Mühe zu überheben, hat man ein eigenes Werkzeug zur Ausmessung der Winkel erfunden, welches den Nahmen Winkelmesser oder Transporteur führt.

§. 8.

Beschreibung des Winkelmessers.



Der Winkelmesser oder der Transporteur ist ein solches Werkzeug, welches aus einem (in seine 180°, auch noch in kleinere Theile, wirklich eingetheilten) halben Zirkel besteht. Es wird gewöhnlich aus Mes-

sing (auch) aus reinem Horn) verfertiget, und anstatt des Diameters des halben Zirkels, ein ordentliches Linial angebracht. Die innere Seite dieses Linials ist der Diameter, und an demselben ist das Centrum bemerkt. Die Güte dieses Werkzeuges hängt fast ganz von der Größe ab; denn je größer es ist, desto genauer kann es eingetheilt werden.

Will man mit diesem Werkzeuge einen Winkel messen, z. B. den Winkel acd, so lege man den Mittelpunct des Transporteurs auf den Scheitel des Winkels c, und bringe den Winkelmesser noch in die Lage, daß ein Schenkel des Winkels, nähmlich c d mit dem Halbmesser des Instruments zusammen fällt, so wird der andere Schenkel c a (welcher, wenn er zu kurz ist, verlängert werden muß) durch den getheilten Rand gehen. Der Theil des Randes nun, der zwischen den beyden Schenkeln liegt, ist der dem Winkel zugehörige Bogen, und die Anzahl der Theile (Grade), die sich auf diesem Theile des Randes befinden und leicht abgelesen werden, zeigen die Größe des Winkels in Graden an. So ist obiger Winkel a c d dreyßig Grade groß.

Beym Abzählen der Grade ist aber noch zu merken, daß man, da auf dem Transporteur zwey Reihen Gradzahlen vorkommen, die gegen einander laufen, allemahl jene Reihe als geltend ansehe, die bey einem Schenkel des Winkels anfängt und beym andern aufhört, oder die doch wenigstens von dem andern Schenkel abgeschnitten wird.

1. Anmerkung. Bey jedem Reißzeuge, oder mathematischen Bestecke, das man sich in einer Kunsthandlung kaufen kann, befindet sich ein Winkelmesser.

2. Anmerkung. Zur Messung eines Winkels, der sich auf dem Felde befindet, bedient man sich eines andern Werkzeuges, welches Astrolabium

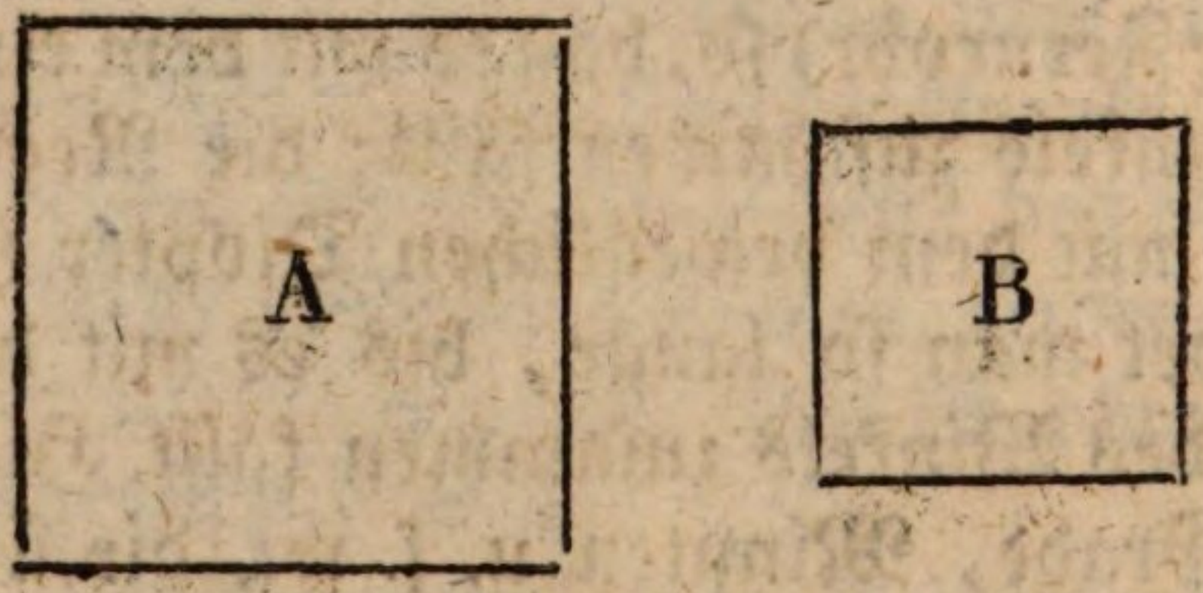
genannt wird. Dieses Instrument besteht aus einem messingenen Zirkelringe, etwa von einem Schuhe im Durchmesser, der genau in 360 gleiche Theile oder Grade abgetheilt ist. Auf diesem Ringe sind zwey Dioptren (oder auch Fernröhre) angebracht, wovon das eine fest und unbeweglich durch das Centrum des eingetheilten Kreises, und durch den 180sten Grad geht. Das andere ist um das Centrum des Werkzeuges an einem Linial beweglich. Dieser also eingerichtete Zirkel befindet sich auf einem mit drey Füßen versehenen Fußgestelle. Will man nun auf dem Felde einen Winkel messen, so stellet man die Winkelscheibe über die Spitze des Winkels in horizontaler Lage so auf, daß das Centrum derselben ober dem Scheitelpuncte zu stehen kommt. Dann richtet man das unbewegliche Diopter (oder das unbewegliche Fernrohr) so, daß es mit dem einen Schenkel des Winkels zusammen fällt; die Regel (das Linial) aber mit dem beweglichen Diopter (oder Fernrohr) drehet man so lange, bis es mit dem andern Schenkel des Winkels zusammen fällt. Hierauf zählt man die Grade, Minuten u. s. w., die sich zwischen den Linialen der zwey Dioptern befinden, welche zusammen genommen die Größe des gesuchten Winkels anzeigen.

Vierter Abschnitt.

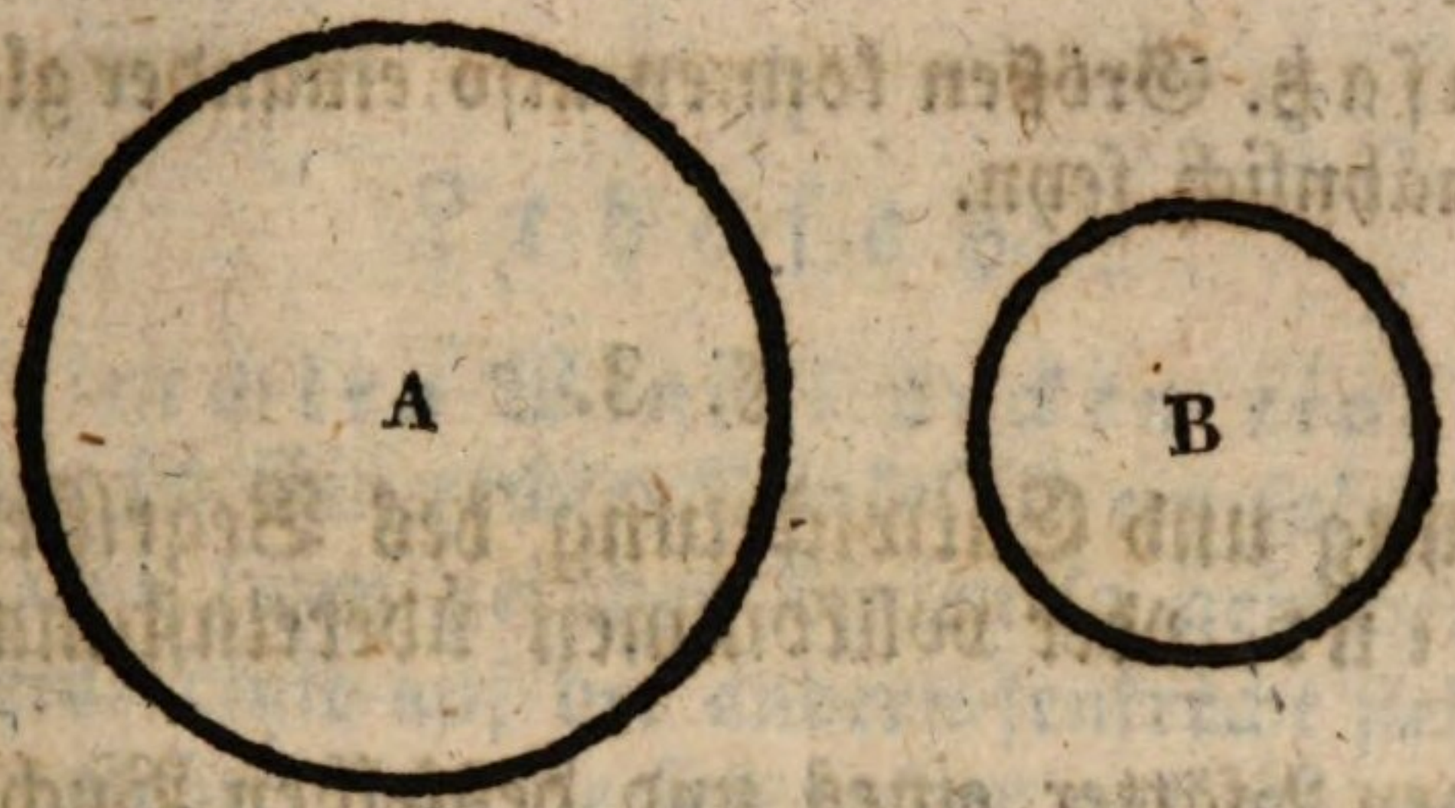
Lehrsätze zur Bestimmung der Größe der Winkel.

§. 1.

Erklärung und Entwickelung des Begriffes ähnlich.



Wenn wir die hier verzeichneten zwey Figuren A und B mit einander vergleichen, so erhellet, daß jede derselben vier rechte Winkel und vier Seiten hat, welche letztern so beschaffen sind, daß sie in jeder Figur gleiche Länge haben. Der Unterschied, der zwischen diesen beyden Figuren obwaltet, besteht bloß darin, daß sie von ungleicher Größe sind; denn A ist offenbar größer, als B. Beyde diese Figuren kommen also in allen Stücken mit einander überein, nur nicht in der Größe. Wir sagen darum, beyde diese Figuren seyen einander ähnlich.



Auch die zwey Kreise A und B, da sie in allen Stücken übereinstimmen, nur nicht in der Größe, sind einander ähnlich.

Größen sind also sich ähnlich, wenn sie in allen Stücken mit einander übereinstimmen; nur nicht in ihrer Größe.

§. 2.

Erklärung und Entwickelung des Begriffes gleich.

Wenn zwey Felder sind, deren das eine länger ist, als das andere, dieses aber um so viel breiter ist, als es von dem andern an Länge übertroffen wird; so sagt man, beyde Felder seyen, obschon sie eine verschiedene Gestalt haben, einander gleich. So auch, wenn ich ein Stück Wachs, welches ungefähr eine kugelförmige Gestalt hat, länglicht drücke, so hat es zwar jetzt eine andere Gestalt, als es vorher hatte, aber doch ist seine Größe noch dieselbe. Dinge nun, welche in der Gestalt verschieden, aber in der Größe übereinstimmend sind, sind gleich. Damit man also von zwey oder mehrern Größen sagen kann, sie seyen einander gleich; so müssen sie in der Größe mit einander übereinkommen.

Zusatz. Größen können also einander gleich und doch unähnlich seyn.

§. 3.

Erklärung und Entwickelung des Begriffes congruent, oder vollkommen übereinstimmend.

Zwey Blätter eines und desselben Buches, haben gleiche Gestalt und gleiche Größe; sie sind einander ähnlich und gleich. Größen nun, die einander ähnlich und gleich sind, heißen congruent, oder vollkommen übereinstimmend.

Dinge sind also congruent, wenn sie weder in der Größe noch in der Gestalt unterschieden sind.

Anmerkung. Die Congruenz kann, wie es für sich einleuchtend ist, nur bey continuirlichen, oder was eines ist, bey stetigen Größen Statt haben.

§. 4.

Grundsätze die Congruenz betreffend.

1) Linien, Winkel und Figuren, welche auf einander passen, oder einander decken (congruunt), sind sich gleich und ähnlich. Und umgekehrt:

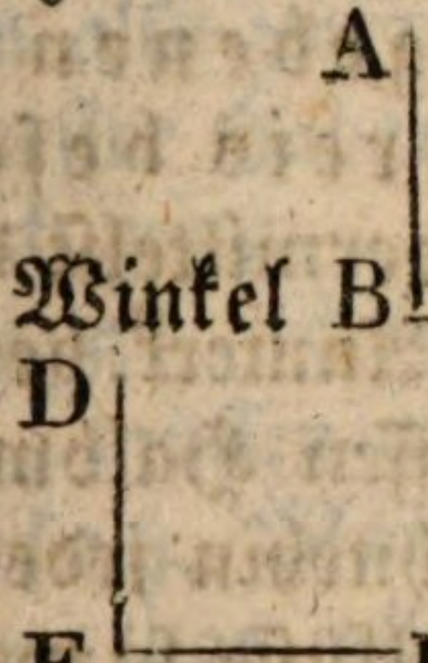
2) Linien, Winkel und Figuren, die einander gleich und ähnlich sind, decken einander, d. h. passen genau auf einander, fallen in ihren Gränzen zusammen.

Anmerkung. Zur Gleichheit und Congruenz zweyer oder mehrerer Winkel wird nur die Gleichheit und Congruenz ihrer Neigungen, nicht aber die Gleichheit ihrer Schenkel erfordert (3. Abschn. §. 6.).

§. 5.
Lehrsatz.

Alle rechten Winkel decken einander.

Beweis. Ein rechter Winkel ist ein solcher Winkel, der von zwey geraden Linien so gebildet wird, daß die eine Linie auf der andern senkrecht steht, d. i. so gerade steht, daß sie sich weder auf die eine noch auf die andere Seite neiget. Wird nun ein rechter Winkel auf einen andern ebenfalls rechten Winkel gelegt, so müssen sie nothwendig zusammen fallen; denn wenn z. B. der rechte



gelegt wird, so werden erstlich die zwey Grundlinien BC und EF, da sie gerade Linien sind, zusammenfallen, und zweytens werden auch die Linien AB und DE in einer und derselben Richtung auf einander zu liegen kommen; nur dann würden sie nicht zusammenfallen, wenn die eine Linie schief wäre; da aber beyde Linien gerade (senkrecht) sind, so müssen sie also auf einander passen, und einander decken; folglich decken beyde Winkel einander. Da nun bey allen rechten Winkeln die eine Linie auf der andern senkrecht steht, so müssen also alle rechten Winkel einander decken.

1. Zusatz. Alle rechten Winkel sind also einander gleich.

2. Zusatz. Da alle rechten Winkel einander gleich sind, so können sie als das Maß für die übrigen Winkel dienen.

§. 6.

Grundsatz.

Winkel, die einerley Maß haben, sind einander gleich; denn sie decken sich, wenn man sie auf einander legt, und umgekehrt: Winkel, die einander gleich sind, haben gleiches Maß.

§. 7.

Hetschsatz.

Aus einem jeden gegebenen Puncte und mit einer jeden gegebenen geraden Linie kann man einen Kreis beschreiben.

Anmerkung. Wie man vermittelst des Zirkels (des oben dritt. Abschn. II. §. 1. Anmerk. beschriebenen Werkzeuges) einen Kreis, dessen Halbmesser gegeben ist, beschreiben kann, ist ohnehin jedem bekannt. Man öffnet nähmlich die Zirkelfüße so weit, als der gegebene Halbmesser lang ist; setzt dann den einen Fuß des Zirkels auf der Fläche fest, worauf der Kreis beschrieben werden soll, und den andern Fuß bewegt man so lange herum, bis er wieder auf den vorigen Ort kommt, wo er anfangs gestanden ist.

§. 8.

Lehrsatz.

Alle Kreise, welche gleich lange Halbmesser haben, sind congruent, und eben darum gleich groß.

Beweis. Ein Kreis entsteht, wenn sich eine gerade Linie um einen ihrer Endpuncte so lange herum bewegt, bis sie wieder in sich selbst zurückkehrt; so weit also der andere Endpunct, der sich im Kreise

herum bewegt hat, von dem andern Endpuncte der geraden Linie absteht, eben so weit müssen alle Puncte der Peripherie von dem Mittelpuncte entfernt seyn. Wenn also zwey gerade Linien, die gleich groß sind, einen Zirkel beschreiben, so müssen nothwendig alle Puncte der Peripherie des einen Kreises so weit vom Mittelpuncte abstehen, als die andern Puncte der Peripherie des zweyten Kreises von ihrem Mittelpuncte entfernt sind; folglich, wenn man beyde diese Kreise auf einander legen würde, so würden sie in dem Mittelpuncte und in allen Puncten der Peripherie zusammenfallen, d. h. sie würden sich decken; wenn also zwey oder mehrere Kreise gleich lange Halbmesser haben, so decken sie sich, und sind daher gleich groß.

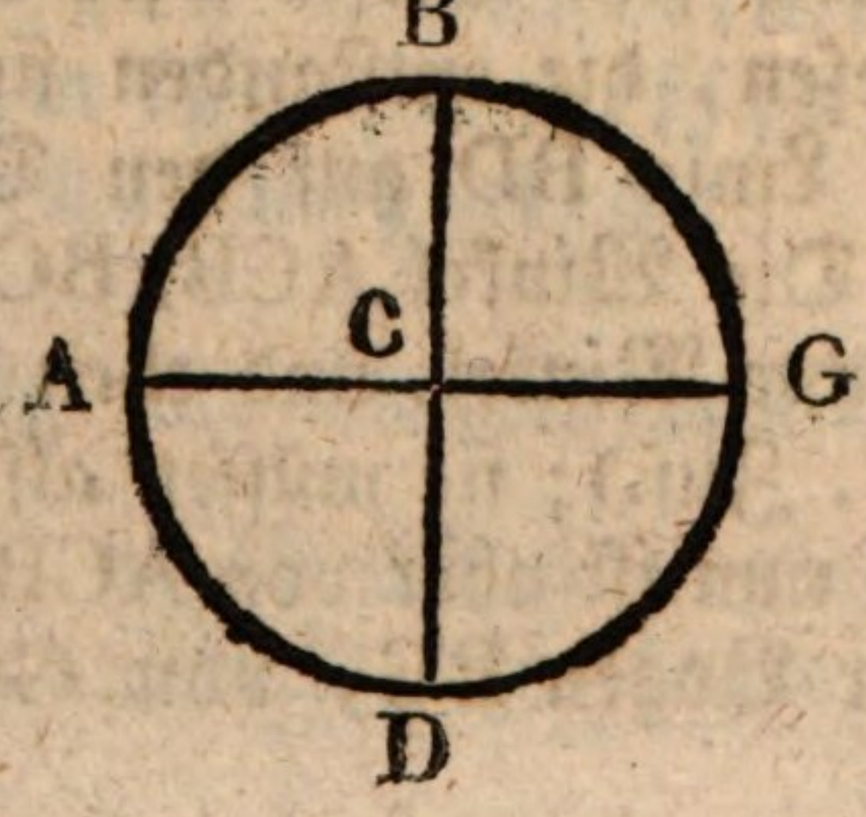
1. Zusatz. Kreise, die gleich groß sind, die sich decken, müssen gleich lange Halbmesser haben.

2. Zusatz. Was jetzt von den Halbmessern gesagt wurde, das gilt offenbar auch von den Durchmessern der Kreise, d. i. alle Kreise, die gleich lange Durchmesser haben, sind congruent, und alle congruente Kreise haben gleiche Durchmesser.

§. 9.

Lehrsatz.

Der Durchmesser theilt jeden Kreis, und auch dessen Peripherie in zwey gleiche Theile.



Beweis. Der erste Theil des Lehrsatzes, welcher aussagt, daß der Durchmesser die ganze Zirkelfläche in zwey gleiche Theile theile, daß also ABG = ADG sey, wird so bewiesen: Wenn die Fläche ADG auf die Fläche ABG so gelegt wird, daß der Punct A in den Punct A, der Punct G in den Punct G, und daß der Mittelpunct in den Mittelpunct fällt; so wird die untere Fläche ADG die obere ABG vollkommen decken; denn setze man, daß die Fläche ADG innerhalb oder außerhalb der Fläche ABG falle, so müßte man annehmen, daß der untere Bogen DAG mit einem größern oder kleinern Halbmesser beschrieben worden sey, als der obere Bogen ABG, was aber nicht wahr ist; folglich muß die untere Fläche die obere decken; also sind beyde Flächen einander gleich (§. 4. 1.); der Durchmesser AG theilt also die ganze Zirkelfläche in zwey gleiche Theile. Da nun der eben geführte Beweis bey jedem Kreise seine Anwendung findet, so kann man also im Allgemeinen sagen: Der Durchmesser theilt einen jeden Kreis in zwey gleiche Theile.

Um den zweyten Theil des obigen Lehrsatzes beweisen zu können, errichte man auf AG und zwar auf den Mittelpunct von B und D eine senkrechte Linie, nähmlich BD. Nun soll bewiesen werden, daß der Durchmesser AG auch die Peripherie ABDG in zwey gleiche Theile theile, daß also der Bogen ABG dem ADG gleich sey. Dieses wird durch die rechten Winkel bewiesen, die entstanden sind, indem man die senkrechte Linie BD auf den Durchmesser AG errichtet hat. Die Winkel ACB, BCG, GCD, DCA sind lauter rechte Winkel, und eben darum einander gleich (§. 5. 1. Zus.); sie müssen also gleiches Maß haben (§. 6.); nun ist aber von ACB der Bogen AB, von BCG der Bogen BG, von GCD der Bogen

GD, und von DCA der Bogen DA das Maß (dritt. Abschn. §. 7.); also ist AB=BG=GD=DA; da nun Gleiches zu Gleichem addirt, gleiche Summen gibt (Einl. §. 8. 1.), so ist also AB+BG=GD+DA; folglich theilt der Durchmesser auch die Peripherie in zwey gleiche Theile.

Folgesätze.

Aus dem vorigen Lehrsatze folgt, 1) daß man über eine gerade Linie einen halben Kreis beschreiben kann, wenn man einen beliebigen Punct auf derselben als den Mittelpunct annimmt.

2) Daß ein rechter Winkel zu seinem Maße 90° enthalte; denn jeder rechte Winkel hat, wie es obige Figur darthut, den vierten Theil der Peripherie, d. i. $\frac{360°}{4}=90°$ zu seinem Maße.

3) Ein stumpfer Winkel muß also mehr, als 90 Grade, und ein spitziger weniger, als 90 Grade enthalten (Zweyt. Abschn. §. 7.).

§. 10.

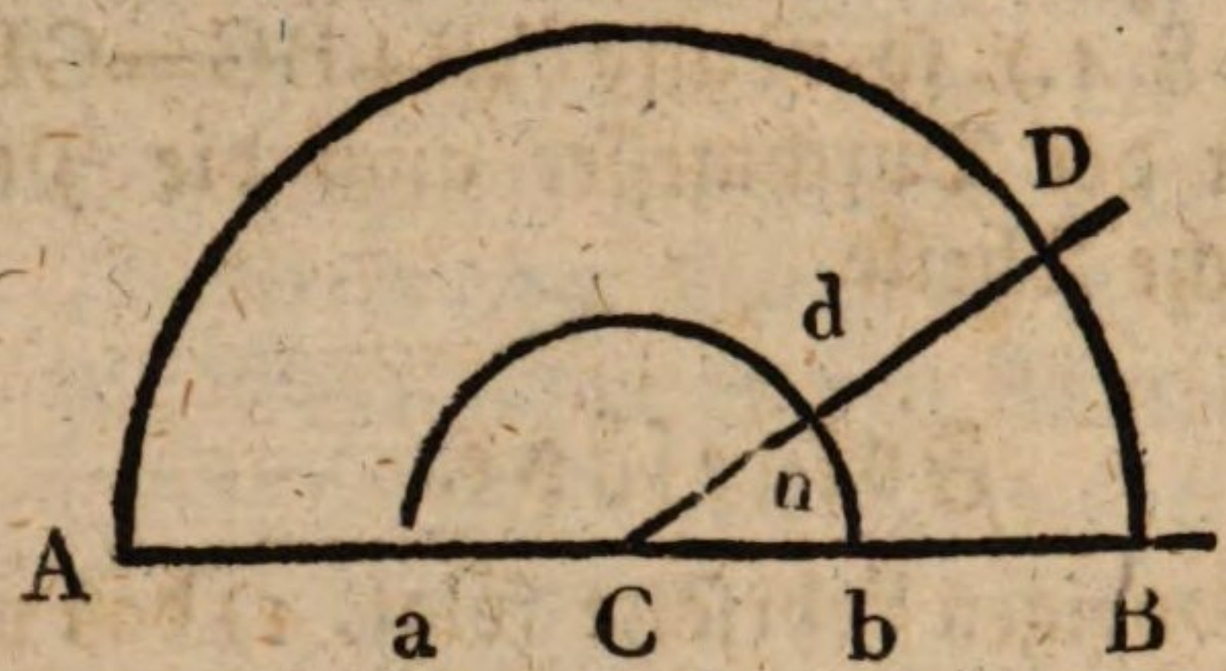
Lehrsatz.

Es ist gleichviel, ob man mit einem größern oder kleinern Radius den Bogen zwischen den Schenkeln eines Winkels zieht, um ihn zu messen, das Maß bleibt immer das nähmliche.

Erläuterung und Beweis des Lehrsatzes.

Es ist einerley, ob ich mit einer großen oder kleinen Oeffnung des Zirkels den Bogen zwischen den

Schenkeln des beygezeichneten Winkels beschreibe, um ihn dadurch zu messen;



denn alle Bögen db und DB sind in Rücksicht auf die Anzahl ihrer Grade einander gleich; darum ist sowohl db, als DB das Maß des Winkels n. Um sich hiervon zu überzeugen, beschreibe man den halben Zirkel der beyden Bögen; man erhält adb und ABD, nun ist DB ein eben so großer Theil von seinem halben Zirkel ADB, und also auch von seinem ganzen Zirkel, als db von dem seinigen adb ist; da nun der große Kreis wie der kleine 360° enthält, so werden auch die Bogenstücke db und DB eine gleiche Anzahl Grade und Minuten haben, nur mit dem Unterschiede, daß die Grade von db kleiner, als die von DB sind (dritt. Abschn. II. §. 6. 1. Folges.). Daran aber liegt nichts; denn man will nur wissen, wie viel Grade der Bogen habe, oder der wievielte Theil er von seinem ganzen Kreise sey. Dieß findet man aber, man mag mit einem größern oder kleinern Radius den Bogen zwischen den Schenkeln des zu messenden Winkels beschreiben. Hiermit ist hoffentlich bewiesen, daß es einerley ist, ob man mit einem größern oder kleinern Radius den Bogen zwischen den Schenkeln eines Winkels zieht, um ihn zu messen.

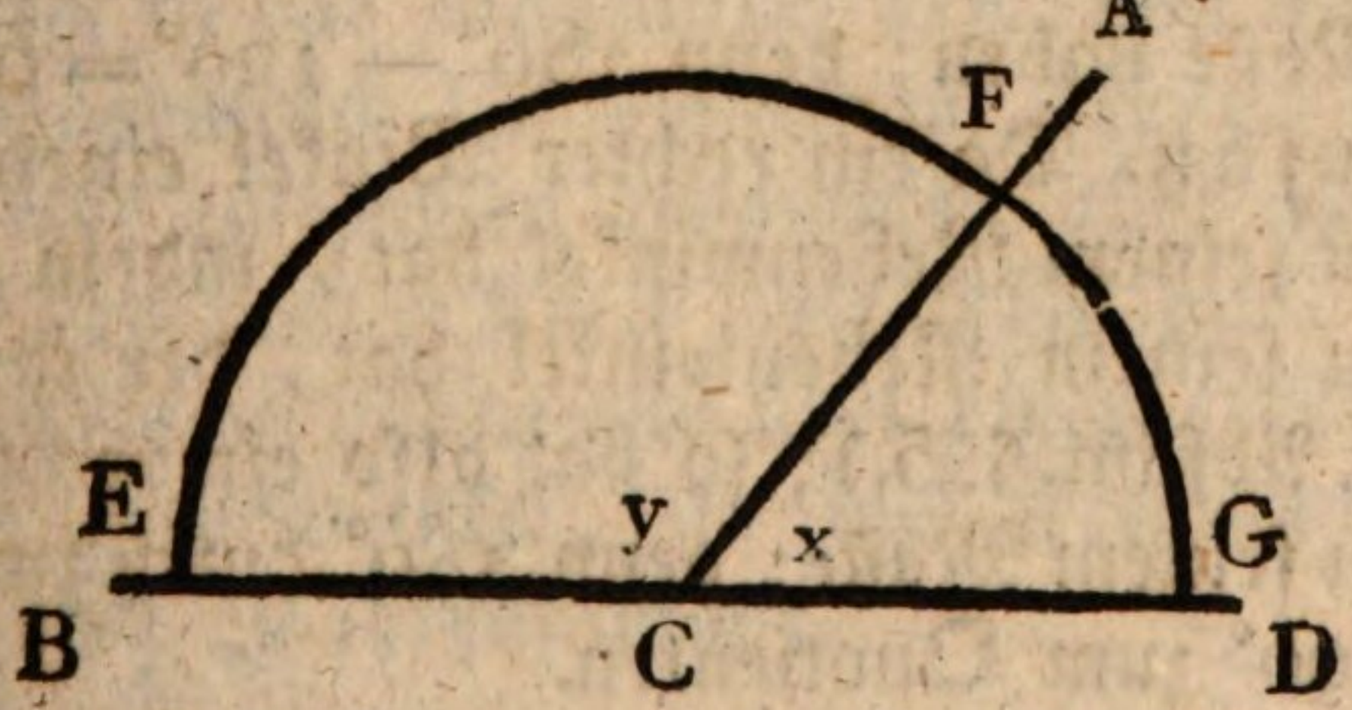
Anmerkung. Man könnte fragen, warum man die Winkel durch Kreisbögen messe? Darum, weil

dieses die Natur eines Winkels mit sich bringt; denn ein Winkel kann entstehen, wenn sich von zwey auf einander liegenden, geraden Linien, die eine von der andern ohne Krümmung hinweg bewegt, doch so, daß sie immer an dem äußersten Puncte, mit der andern Linie im Zusammenhange bleibt. Durch diese Bewegung aber werden offenbar Zirkelbögen beschrieben, wie man dieses an dem Zirkelinstrumente augenscheinlich sieht, wenn man seine zwey Schenkel zusammenlegt, und sie dann nach und nach öffnet, wodurch immer größere Winkel, aber zugleich auch mit den Winkeln Zirkelbögen entstehen, die in dem Maße größer werden, in welchem die Winkel zunehmen; folglich bestimmen die Zirkelbögen die Größe der Winkel, und geben darum das Maß der Winkel.

§. 11.

Lehrsatz.

Zwey Nebenwinkel haben immer 180° zu ihrem Maße.



Beweis. Da zwey Nebenwinkel sich immer über einer geraden Linie befinden, wie es die beygezeichnete Figur ausweiset, bey der sich die zwey Nebenwinkeln y und x über der geraden Linie BD befinden, und da ferner über eine gerade Linie, aus einem in derselben angenommenen Puncte sich ein halber

Kreis beschreiben läßt (§. 9. 1. Zus.), für diesen Punct kann der gemeinschaftliche Scheitelpunct beyder Nebenwinkel angenommen werden, wie in der obigen Figur aus dem gemeinschaftlichen Scheitelpuncte C der beyden Winkel y und x mit dem Halbmesser CG der halbe Kreis GFE wirklich beschrieben ist; so ist dann dieser halbe Kreis das Maß der beyden Nebenwinkel; denn der Bogen GF ist das Maß des Winkels x, und der Bogen FE ist das Maß des Winkels y; beyde Bögen aber machen zusammen den halben Kreis EFG aus; folglich haben zwey Nebenwinkel den halben Kreis zu ihrem Maße; der halbe Kreis beträgt aber 180°; folglich haben zwey Nebenwinkel 180° zu ihrem Maße.

1. Zusatz. Wenn von zwey Nebenwinkeln das Maß des einen Winkels bekannt ist, so läßt sich das Maß des andern Nebenwinkels leicht finden; man darf nähmlich nur das bekannte Maß des einen Nebenwinkels von 180° abziehen, so gibt der Rest das Maß des andern Winkels. Wenn z. B. der Winkel $y = 120°$ wäre, so würde der andere Winkel $x = 180° - 120°$ seyn, d. i. der Winkel x würde 60° zu seinem Maße haben; denn $180° - 120° = 60°$.

2. Zusatz. Da ein rechter Winkel einen rechten Winkel zu seinem Nebenwinkel hat, indem er einen Winkel zu seinem Nebenwinkel hat, der ihm gleich ist (zweyt. Abschn. §. 5.); so hat also ein rechter Winkel 90° zu seinem Maße; denn 180° durch zwey dividirt gibt 90° zum Quotienten.

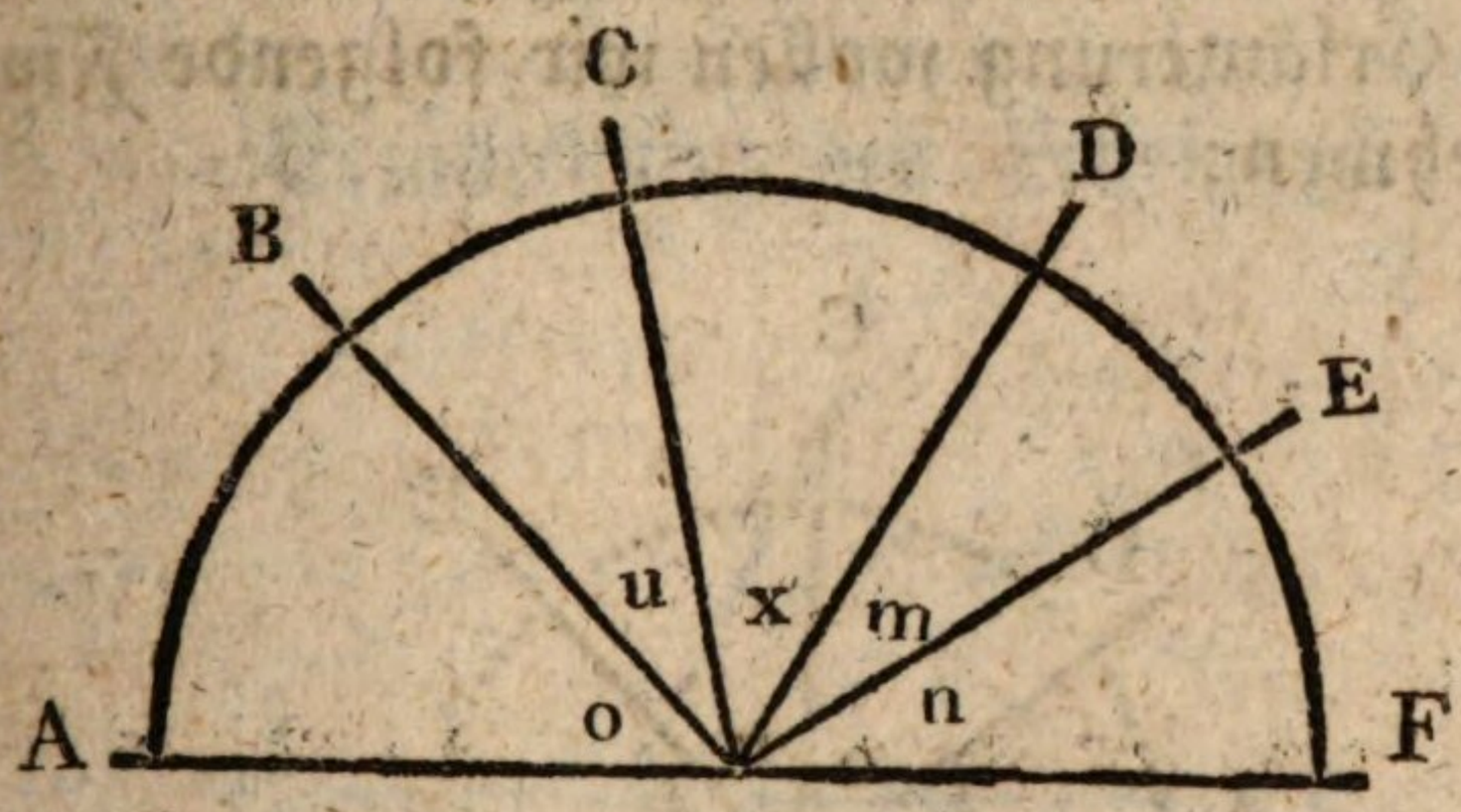
3. Zusatz. Da ein stumpfer Winkel größer, und ein spitziger Winkel kleiner als ein Rechter ist, so hält also jener mehr, und dieser weniger als 90°.

4. Zusatz. Zwey Nebenwinkel sind also zusammen genommen immer zwey rechten Winkeln gleich.

5. Zusatz. Wenn von zwey Nebenwinkeln einer

ein rechter ist, so ist auch der andere Winkel ein rechter; ist aber der eine stumpf, so ist der andere spitzig, und ist der eine spitzig, so ist der andere stumpf.

6. Zusatz. Da sich aus jedem Puncte einer gegebenen Linie mehrere gerade Linien ziehen lassen, wodurch mehrere Nebenwinkel entstehen, wie es folgende Figur darthut:



so haben alle über einer geraden Linie liegende Winkel (als: o, u, x, m und n) den halben Kreis (ABCDEF), d. i. 180° zu ihrem Maße; denn der Winkel o hat das Bogenstück AB, der Winkel u das Bogenstück BC, der Winkel x das Bogenstück CD, der Winkel m das Bogenstück DE, und der Winkel n das Bogenstück EF zu seinem Maße; alle diese Bogenstücke zusammen genommen aber machen mit einander den halben Kreis ABCDEF aus, der 180° beträgt; folglich haben alle über einer geraden Linie liegende Nebenwinkel, so viel ihrer immer seyn mögen, 180° zu ihrem Maße.

§. 12.

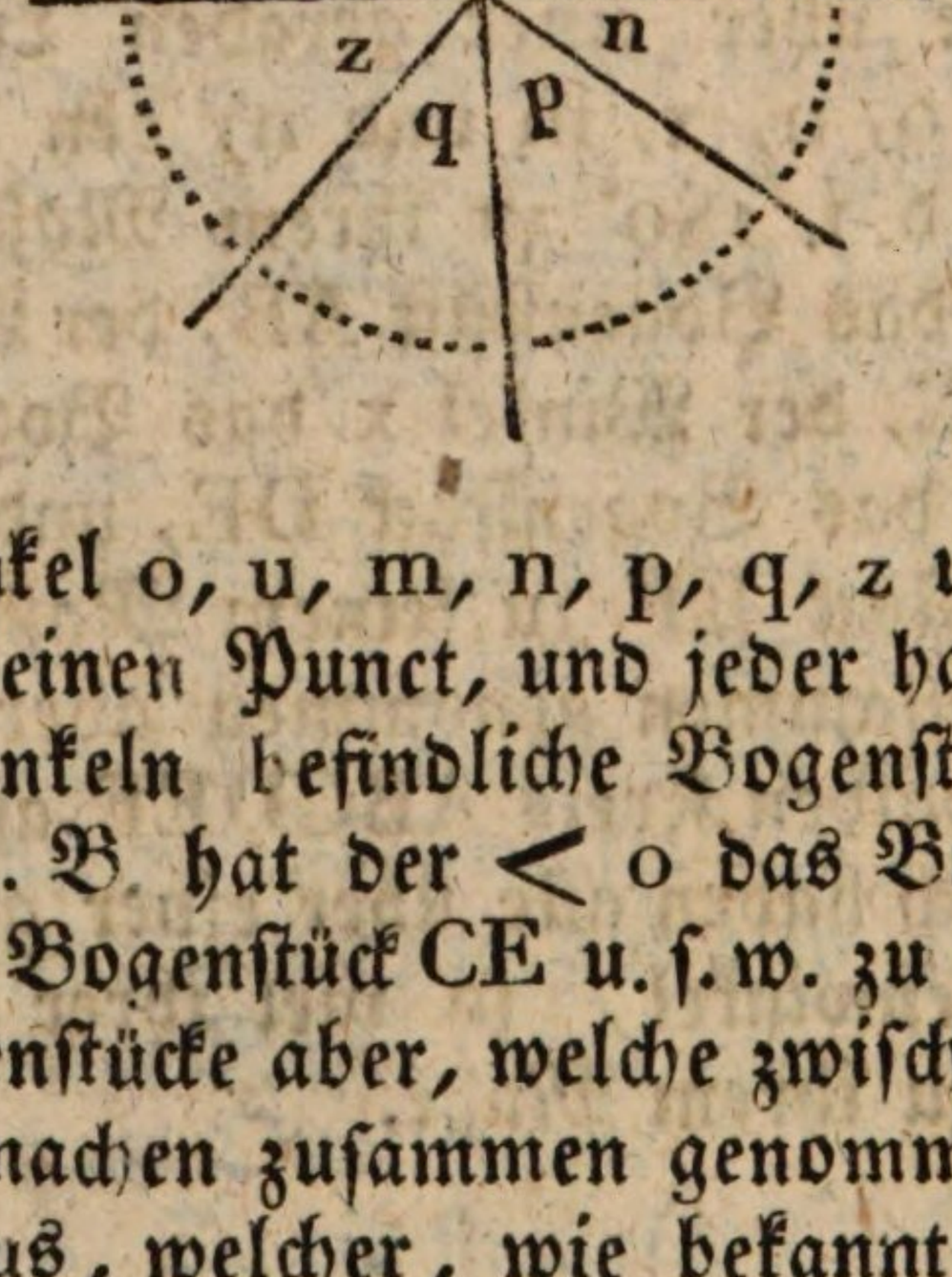
Lehrsatz.

Alle Winkel, die in einer Ebene um einen Punct möglich sind, sind zusam-

men 4 R. (rechten Winkel) gleich, oder was eines ist, sie betragen zusammen 360°.

Beweis. Denn aus diesem Puncte, um den sich die Winkel befinden, kann ein Kreis beschrieben werden, der dann das Maß für alle diese Winkel ist; nun aber beträgt der ganze Kreis 4×90°=360°; alle Winkel also, die sich um einen Punct befinden, sind 4 R. gleich, und betragen zusammen 360°.

Zur Erläuterung wollen wir folgende Figur zu Hülfe nehmen:



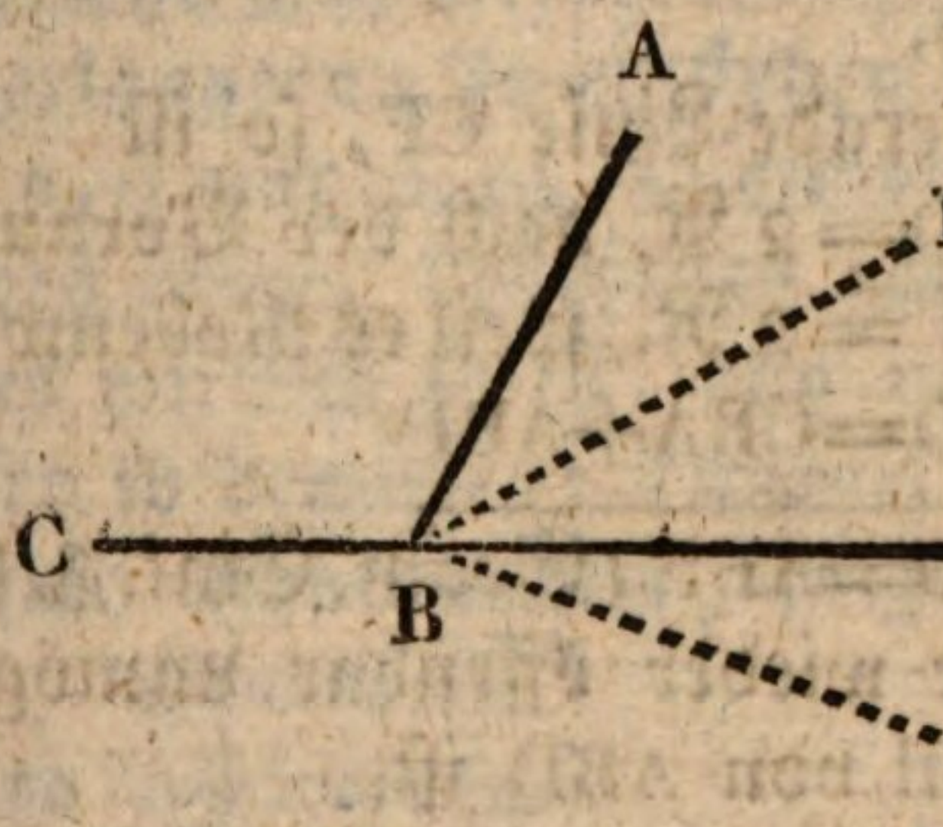
Die Winkel o, u, m, n, p, q, z und x befinden sich alle um einen Punct, und jeder hat das zwischen seinen Schenkeln befindliche Bogenstück zu seinem Maße, so z. B. hat der < o das Bogenstück DC, der < u das Bogenstück CE u. s. w. zu seinem Maße; alle die Bogenstücke aber, welche zwischen den Schenkeln sind, machen zusammen genommen einen ganzen Kreis aus, welcher, wie bekannt, in 360° eingetheilt wird; folglich haben alle obige um einen Punct befindliche Winkel 360° zu ihrem Maße.

§. 13.

Lehrsatz.

Wenn die Summe zweyer Winkel, die einen gemeinschaftlichen Schenkel haben, 2 R. gleich ist; so sind die Winkel Nebenwinkel, d. h. ihre beyden äußern Schenkel liegen in einer geraden Linie.

Erläuterung des Lehrsatzes.



Wenn die Winkel ABC und ABD, die AB zu ihrem gemeinschaftlichen Schenkel haben, zusammen 2 R. gleich sind; so müssen nach der Aussage obigen Lehrsatzes BC und BD in gerader Linie liegen.

Beweis. Gesetzt CB und BD sey keine gerade Linie, so muß CB in der Verlängerung entweder außerhalb ABD, wie BE, oder sie muß innerhalb ABD, wie BF fallen. Einer von diesen zwey Fällen muß nothwendig eintreffen. Gesetzt die gerade Linie sey CE, so ist nach der Voraussetzung

CBA+ABD=2 R.; denn man nimmt an, die beyden Winkel, die den gemeinschaftlichen Schenkel AB haben, seyen 2 R. gleich.

Ferner CBA+ABE=2 R., weil es Nebenwinkel sind (§. 11. 4. Zus.),
folglich CBA+ABD=CBA+ABE (Arith. Einl. Dritt. Abschn. §. 13. 1.),
also wäre ABD=ABE; denn Gleiches von Gleichem hinweggenommen, läßt gleiche Reste (Geomet. Einl. §. 8. 3.). Nun ist es aber offenbar unmöglich, daß CBA=ABE ist; denn ABD ist nur ein Theil von ABE, und das Ganze ist jederzeit größer, als jeder einzelne Theil, woraus es besteht (Geomet. Einl. Dritt. Abschn. §. 13. 6.).

Ist aber die gerade Linie CF, so ist
CBA+ABD=2 R. nach der Voraussetzung,
und CBA+ABF=2 R., weil es Nebenwinkel sind;
folglich CBA+ABD=CBA+ABF

---

also ABD=ABF (Geom. Einl. §. 8. 3.).

Dieß ist aber wieder offenbar unmöglich, weil ABF nur ein Theil von ABD ist.

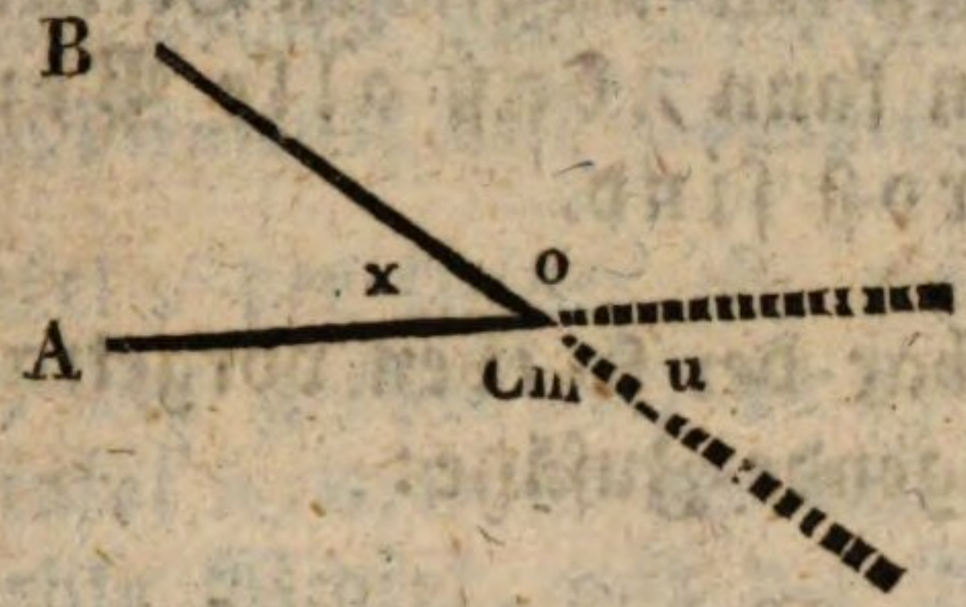
Hieraus folgt also, (weil nähmlich, wie gezeigt wurde, aus der Voraussetzung des Gegentheiles, BC und BD liegen nicht in einer geraden Linie, ein Widerspruch herauskommt), daß zwey Winkel, die einen gemeinschaftlichen Schenkel haben und 2 R. gleich sind, nothwendig Nebenwinkel sind, d. h. ihre beyden äußern Schenkel liegen in einer geraden Linie. Wenn also zwey Winkel zusammen so groß sind, als zwey Rechte, und sie einen Schenkel gemein haben; so liegen ihre beyden äußern Schenkel in einer geraden Linie, und sie sind daher Nebenwinkel.

§. 14.

Lehrsatz.

Alle Vertikalwinkel sind gleich groß.

Beweis.



Wenn wir beyde Schenkel des Winkels ACB (nach Geomet. 1. Thl. §. 2. 2. Forderungssatze) nähmlich BC und AC verlängern, so entstehen dadurch die Vertikalwinkel x, u und o, m. Diese müssen nun nach der Aussage des obigen Lehrsatzes einander gleich seyn. Daß dieses wirklich so ist, daß nähmlich x=u und o=m, wird so bewiesen: x und o, o und u, u und m, m und x sind Nebenwinkel; folglich

$$x+o=180^\circ$$
$$\text{und } o+u=180^\circ$$

---

also $x+o=o+u$ (nach Arith. Einleit. Dritt. Abschn. §. 13. 1. Grundsf.).

folglich ist auch x=u (nach Geom. Einl. §. 8. 3.).

x und u aber sind, weil sie einen gemeinschaftlichen Scheitelpunct haben und einander gegenüber liegen, Vertikalwinkel; die Vertikalwinkel x und u sind also einander gleich.

Auch o und m, welche ebenfalls Vertikalwinkel sind, weil sie auch einen gemeinschaftlichen Schenkel haben und einander gegenüber stehen, sind gleich groß; denn

$$\left.\begin{array}{r} o+u=180^\circ \\ \text{und } u+m=180^\circ \end{array}\right\} \text{ weil sie Nebenwinkel sind;}$$

---

folglich $o+u=u+m$

---

also ist o=m.

Hieraus ergibt sich, weil der so eben geführte Beweis bey allen nur möglichen Vertikalwinkeln angewandt werden kann, daß alle Vertikalwinkel gleich groß sind.

Wie fruchtbar der so eben vorgetragene Lehrsatz sey, lehren folgende Zusätze:

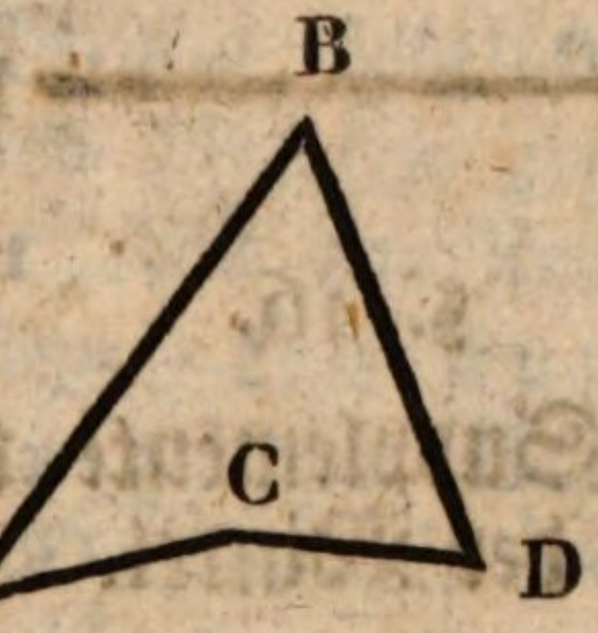
1. Zusatz. Wenn man auf dem Felde einen Winkel, zu dem man nicht kommen kann, messen sollte; so kann seine Größe dadurch bestimmt werden: wenn man seinen Vertikalwinkel mißt, dieser gibt dann das Maß des unzugänglichen Winkels; weil alle Vertikalwinkel gleich groß sind.

2. Zusatz. Da zwischen zwey Vertikalwinkeln sich noch ein zu beyden gehöriger Nebenwinkel befindet (so befindet sich z. B. zwischen den zwey Vertikalwinkeln x und u in der obigen Figur der Nebenwinkel o); so kann man, wenn die Größe eines Vertikalwinkels bekannt ist, den Nebenwinkel leicht dadurch finden, wenn man den Vertikalwinkel von 180° abzieht. Gesetzt, der Vertikalwinkel u sey = 60°, so ist der Nebenwinkel o = 180° — 60 = 120°. Ueberhaupt lassen sich aus der bekannten Größe eines Vertikalwinkels alle die bey demselben herumliegende Winkel leicht finden; denn wenn z. B. der Vertikalwinkel (u) 60° hält, so ist sein Nebenwinkel o = 180° — 60° = 120°, und der > x, da er der Vertikalwinkel von u ist, beträgt auch 60° u. s. w. Wenn also die Größe eines Vertikalwinkels bekannt ist, so sind auch alle die bey ihm herumliegende Winkel bekannt.

§. 15.

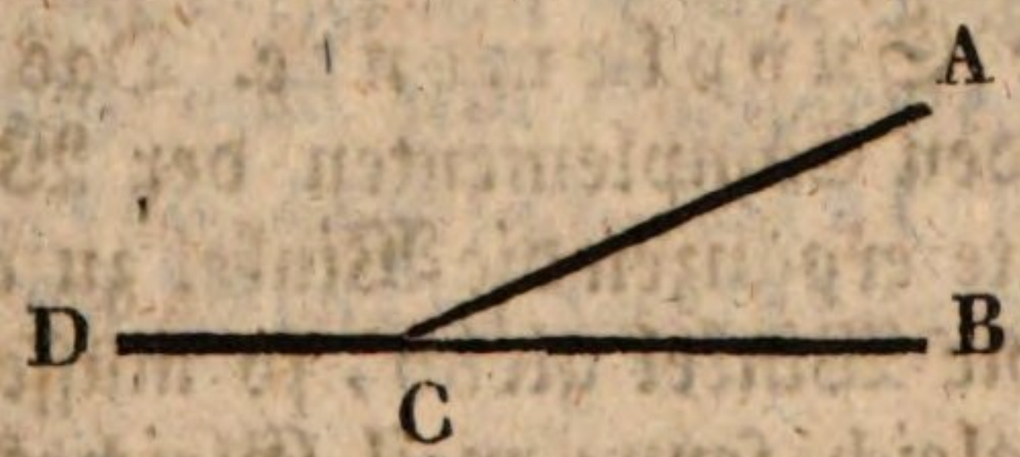
Erklärung der hohlen und erhabenen Winkel, der Supplemente und Complemente.

Ein Winkel, der kleiner ist, als zwey Rechte, heißt hohl, der größer ist, erhaben. So sind z. B. die Winkel A, B, D in der unten beygezeichneten Figur hohle Winkel, und der Winkel C ist ein erhabener Winkel.



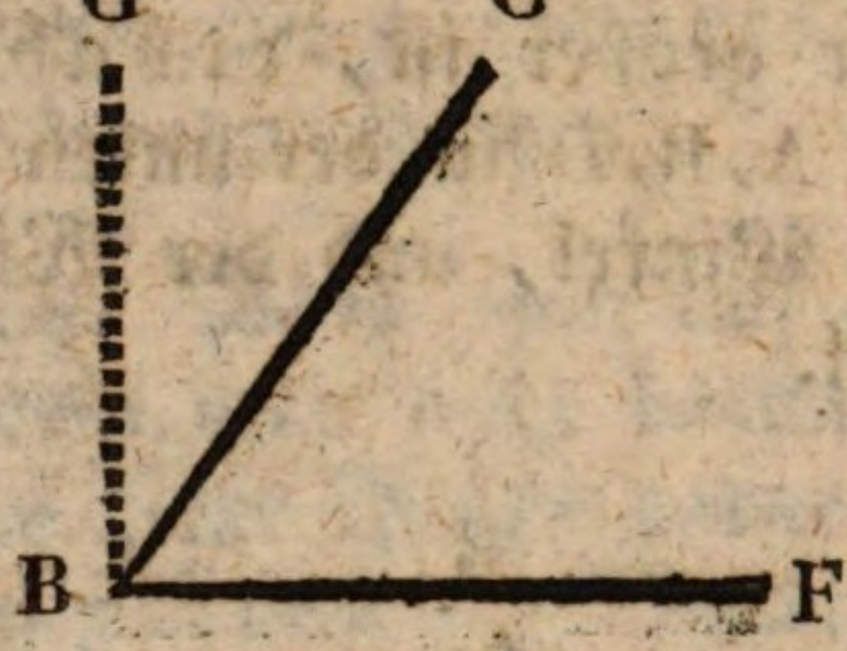
Zusatz. Von zwey Nebenwinkeln ist jeder ein hohler; weil beyde zusammen genommen zwey rechten Winkeln gleich sind; folglich ist jeder Nebenwinkel kleiner, als 2 R.; also ist jeder Nebenwinkel ein hohler Winkel.

Ein Winkel, der einen andern Winkel zu zwey rechten Winkeln ergänzt, heißt sein Supplement (Ersatz). So ist z. B. ACB das Supplement von ACD, und ACD ist das Supplement von ACB



Ein Winkel, der einen andern Winkel zu einem Rechten ergänzet, wie in der unten beygezeichneten Figur der ∠ GBC, der den Winkel CBF zu einem

Rechten ergänzet, heißt sein Complement (seine Ergänzung). Der < GBC ist also das Complement von dem < CBF, und umgekehrt, der < CBF ist das Complement des Winkels GBC.



§. 16.

Lehrsätze über die Supplemente und Complemente der Winkel.

1. Lehrsatz. Gleiche Winkel haben gleiche Supplemente und Complemente; denn sind zwey oder mehrere Winkel gleich groß, so müssen auch die Winkel, die sie zu zwey Rechten ergänzen, gleich groß seyn; wenn man also diese von ihnen abzieht, so müssen sie so, wie die Winkel, die sie zu zwey Rechten ergänzen, gleich groß seyn; weil Gleiches von Gleichem Gleiches bleibt; Winkel aber, die andere Winkel zu zwey Rechten ergänzen, heißen ihre Supplemente; gleiche Winkel haben also auch gleiche Supplemente. Das Nähmliche gilt auch von den Complementen der Winkel; denn die Complemente ergänzen die Winkel zu einem Rechten; sind nun die Winkel gleich, so müssen auch ihre Complemente gleich seyn; weil Gleiches von Gleichem Gleiches bleibt; also haben gleiche Winkel gleiche Complemente.

Anmerkung. Obiger Lehrsatz kann auch um-

gekehrt werden, und dann heißt er: Gleiche Supplemente und Complemente haben auch gleiche Winkel. Der Beweis dieses Satzes beruht wieder auf dem Grundsatze: Wenn man Gleiches von Gleichem hinwegnimmt, so sind auch die Reste gleich.

2. Lehrsatz. Ein stumpfer Winkel hat einen spitzigen, und ein spitziger Winkel hat einen stumpfen Winkel zu seinem Supplemente; denn der stumpfe Winkel ist größer als ein rechter Winkel; folglich muß der Winkel, welcher ihn zu zwey Rechten ergänzet, d. i. sein Supplement kleiner, als ein Rechter, folglich ein spitziger Winkel seyn; ein stumpfer Winkel hat also einen spitzigen Winkel zu seinem Supplemente. Da aber ein spitziger Winkel kleiner als ein Rechter ist, so muß der Winkel, welcher ihn zu zwey Rechten ergänzet, welcher sein Supplement ist, größer seyn, als ein Rechter; ein Winkel aber, der größer, als ein Rechter ist, ist ein stumpfer Winkel; folglich hat ein spitziger Winkel einen stumpfen Winkel zu seinem Supplemente.

3. Lehrsatz. Das Supplement eines rechten Winkels ist selbst ein rechter Winkel; denn das Supplement ergänzt den Winkel zu zwey Rechten; ist dieser ein rechter Winkel, so muß also nothwendig auch sein Supplement ein rechter Winkel seyn; ein rechter Winkel hat also einen rechten Winkel zu seinem Supplemente.

Fünfter Abschnitt.

Lehrsätze und Aufgaben, besonders in Hinsicht auf Dreyecke.

§. 1.

Aufgaben.

1. Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie einer andern gegebenen Linie gleich zu machen.

2. Aufgabe. Auf einer unbegränzten Linie eine andere gegebene gerade Linie so viel Mahl aufzutragen, als verlangt wird.

Beyde diese Aufgaben lassen sich ohne Mühe durch Hülfe des Linials und Zirkels lösen. Vermittelst des Linials zieht man die gerade Linie, und macht sie der gegebenen geraden Linie durch Hülfe des Zirkels, mit dessen Schenkeln man die Länge der gegebenen Linie aufnimmt, gleich. Soll eine gegebene gerade Linie auf eine andere unbegränzte Linie aufgetragen werden, so nehme man mit dem Zirkel die Länge der aufzutragenden Linie, und trage sie dann auf die unbegränzte Linie so oft auf, als verlangt wird.

§. 2.

Lehrsatz.

In einem jeden Dreyecke müssen im-

mer zwey Seiten zusammen genommen größer seyn, als die dritte Seite.

Beweis. Denn setzen wir, zwey Seiten zusammen genommen wären nicht größer, als die dritte Seite; so würden sie, wenn man dieselben an den Endpuncten der dritten Seite aufstellen wollte, niemahls in einem Puncte sich vereinigen, und folglich kein Dreyeck bilden können; in einem Dreyecke müssen also zwey Seiten zusammen genommen größer seyn, als die dritte Seite.

Anmerkung. Man kann sich diesen Beweis dadurch versinnlichen, wenn man drey Stück Faden abschneidet, wovon das eine so lang ist, als die beyden übrigen Stücke zusammen genommen. Leget man nun die zwey kleinern Stücke an die Endpuncte des größern Stückes, so wird man sehen, daß, wenn man sie oben in einem Puncte vereinigen und also daraus ein Dreyeck bilden will, sie sich nicht vereinigen lassen; denn sie sind zu kurz, und können unmöglich in einem Puncte zusammen fallen. Sie müssen nothwendig, um sich vereinigen zu können, zusammen genommen größer seyn, als das Stück Faden, an dessen Endpuncten sie aufgestellt werden. Um also aus drey gegebenen Seiten ein Dreyeck bilden zu können, müssen zwey Seiten zusammen genommen größer seyn, als die dritte Seite.

§. 3.

Aufgabe.

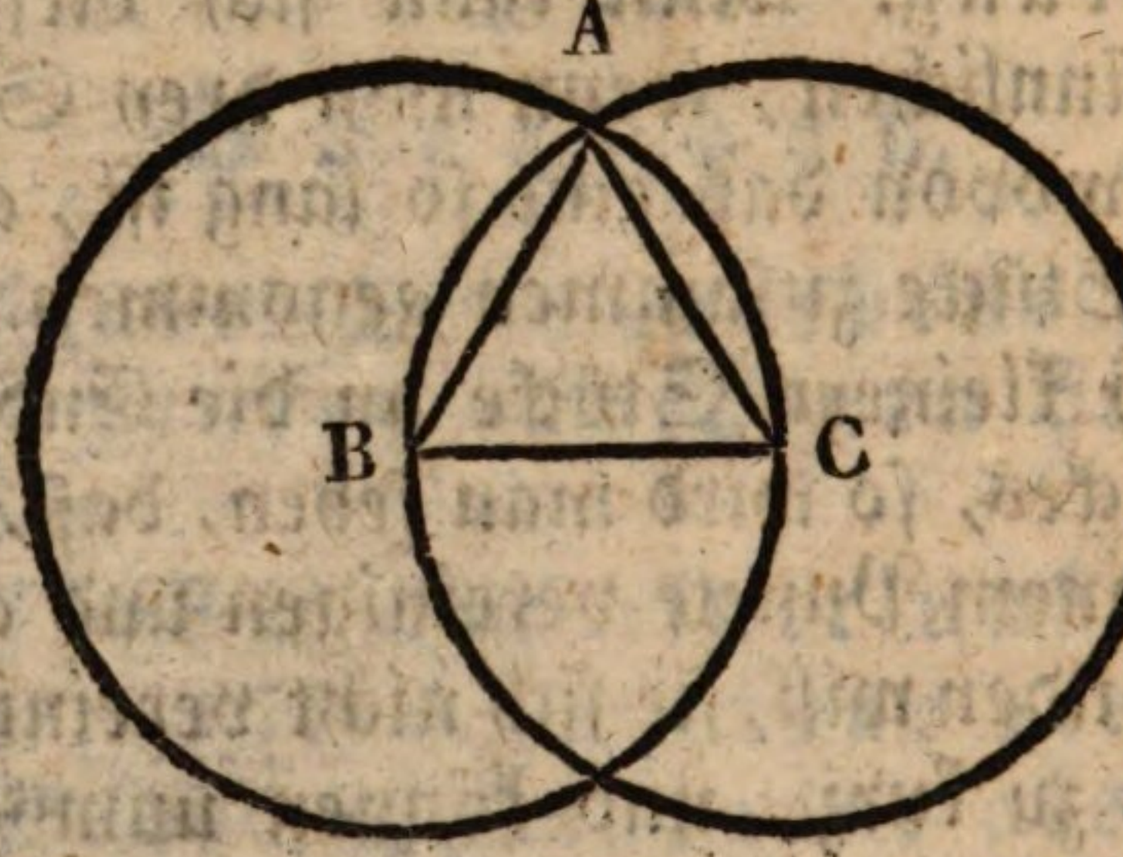
Ueber einer gegebenen geraden Linie ein gleichseitiges Dreyeck zu beschreiben.

Auflösung. Die gegebene gerade Linie sey BC. Ueber ihr ein gleichseitiges Dreyeck beschreiben heißt, man soll ein Dreyeck machen, wo eine jede Seite =BC ist. Dieses wird auf folgende Art bewerkstelliget:

1) Man nehme die gegebene Linie BC zur Grundlinie an.

2) Alsdann beschreibe man mit der Oeffnung des Zirkels, die der gegebenen Linie BC gleich ist, von dem Puncte C, auf den man den einen Fuß des Zirkels setzt, einen Kreis; mit eben dieser Oeffnung des Zirkels mache man einen zweyten Kreis aus B.

3) Von den Puncten aus, wo sich diese zwey Kreise durchschneiden, ziehe man zwey gerade Linien auf B und C, so hat man ein gleichseitiges Dreyeck.



Beweis. AC=BC, und AB=BC; denn sie sind als Radien eines und des nähmlichen Zirkels zu betrachten, wie es die Verfertigung des Dreyeckes selbst darthut; folglich ist auch AC=AB (Arithmet. Einleit. Dritt. Abschn. §. 13. 1.); also sind alle drey Seiten einander gleich, und das so gebildete Dreyeck ist also ein gleichseitiges Dreyeck.

Anmerkung. Es ist eben nicht nöthig, daß man ganze Kreise beschreibe; statt derselben darf man nur zwey Bögen ziehen, die einander durchkreuzen.

§. 4.

Aufgabe.

Aus zwey gegebenen Linien ein gleichschenkligtes Dreyeck zu bilden.

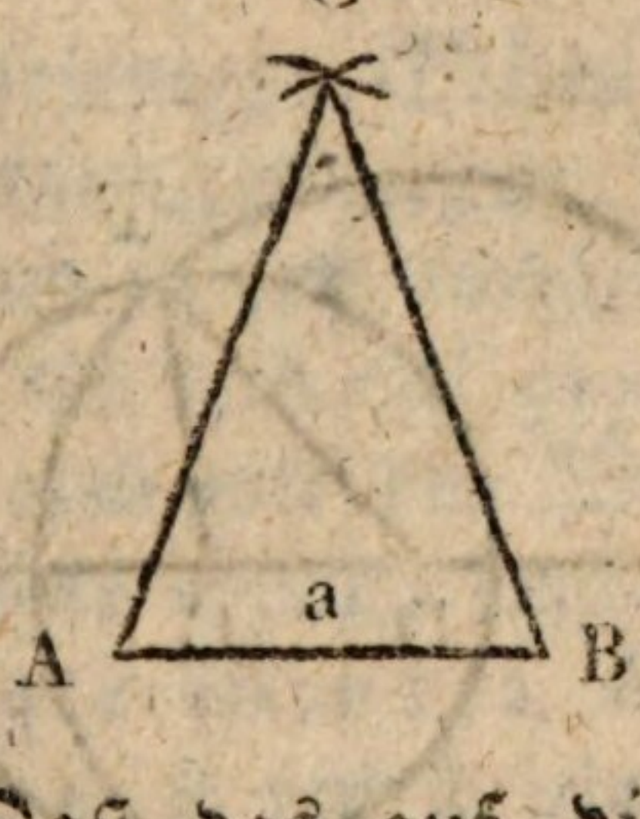
Auflösung. Man nimmt die eine Linie, gewöhnlich die kleinere, als die Grundlinie an, beschreibt mit der andern aus den beyden Endpuncten der Grundlinie Zirkelbögen, die sich durchschneiden, und verbindet den Durchschnittspunct mit jedem Endpuncte der Grundlinie.

Die gegebenen Linien seyen a und b.

a

b

Man nehme die Linie a zur Grundlinie, und verfahre, wie gesagt wurde. Man erhält das Dreyeck ACB.



Beweis. Daß das auf die gezeigte Art verfertigte Dreyeck ein gleichschenkligtes sey, erhellet daraus: Die ober der Grundlinie befindlichen zwey Seiten sind Radien zweyer gleich großen Kreise; folglich sind sie einander gleich; und da die Zirkelbögen mit der Länge der zweyten gegebenen Linie verfertiget wurden, so hat also das hierdurch entstandene Dreyeck die zwey gegebenen Linien zu seinen Seiten.

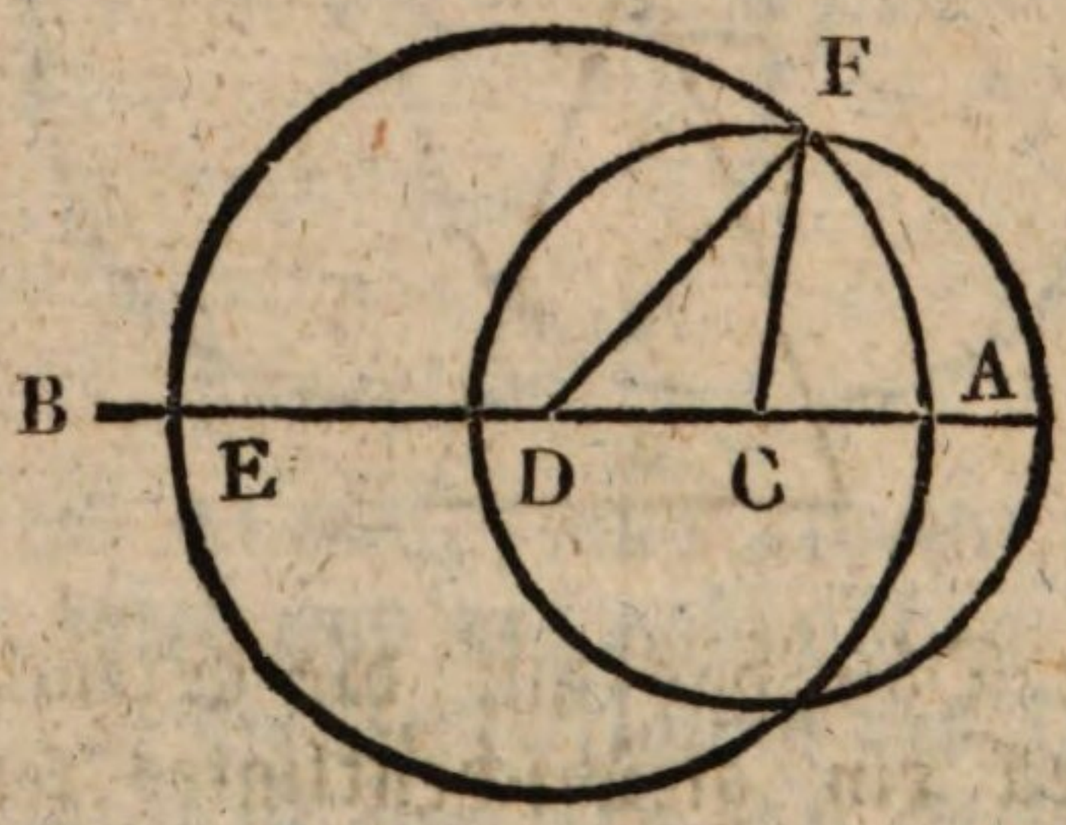
§. 5.

Aufgabe.

Aus drey gegebenen Linien AC, CD, DF, wovon aber zwey zusammen genommen

größer sind, als die dritte Linie, ein Dreyeck zu beschreiben, welches diese Linien zu Seiten hat.

Auflösung. Man ziehe eine gerade Linie von beliebiger Länge; auf diese trage man dann die gegebenen Linien eine nach der andern auf, und beschreibe einen Kreis aus C mit CA, und noch einen aus D mit DE. Vom Durchschnittspuncte F ziehe man nach D und C gerade Linien. In dem auf solche Art entstandenem △FDC ist FC=CA, CD=CD, FD=DE, weil FC und CA, FD und DE Radien eines und des nähmlichen Kreises sind; folglich hat das so gebildete Dreyeck die drey gegebenen Linien zu seinen Seiten.

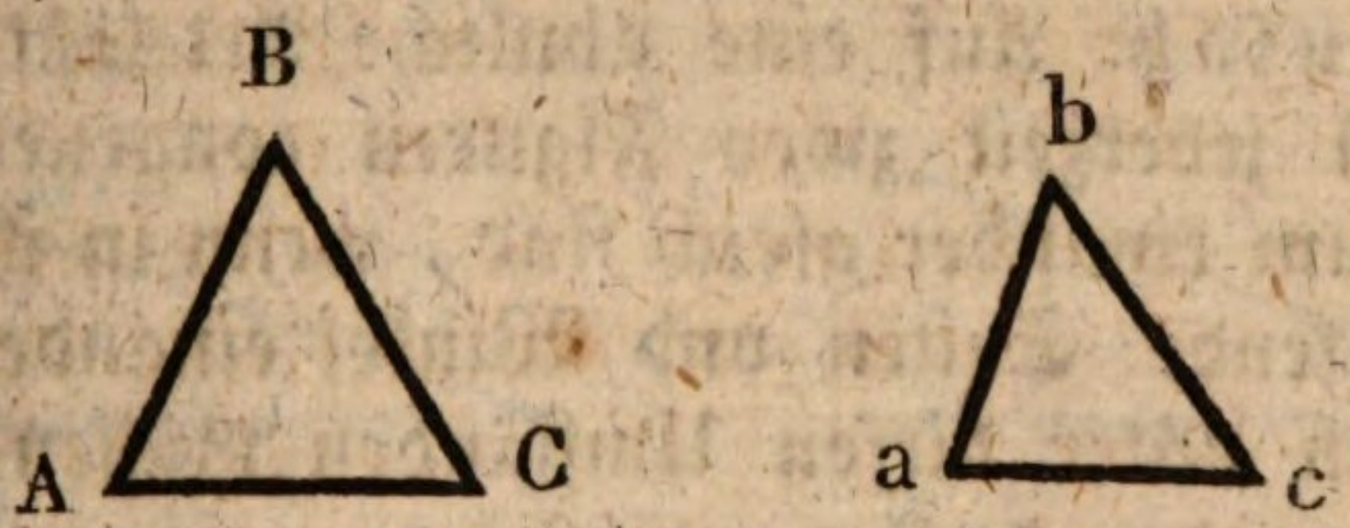


Anmerkung. Es ist klar, daß man nicht nöthig hat, die zwey Kreise ganz zu beschreiben. Man nimmt nähmlich eine der gegebenen Linie, gewöhnlich die kleinere zur Grundlinie, dann beschreibt man aus den Endpuncten derselben mit den Längen der zwey andern gegebenen Linien zwey Bögen, und von ihrem Durchschneidungspuncte zieht man auf die Endpuncte der Grundlinie zwey gerade Linien.

§. 6.

Erklärung der gleichnahmigten Seiten und Winkel zweyer Dreyecke.

An einem jeden Dreyecke kann man Zweyerley unterscheiden, Winkel und Seiten. Wenn man zwey Dreyecke mit einander vergleicht, z. B. ABC und abc,



so nennt man diejenigen Seiten an denselben, die nach einerley Richtung zu liegen, gleichnahmigte Seiten. So sind in den vorigen Dreyecken AB und ab, AC und ac, CB und cb gleichnahmigte Seiten. Eben so ist es auch mit den Winkeln. Winkel, denen gleichnahmigte Seiten entgegen stehen, heißen gleichnahmigte Winkel. So sind die Winkel A und a, C und c, B und b gleichnahmigte Winkel.

§. 7.

Lehrsatz.

Wenn in zwey Dreyecken alle gleichnahmigten Seiten einander gleich sind, so sind die ganzen Dreyecke, also auch ihre gleichnahmigten Winkel einander gleich.

Beweis. Denn, wenn zwey Dreyecke in ihren gleichnahmigten Seiten einander gleich sind, und man legt beyde auf einander; so müssen sie in ihren Gränzen zusammen fallen, d. h. sie decken einander; folg-

lich sind sie einander vollkommen gleich; wenn also in zwey Dreyecken alle gleichnahmigte Seiten einander gleich sind, so sind die ganzen Dreyecke und also auch ihre gleichnahmigten Winkel einander gleich.

1. Zusatz. Wenn also zwey Dreyecke einander decken, so stehen in denselben den gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber, und umgekehrt den gleichen Winkeln stehen gleiche Seiten entgegen.

2. Zusatz. Auf eine ähnliche Art läßt sich zeigen, daß jederzeit zwey Figuren congruent, und eben darum einander gleich sind, wenn in ihnen alle gleich liegende Seiten und Winkel einander gleich sind; denn unter diesen Umständen müssen die Figuren einander decken, wenn man sie auf einander legt.

§. 8.

Aufgabe.

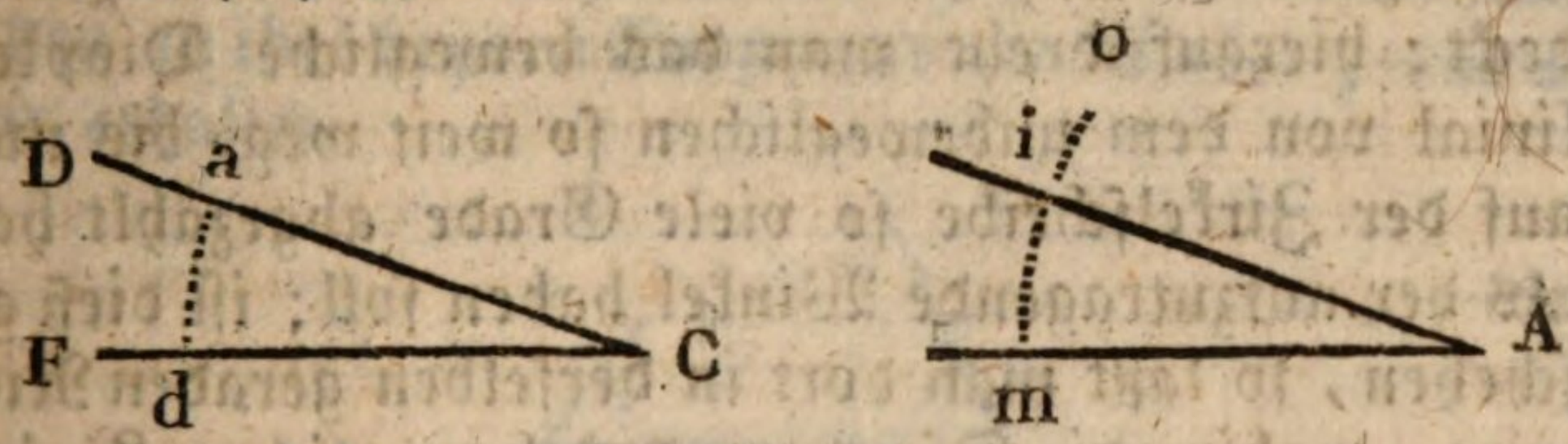
An einen Punct einer gegebenen geraden Linie einen gegebenen Winkel von bestimmtem Maße zu setzen.

Auflösung. 1) Wenn der Winkel, den man an einen Punct einer geraden Linie setzen soll, auf dem Papiere gegeben ist; so ziehe man mit beliebiger Oeffnung des Zirkels aus seinem Scheitelpuncte zwischen seinen Schenkeln einen Bogen. Z. B. es sey der Winkel DCF der gegebene Winkel, der an den Punct A gesetzt werden soll. Man mache nun zwischen DC und FC den Bogen da.

2) Mit eben dieser Oeffnung des Zirkels ziehe man aus dem gegebenen Puncte A einen Bogen von unbestimmter Größe, nähmlich mo.

3) Alsdann messe man durch Hülfe des Zirkels die Sehne des Bogens ad, der sich zwischen den

Schenkeln des gegebenen Winkels DCF befindet. Diese Größe trage man dann von dem Puncte m auf den Bogen mo auf, und schneide den unbestimmten Bogen in i ab. Von diesem Durchschneidungspuncte ziehe man zu dem Puncte A eine gerade Linie, so wird dann der Winkel A dem Winkel C gleich seyn; weil nach dieser Verfahrungsart beyde Winkel gleiches Maß haben.



Anmerkung. Man kann auch vermittelst des Winkelmessers einen Winkel von bestimmten Graden an einen Punct einer gegebenen geraden Linie auf dem Papiere auf folgende Art zeichnen: Man schiebt das Centrum des Linials des Winkelmessers an den Punct der gegebenen geraden Linie, jedoch so, daß die Schneide des Linials des Transporteurs mit der gegebenen Linie zusammenfällt; alsdann zählt man auf der Kreisfläche des Transporteurs von der geraden Linie angefangen hinaufwärts so viele Grade ab, als der zu bildende Winkel haben soll; wo die Zahl der Grade des verlangten Winkels steht, macht man einen Punct auf das Papier, den man dann mit dem Endpuncte der Linie, wo sich das Centrum des Winkelmessers befindet, durch eine gerade Linie verbindet.

Auf dem Felde wird ein Winkel an einen gegebenen Punct einer gegebenen Linie durch Hülfe des Astrolabiums gesetzt, welches auf folgende Art geschieht: Man stellt das Astrolabium (die Winkelscheibe) so über den gegebenen Punct, daß dieser in

senkrechter Richtung unter dem Centrum der Zirkelscheibe des Astrolabiums zu stehen kommt; alsdann bringt man den unbeweglichen Diopterlinial in eine solche Richtung, daß er mit der ausgesteckten Linie zusammenfällt, indem man durch die Dioptern des unbeweglichen Linials so lange visirt, bis der Stab, wodurch die Linie auf dem Felde ausgesteckt ist, die schmale, längligte Oeffnung (oder das daran befindliche Haar) deckt; hierauf dreht man das bewegliche Diopterlinial von dem unbeweglichen so weit weg, bis man auf der Zirkelscheibe so viele Grade abgezählt hat, als der aufzutragende Winkel haben soll; ist dieß geschehen, so laßt man dort in derselben geraden Richtung, wohin die Dioptern des beweglichen Linials hinweisen, durch die man sehen muß, einen Stab auf dem Felde stecken, der aber, um an den rechten Ort zu kommen, mit den schmalen längligten Oeffnungen der Dioptern zusammen fallen, d. i. sie decken muß. Auf solche Art ist dann der gegebene Winkel an dem gegebenen Puncte einer gegebenen geraden Linie auf dem Felde aufgetragen, oder vielmehr ausgesteckt. — Daß der auf solche Art ausgesteckte Winkel dem gegebenen gleich sey, erhellet daraus, weil beyde Winkel einander decken; Winkel aber, die einander decken, sind sich gleich.

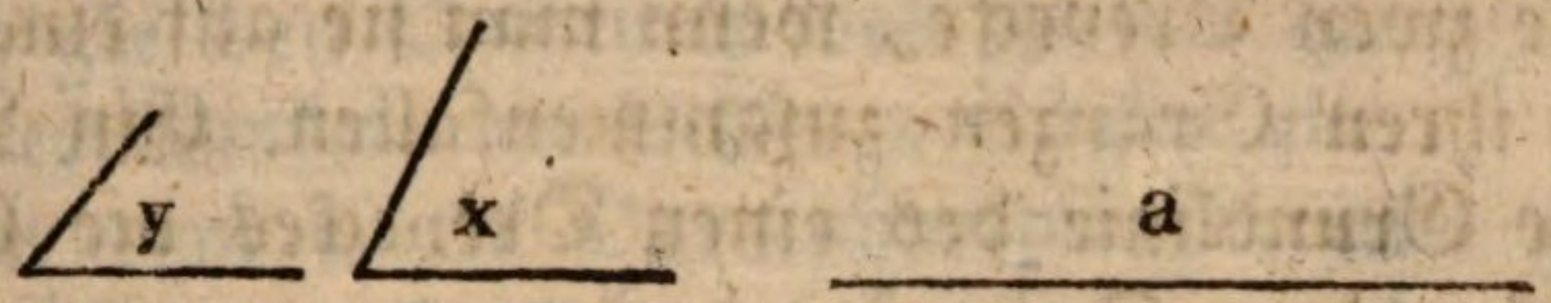
§. 3.

Aufgabe.

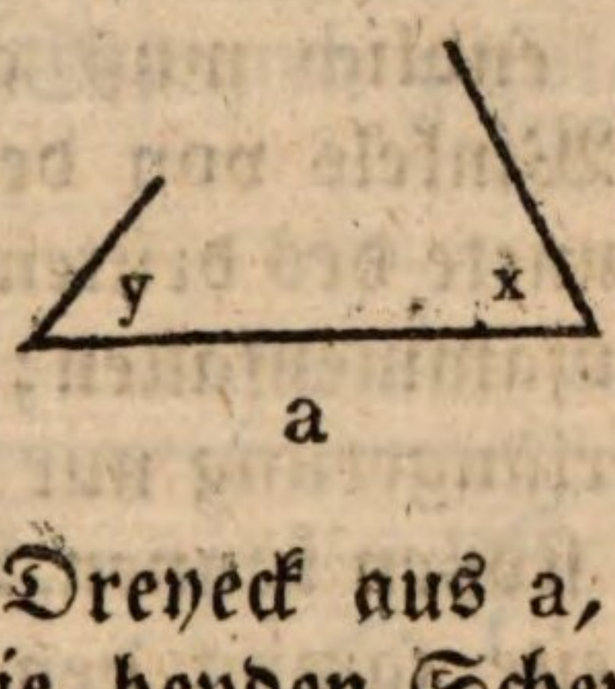
Aus zwey gegebenen Winkeln sammt einer Seite ein Dreyeck zu beschreiben.

Auflösung. Man nehme die gegebene Linie zur Grundlinie, und bilde an die beyden Endpuncte derselben nach §. 8. die beyden gegebenen Winkel. Alsdann verlängere man die beyden Schenkel in ge-

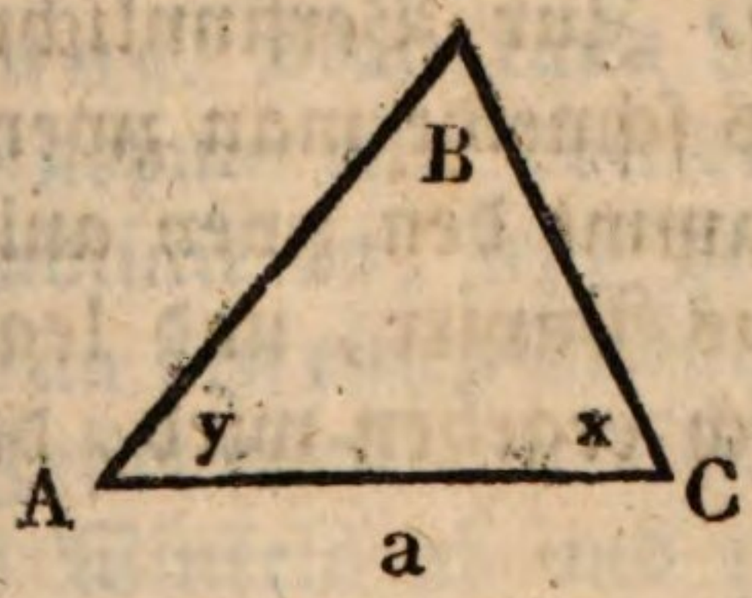
rader Richtung, bis sie einander durchkreuzen. Z.B. es sind die zwey Winkel y und x, und die Linie a gegeben.



Die Linie a nehmen wir zur Grundlinie, und setzen an ihre beyden Endpuncte die Winkel y und x; wir erhalten



Um nun ein Dreyeck aus a, y, x zu erhalten, verlängern wir die beyden Schenkel der Winkel y und x, bis sie sich durchscheiden; und so erhalten wir das Dreyeck ABC.



Anmerkung. Die beyden gegebenen Winkel müssen aber zusammen weniger betragen, als 180°; weil sonst die Schenkel durch die Verlängerung einander nie berühren würden.

§. 10.

Lehrsatz.

Zwey Dreyecke sind congruent und gleich, wenn in beyden eine Seite sammt

den zwey anliegenden Winkeln einander gleich sind.

Beweis. Denn unter diesen Bedingungen müssen die zwey Dreyecke, wenn man sie auf einander legt, in ihren Gränzen zusammenfallen. Ein Mahl muß die Grundlinie des einen Dreyeckes die Grundlinie des andern Dreyeckes decken; dann müssen auch die zwey Linien mit den beyden anliegenden Winkeln beyder Dreyecke einander decken, weil alle diese Stücke bey beyden Dreyecken nach der Voraussetzung einander gleich sind; endlich muß auch der Scheitelpunct des dritten Winkels von dem einen Dreyecke mit dem Scheitelpuncte des dritten Winkels von dem andern Dreyecke zusammenfallen; weil zwey gerade Linien in ihrer Verlängerung nur in einem einzigen Puncte zusammen stoßen können. Wenn also in zwey Dreyecken eine Seite sammt den zwey anliegenden Winkeln einander gleich sind, so sind die Dreyecke congruent und gleich.

Anmerkung. Zur Versinnlichung des eben geführten Beweises schneide man zwey Dreyecke, in denen eine Seite sammt den zwey anliegenden Winkeln gleich sind, aus Papier, und lege sie dann auf einander, wo es sich ergeben wird, daß sie sich vollkommen decken.

§. 11.

Aufgabe.

Aus einem gegebenen Winkel sammt zwey Seiten ein Dreyeck zu beschreiben.

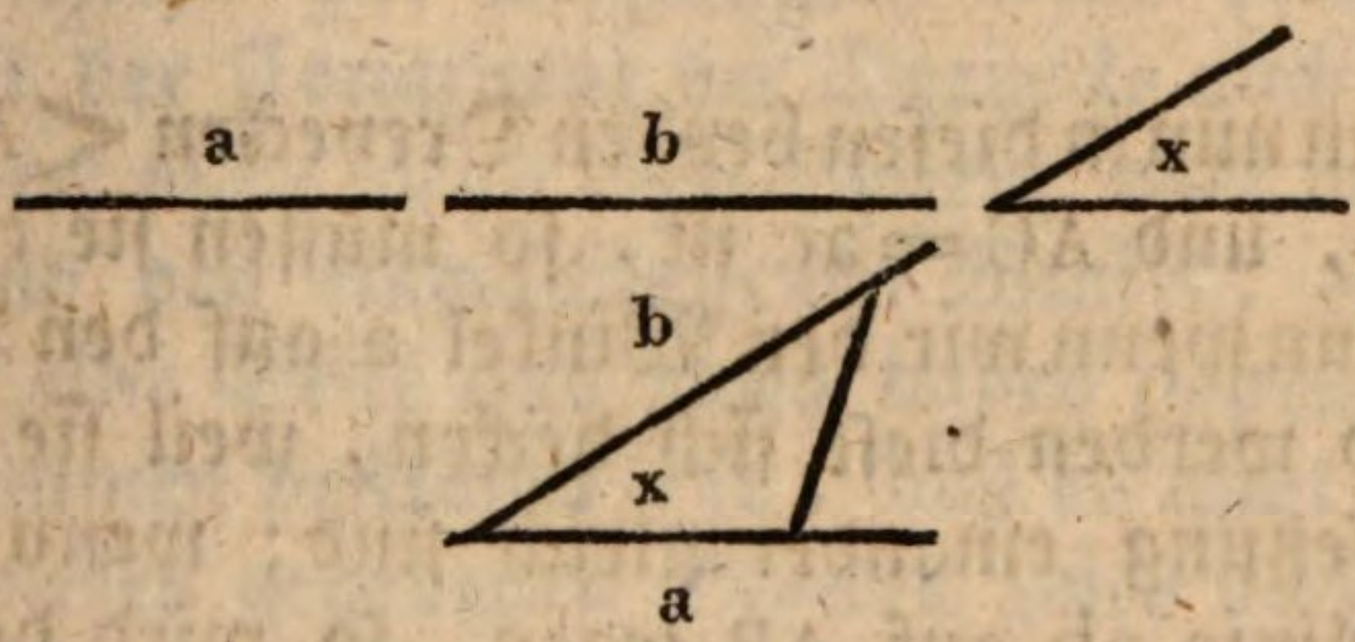
Auflösung. 1) Man ziehe eine gerade Linie von unbestimmter Länge, und bilde an einen ihrer Endpuncte den gegebenen Winkel.

2) Auf die zwey Schenkel des so gebildeten Win-

kels, die man nach Belieben verlängert hat, trage man die beyden gegebenen Linien durch Hülfe des Zirkels auf, d. h. man schneide mit der den gegebenen Linien gleichen Oeffnung des Zirkels die zwey Schenkel des Winkels durch kleine Bögen ab.

3) Von dem einen Durchschneidungspuncte zu dem andern ziehe man eine gerade Linie, welche die dritte Seite des zu bildenden Dreyeckes ausmacht.

Es seyen z. B. die Linien a und b, und der ∠ x gegeben, und man soll daraus ein Dreyeck verfertigen, so wird dem Gesagten zufolge die Arbeit diese seyn:



Anmerkung. Man kann hierbey auch so verfahren: Man nehme eine von diesen gegebenen Linien zur Grundlinie an, lege den Mittelpunct des Winkelmessers an den einen Endpunct, und den Halbmesser dieses Instruments an die Grundlinie; zeichne die Grade des Winkels ab und ziehe die andere Linie nach dieser Richtung; darauf verbinde man die beyden Endpuncte der Linien.

§. 12.

Lehrsatz.

Zwey Dreyecke sind congruent und gleich, wenn zwey Seiten des einen, zwey Seiten des andern, und die Winkel, die diese Seiten einschließen, gleich sind.

Beweis. Denn unter diesen Umständen müssen sie bey ihrer Aufeinanderlegung einander decken, wie wir dieses jetzt zeigen wollen. Die zwey Dreyecke, welche zwey gleiche Seiten und einen von diesen gleichen Seiten eingeschlossenen gleichen Winkel haben, seyen:

Wenn nun in diesen beyden Dreyecken $\angle A = \angle a$, $AB = ab$, und $AC = ac$ ist, so müssen sie congruent seyn; denn wenn wir den Winkel a auf den Winkel A legen, so werden diese sich decken, weil sie nach der Voraussetzung einander gleich sind; wenn wir ferner die Linie ab auf AB legen, so wird der Punct b mit dem Puncte B zusammen fallen, weil die Linie $ab = AB$ ist, und weil der $\angle$ a dem $\angle$ A gleich ist; folglich geben die gleichen Winkel bey A und a der Linie ab und AB die Richtung, daß sie in dem nähmlichen Puncte zusammen fallen; wenn wir endlich die Linie ac auf AC legen, so wird der Punct c den Punct C treffen, aus dem Grunde, weil $ac = AC$ ist, und die gleichen Winkel ihr diese Richtung geben. Da nun die Endpuncte b und B in einem, und c und C auch in einem Puncte zusammen fallen, dabey aber zwischen zwey Puncten nur eine gerade Linie möglich ist; so muß also auch die Linie bc auf BC fallen. Weil nun alle Seiten des Dreyeckes abc die Seiten des Dreyeckes ABC decken, so müssen nach §. 7. beyde Dreyecke einander gleich und ähnlich seyn; also müssen auch die Winkel B und b, und C und c

eine gleiche Größe haben; denn auch diese decken einander; folglich sind die ganzen Dreyecke einander gleich und ähnlich.

Wenn also in zwey Dreyecken zwey Seiten des einen Dreyeckes zwey Seiten des andern, und die Winkel, die diese Seiten einschließen, gleich sind, so sind beyde Dreyecke congruent und gleich.

Anmerkung. Die eben vorgetragene Lehre von der Congruenz der Dreyecke ist von der größten Wichtigkeit; weil sie den Grund von der ganzen Geometrie enthält. Anfänger sollen sich daher alle Mühe geben, dieselbe gut aufzufassen. Man drückt diese Lehre von der Congruenz der Dreyecke auch so aus: Ein Dreyeck wird durch drey Seiten, oder auch zwey Seiten und den eingeschlossenen Winkel, oder endlich durch eine Seite und zwey dabey liegende Winkel vollkommen bestimmt, so, daß es nicht möglich ist, aus diesen gegebenen Stücken zwey verschiedene Dreyecke zu verfertigen. Alle Dreyecke also, bey welchen entweder alle Seiten, oder zwey Seiten sammt dem eingeschlossenen Zwischenwinkel, oder eine Seite mit den zwey anliegenden Winkeln gleich sind, sind sich vollkommen gleich; sie sind weder an Gestalt, noch Größe verschieden; sie können bloß durch den Platz, den sie einnehmen, verschieden seyn.

§. 13.

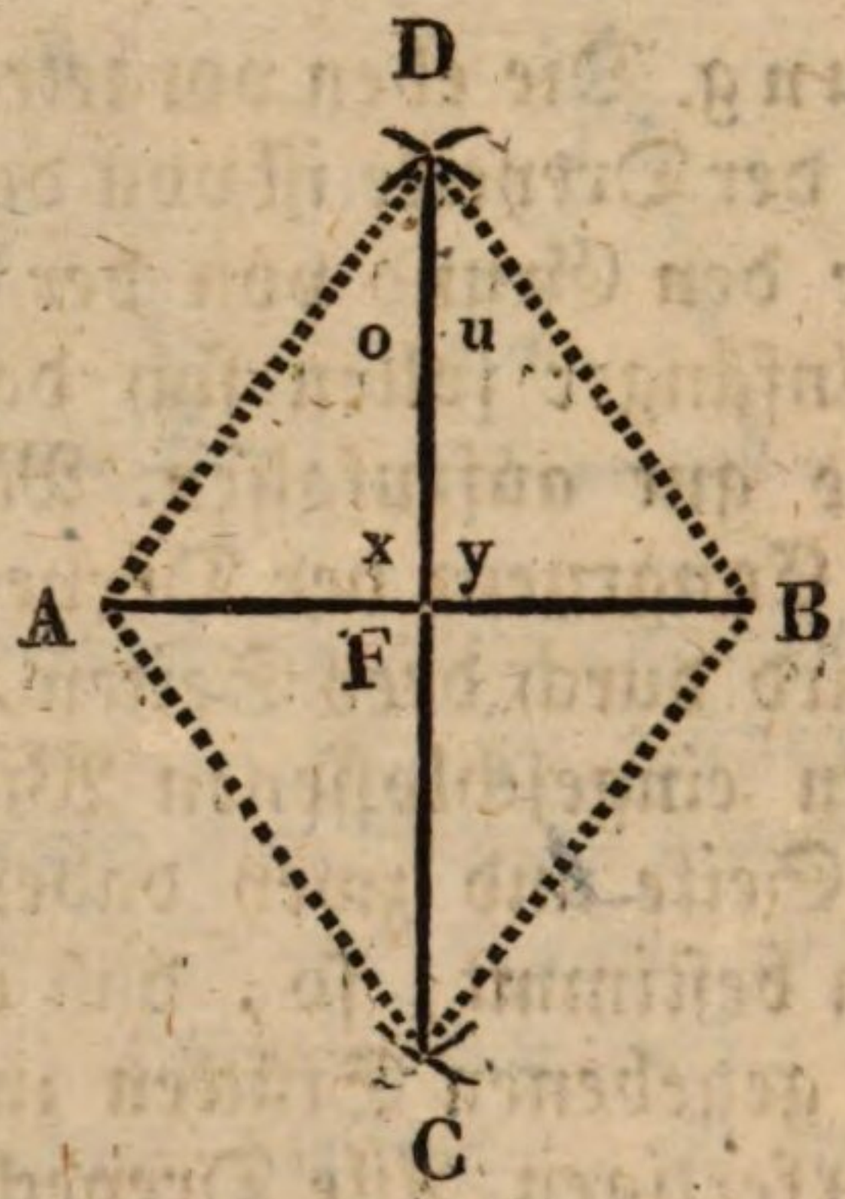
Aufgabe.

Eine gerade Linie zu halbiren, oder was eines ist, in zwey gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. 1) Man errichte über die gegebene Linie AB nach §. 4. ein gleichschenkligtes Dreyeck

von beliebiger Größe; eben dieses Dreyeck beschreibe man auch unterhalb der Linie AB.

2) Von der Spitze D bis zur entgegengesetzten Spitze C ziehe man eine gerade Linie, so wird in dem Puncte F der Mittelpunct von der gegebenen Linie AB sich finden. Man sehe die Ausarbeitung, wie folgt:



Beweis. Das Dreyeck DAC ist gleich dem Dreyecke DCB; denn in beyden Dreyecken sind alle gleichnahmigen Seiten einander gleich; DA=DB, AC=BC, weil sie Radien gleicher Kreise sind, und die Seite DC, welche zu beyden Dreyecken gehört, ist sich selbst gleich; folglich ist das △ DAC $\overline{\text{S}}$ △ DCB (§. 7.); also ist auch der ∠ o=∠ u; folglich ist auch das △ ADF=△ DFB; weil in beyden diesen Dreyecken zwey gleiche Seiten sind, und ein von diesen Seiten eingeschlossener gleicher Winkel darin vorkommt (§. 12.), nähmlich AB=DB, weil sie Radien gleicher Kreise sind, DF=DF, und ∠ o=∠ u; also ist auch AF=FB; folglich ist der Punct F der Mittelpunct von der Linie AB. Durch das gezeigte Verfahren wird also jede gerade Linie in zwey gleiche Theile getheilt.

Anmerkung. In der Ausübung kann eine gerade Linie am leichtesten und geschwindesten ohne regelmäßige Kunst bloß durch Hülfe des Handzirkels in zwey gleiche Theile getheilt werden. Man setzet nähmlich den einen Fuß des Zirkels an einen Endpunct der gegebenen Linie, und den andern Fuß spannt man so weit aus, bis er dem Augenmaße nach die Mitte zu erreichen scheint. Alsdann schlagt man den Zirkel um; trifft der umgeschlagene Fuß im andern Ende der Linie ein, so ist der mittlere Punct vom andern Fuße bestimmt; geht aber der Fuß über den Punct hinaus, oder erreicht er den Punct gar nicht, so muß man im ersten Falle den Zirkel um etwas enger und im zweyten um etwas weiter machen, wobey man sich nach dem Augenmaße zu richten hat. Diese Arbeit setzet man so lange fort, bis man den Punct gefunden hat, der die Linie in zwey gleiche Theile theilt. Durch eine kurze Uebung wird man bald in den Stand gesetzt, jede Linie ohne viele Mühe zu halbiren.

§. 14.

Aufgabe.

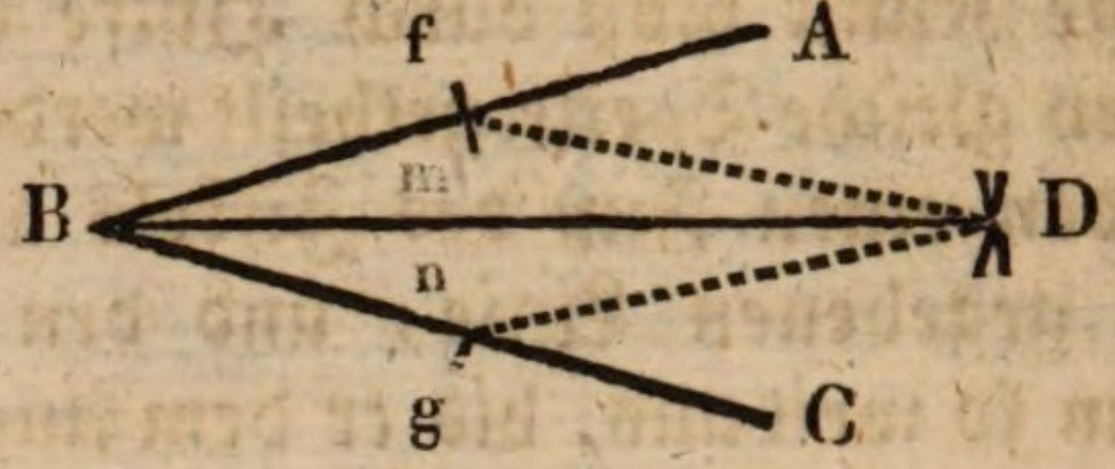
Einen gegebenen gradlinigten Winkel zu halbiren.

Auflösung. 1) Man schneide an den beyden Schenkeln des gegebenen Winkels ABC mit der nähmlichen Oeffnung des Zirkels zwey gleiche Theile ab, in f und g.

2) Von den Puncten f und g mache man außerhalb mit beliebiger Oeffnung des Zirkels zwey Kreise, die einander durchschneiden.

3) Von ihrem Durchschneidungspuncte D bis zur Spitze des Winkels B ziehe man eine gerade Linie,

so wird dieselbe den Winkel in zwey gleiche Theile abtheilen.



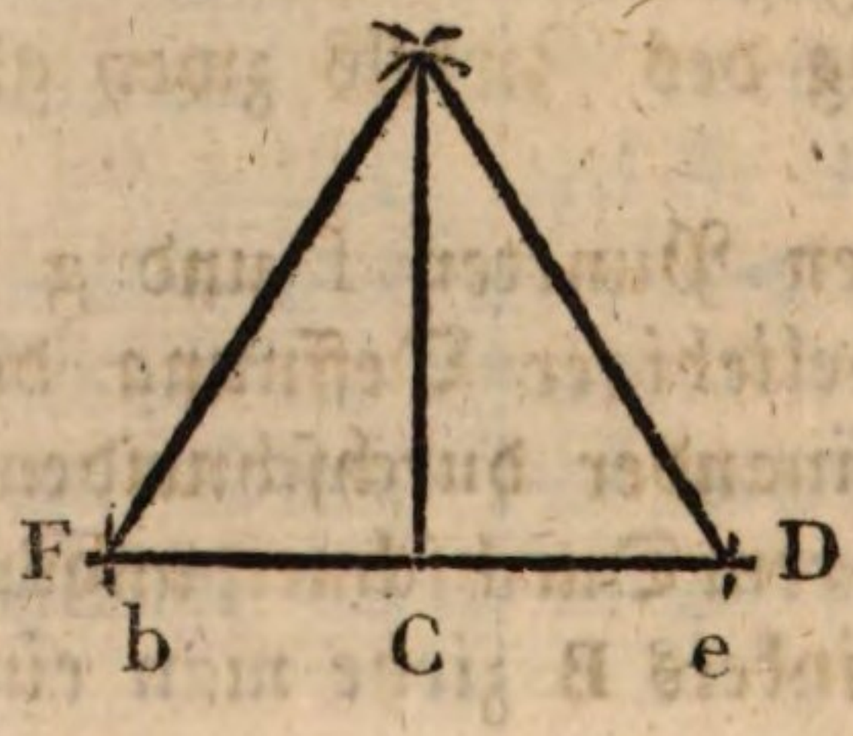
Beweis. Denn das △ B f D ≅ △ B g D (nach §. 7.); also ist auch der ∠ m = ∠ n; und folglich ist der Winkel ABC in zwey gleiche Theile getheilt.

§. 15.

Aufgabe.

Aus einem gegebenen Puncte einer gegebenen Linie auf diese eine senkrechte Linie zu errichten.

Auflösung. Die gegebene Linie sey FD, und der Punct C. Man schneide nun durch Hülfe des Zirkels aus C gegen F und D mit beliebiger Oeffnung zwey gleiche Theile ab, nähmlich Cb und Ce. Ueber be errichte man ein gleichschenkligtes Dreyeck von beliebiger Größe bGe. Alsdann ziehe man aus der Spitze G zu dem gegebenen Punct eine gerade Linie GC, so wird diese auf dem Puncte C senkrecht stehen.



Beweis. Denn die beyden Dreyecke GbC und GCe sind einander gleich (nach §. 7.); folglich ist auch der < GCb = < GCe; die Linie GC bildet also mit der Linie FD zwey Nebenwinkel, die einander gleich sind; folglich steht die Linie GC auf der Linie FD senkrecht (erst. Abschn. §. 6.).

1. Anmerkung. Wäre der Endpunct gegeben, auf den eine senkrechte errichtet werden soll; so müßte man die Linie um ein Stück verlängern, und dann nach der eben gezeigten Art verfahren.

2. Anmerkung. Wäre der Punct, aus dem man auf eine andere gerade Linie eine senkrechte ziehen soll, außerhalb der Linie gegeben; so müßte man über diese Linie ein gleichschenkligtes △ errichten, doch so, daß die Spitze davon mit dem gegebenen Puncte zusammenfließt; das nähmliche △ errichte man auch unterhalb dieser Linie, und aus der Spitze des untern ziehe man auf die Spitze des obern △ eine gerade Linie, so wird sie auf derselben senkrecht stehen (nach §. 13.).

3. Anmerkung. Man kann auch durch Hülfe des Transporteurs auf den Punct einer gegebenen Linie eine senkrechte errichten. Man leget nähmlich das Centrum des Transporteurs auf den gegebenen Punct, und wendet ihn so, daß der Durchmesser desselben an der gegebenen Linie anliegt. Bey dem 90sten Grade auf der Kreisfläche des Transporteurs machet man mit einer zarten Spitze einen feinen Punct, von dem man zu dem gegebenen Puncte eine gerade Linie zieht; diese steht dann auf der gegebenen Linie senkrecht; denn sie bildet mit ihr, wie es ihre Verfertigung ausweiset, einen rechten Winkel; eine Linie aber, die auf einer andern so steht, daß sie mit ihr einen rechten Winkel bildet, steht auf ihr senkrecht.

Man pflegt auch in der practischen Geometrie vermittelst des Winkelmaßes senkrechte Linien zu errichten. Es ist dieses ein solches Werkzeug, welches aus zwey Linialen besteht, die so zusammengefügt sind, daß sie bey ihrer Zusammenfügung einen rechten Winkel bilden. Um nun durch Hülfe dieses Instruments auf einen Punct einer geraden Linie eine senkrechte errichten zu können, verfährt man folgendermaßen: Den einen Winkelhaken (das eine Linial) legt man an die gegebene Linie; schiebt es in dieser Lage bis zum gegebenen Punct, auf den eine senkrechte gezogen werden soll; alsdann zieht man an der Seite des andern Winkelhakens eine gerade Linie, welche auf der gegebenen Linie senkrecht stehen wird; denn, wie vorausgesetzt wird, steht die Linie des Winkelhakens, nach welcher die Linie gezogen wird, auf der Linie des andern Winkels, welche an die gegebene Linie gelegt wird, senkrecht; folglich muß auch die gezogene Linie auf der gegebenen Linie senkrecht stehen.

Noch ein anderes Werkzeug braucht man in der practischen Geometrie zur Zeichnung senkrechter Linien; es ist dieses eine dreyeckige Fläche, die einen rechten Winkel hat, aus Messing, oder besser, weil das Messing das Papier beschmutzet, aus dünnem Holze oder Bein verfertiget, und um es halten und füglich vom Papier wegnehmen zu können, ist es in seiner Mitte mit einem runden Loche versehen. Um mit diesem rechtwinkligten Dreyecke eine senkrechte auf einen gegebenen Punct einer gegebenen Linie ziehen zu können, legt man die eine Seite dieses Instruments, welche einen Schenkel des rechten Winkels ausmachet, an die gegebene Linie so an, daß sie diese decket, und daß sie mit ihrem Endpuncte den gegebenen Punct auf der gegebenen Linie berührt;

alsdann zieht man nach der Richtung des andern Schenkels des Instruments, der über die gegebene Linie hervorraget, eine gerade Linie, welche die verlangte senkrechte Linie ist; weil, wie vorausgesetzt ist, die hervorragende Linie des Instruments auf der andern an der gegebenen Linie angelegte Seite des Instruments senkrecht steht; indem sie mit dieser einen rechten Winkel bildet.

Das Winkelmaß und auch das eben beschriebene rechtwinkligte Dreyeck findet man in einem Reißzeuge.

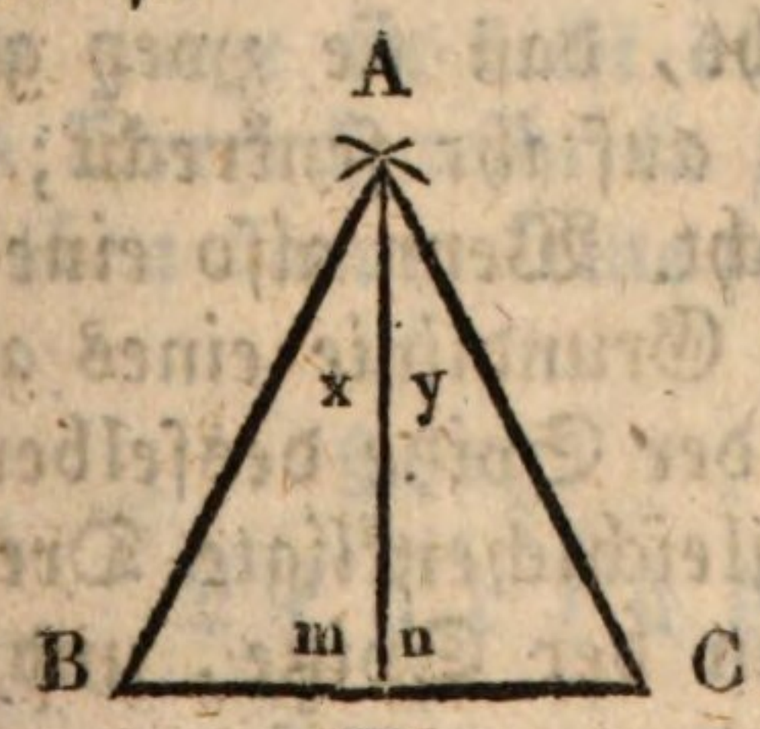
§. 16.

Lehrsatz.

Eine gerade Linie, die aus der Mitte der Grundlinie eines gleichschenkligten Dreyeckes nach der Spitze desselben gezogen worden, halbirt das gleichschenkligte Dreyeck und den Winkel desselben an der Spitze, und steht auf der Grundlinie senkrecht.

Erläuterung und Beweis des Lehrsatzes.

Hier folgt ein gleichschenkligtes △, nähmlich ABC, in dem aus der Mitte D der Grundlinie BC eine gerade Linie AD nach der Spitze desselben, nähmlich nach A gezogen ist.



Nun soll 1) bewiesen werden, daß die gerade Linie AD das gleichschenkligte Dreyeck in zwey gleiche Dreyecke theile, d. h. halbire, daß das △ ABD = ADC sey. Dieß wird so bewiesen: In beyden diesen Dreyecken sind alle gleichnahmigen Seiten einander gleich; also sind die ganzen Dreyecke gleich (§. 7.); denn AB = AC; weil das Dreyeck ABC ein gleichschenkligtes Dreyeck ist; ferner ist BD = DC; weil, wie vorausgesetzt wird, die Linie AD aus der Mitte der Linie BC gezogen ist, und AD = AD; die aus der Mitte der Grundlinie BC gegen die Spitze A gezogene gerade Linie AD halbirt also das gleichschenkligte Dreyeck.

2) Soll bewiesen werden, daß die Gerade AD auch den Winkel an der Spitze halbire, daß also x = y sey. Daß x = y sey, erhellet aus dem vorigen Beweise; denn da die Dreyecke ABD und ADC einander gleich sind, wie Nro. 1. bewiesen wurde, so sind auch die gleichnahmigen Winkel x und y einander gleich; die gerade Linie AD halbirt also auch den Winkel des gleichschenkligten Dreyeckes an der Spitze.

3) Endlich soll bewiesen werden, daß AD auf DC senkrecht stehe. Dieß ergibt sich wieder aus der Nro. 1. bewiesenen Gleichheit der Dreyecke ABD und ABC; denn da diese Dreyecke einander gleich sind, so müssen auch die gleichnahmigen Winkel m und n einander gleich seyn; diese Winkel nun bildet die Linie AD, und sie sind Nebenwinkel; eine Linie aber, die auf einer andern so steht, daß sie zwey gleiche Nebenwinkel bildet, steht auf ihr senkrecht; folglich steht AD auf BC senkrecht. Wenn also eine gerade Linie aus der Mitte der Grundlinie eines gleichschenkligten Dreyeckes nach der Spitze desselben gezogen ist, so halbirt sie das gleichschenkligte Dreyeck und den Winkel desselben an der Spitze, und steht auf der Grundlinie senkrecht.

1. Zusatz. Eine gerade Linie, die den Winkel an der Spitze eines gleichschenkligten Dreyeckes halbirt, halbirt das Dreyeck selbst und seine Grundlinie, und steht auf dieser senkrecht; denn wenn die Linie AD den Winkel A halbirt, wenn also x = y ist, so sind dann offenbar die Dreyecke ABD und ADC einander gleich; weil in beyden zwey Seiten sammt dem von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel einander gleich sind, nähmlich AB = AC, AD = AD, und der $\angle x = \angle y$ (§. 12.); ferner ist unter dieser Voraussetzung, daß die Linie AD den Winkel A in dem gleichschenkligten Dreyecke ABC halbire, auch die Linie BD = DC; weil, wie so eben bewiesen wurde, die Dreyecke ABD und ADC einander gleich sind; folglich auch BD = DC; letztens endlich müssen auch, wenn die Linie AD den Winkel A halbirt, da dann die beyden Dreyecke ABD und ADC einander gleich sind, die Winkel m und n gleich seyn, und die Linie AD muß also auf BC senkrecht stehen. Eine gerade Linie, die den Winkel an der Spitze eines gleichschenkligten Dreyeckes halbirt, halbirt also u. s. w., wie oben.

2. Zusatz. Wenn man aus der Mitte der Grundline eines gleichschenkligten Dreyeckes eine senkrechte Linie errichtet, so muß diese durch die Spitze des Dreyeckes gehen; denn ginge sie nicht durch die Spitze, so könnte sie das Dreyeck nicht in zwey gleiche Theile theilen, und eben darum keine senkrechte Linie seyn.

§. 17.

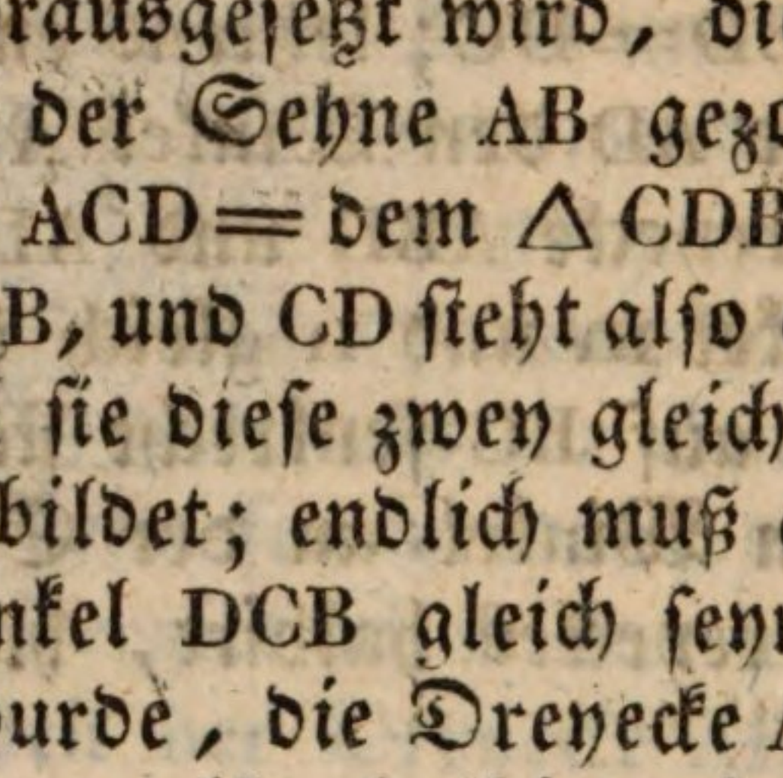
Lehrsatz.

Eine gerade Linie, die aus der Mitte

einer Sehne nach dem Mittelpuncte des Kreises gezogen worden, steht auf der Sehne senkrecht und halbirt den Winkel des Ausschnittes.

Erläuterung und Beweis des Lehrsatzes.

Wenn in der beygezeichneten Figur die gerade Linie CD, die aus der Mitte der Sehne AB, aus dem Puncte D nach dem Mittelpuncte C gezogen worden, so steht CD auf der Sehne AD senkrecht und halbirt den Winkel des Ausschnittes, nähmlich den Winkel C; denn in den zwey Dreyecken ACD und CDB sind die drey gleichnahmigen Seiten einander gleich; denn AC = CB, als Radien eines und des nähmlichen Kreises, ferner ist CD = CD, und AD = DB, weil, wie vorausgesetzt wird, die gerade Linie CD auf der Mitte der Sehne AB gezogen worden; folglich ist das △ ACD = dem △ CDB; also ist auch der ∠ ADC = CDB, und CD steht also auf der Sehne AB senkrecht, weil sie diese zwey gleichen Nebenwinkel ADC und CDB bildet; endlich muß auch der Winkel ACD dem Winkel DCB gleich seyn, weil, wie vorher bewiesen wurde, die Dreyecke ACD und CDB einander gleich sind; also halbirt die gerade Linie den Winkel des Ausschnittes, nähmlich den ∠ C.



Eine gerade Linie, die aus der Mitte einer Sehne nach dem Mittelpuncte des Kreises gezogen worden, steht also u. s. w.

1. Zusatz. Eine gerade Linie, die den Winkel eines Ausschnittes halbirt, halbirt auch die zu dem Bogen des Ausschnittes gehörige Sehne, und steht auf ihr senkrecht; denn wenn die gerade Linie DC den Winkel des Ausschnittes ACB halbirt, und also der $\angle$ ACD = dem $\angle$ DCB ist, so sind die zwey Dreyecke ACD und CDB einander gleich (nach §. 12.); folglich ist auch AD = DB, und der Winkel ACD = dem Winkel CDB; also halbirt die gerade Linie CD die zu dem Bogen des halben Winkels C gehörige Sehne AB, und steht auf ihr senkrecht, weil sie zwey gleiche Nebenwinkel bildet.

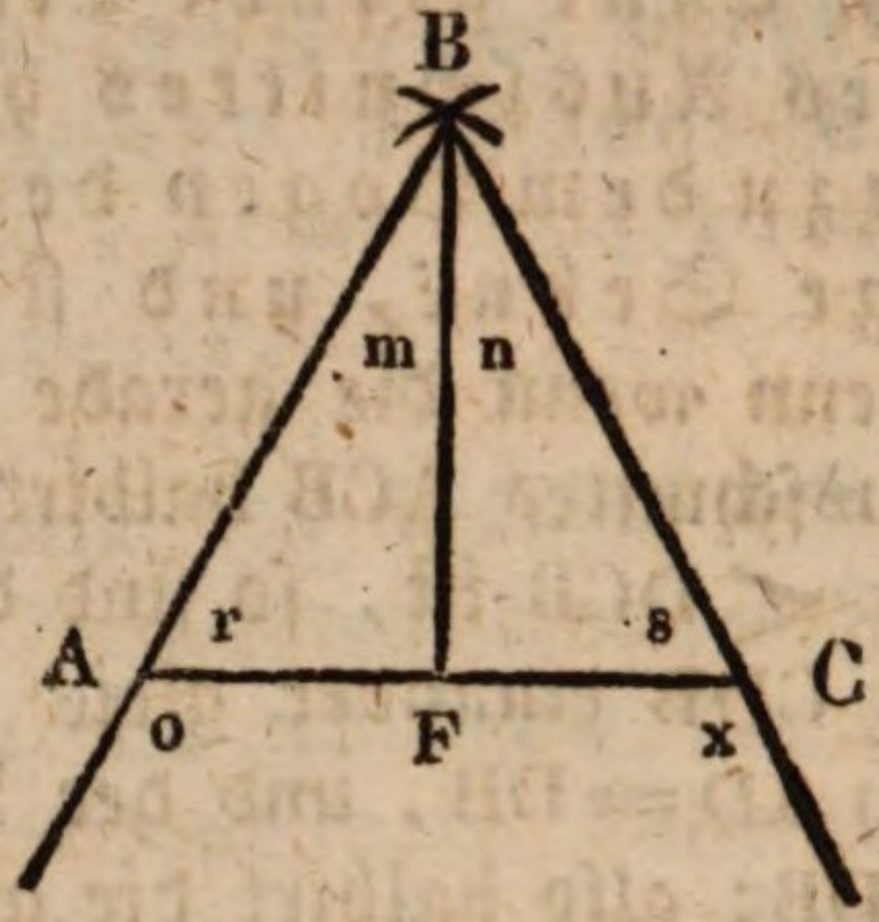
2. Zusatz. Wenn man aus der Mitte der Sehne eine senkrechte Linie auf dieselbe errichtet, und diese nach dem Mittelpuncte des Kreises zu verlängert, so geht sie durch den Mittelpunct; denn wenn (sieh die vorige Figur an) CD auf AB senkrecht steht, und also der $\angle$ ADC = $\angle$ CDB, wenn ferner, wie dieses alles vorausgesetzt wird, AD = DB ist, so muß, da das $\triangle$ ACB ein gleichschenkligtes Dreyeck ist, nach §. 16. 2. Zus. die Linie CD durch C gehen; denn sonst könnte sie unmöglich zwey gleiche Nebenwinkel auf der Grundlinie, d. i. auf der Sehne AB bilden.

§. 18.

Lehrsatz.

In einem jeden gleichschenkligten Dreyecke sind die Winkel über der Grundlinie, und wenn man die Schenkel verlängert, auch die Winkel unter der Grundlinie einander gleich.

Bayerische Staatsbibliothek München



Erläuterung und Beweis des Lehrsatzes.

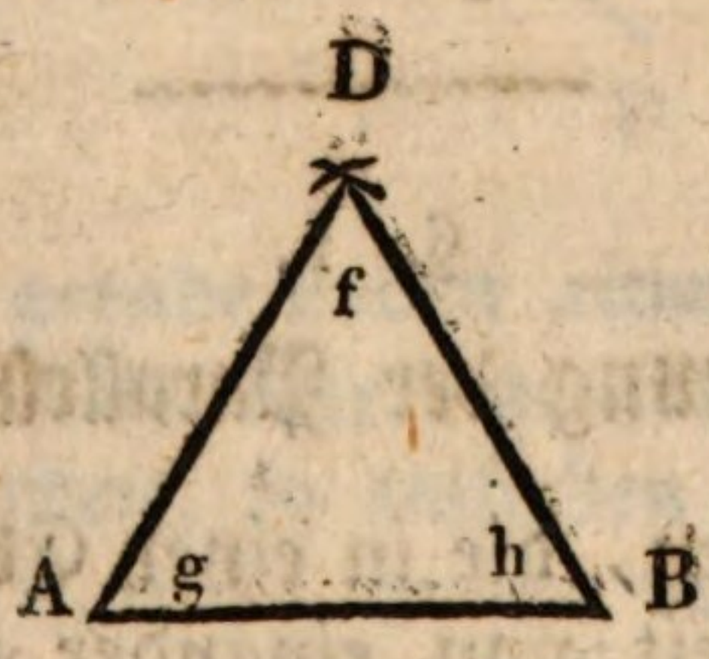
Hier haben wir ein gleichschenkligtes Dreyeck, nähmlich ABC; nun sollen nach der Aussage des Lehrsatzes in demselben 1) die Winkel an der Grundlinie, nähmlich r und s, 2) auch die beyden äußern Winkel o und x, die durch die Verlängerung der beyden gleichen Seiten AB und BC entstanden sind, einander gleich seyn. Um den ersten Theil des Lehrsatzes beweisen zu können, theile man das △ ABC durch BF in zwey gleiche Hälften. Auf solche Art entstehen zwey Dreyecke ABF und BFC, welche einander gleich sind (§. 16.), weil in beyden alle drey gleichnahmigen Seiten einander gleich sind; also muß auch der Winkel r dem Winkel s gleich seyn; diese zwey Winkel liegen aber an der Grundlinie; folglich sind in einem jeden gleichschenkligten Dreyecke die zwey Winkel an der Grundlinie einander gleich; denn jedes gleichschenkligtes Dreyeck läßt sich in zwey congruente Dreyecke theilen, wenn man aus der Spitze desselben auf den Mittelpunct der Grundlinie eine gerade Linie zieht, wo es sich dann offenbar ergibt, daß die zwey an der Grundlinie liegenden Winkel einander gleich sind.

Beweis des zweyten Theiles. Die Winkel o und r, s und x sind Nebenwinkel, weil sie

neben einander liegen, und einen gemeinschaftlichen Schenkel und den nähmlichen Scheitel haben; folglich sind die Winkel o + r = 180°, und s + x = 180° (viert. Abschn. §. 11.); da aber, wie vorher bewiesen wurde, r = s ist, so ist also auch o — r = x — s; folglich o = x; denn wenn der Winkel r z. B. 40° enthält, und man ihn von r + o = 180° abzieht, so bleiben noch für den ∠ o 140°, weil 180° — 40° = 140°. So auch s + x halten zusammen 180°, wenn man nun auch davon den ∠ s, der so wie r = 40° ist, abzieht; so bleiben auch für den ∠ x 140°; also sind die beyden äußern Winkel, welche durch die Verlängerung der beyden gleichen Seiten in dem obigen gleichschenkligten Dreyecke entstanden sind, einander gleich.

Die beyden äußern Winkel, welche durch die Verlängerung der beyden gleichen Seiten bey einem gleichschenkligten Dreyecke entstehen, sind also gleich.

1. Zusatz. In einem jeden gleichseitigen Dreyecke sind alle drey Winkel gleich groß.



Beweis. Das beygezeichnete Dreyeck ist ein gleichseitiges Dreyeck, und hat, wie es da steht, AB zu seiner Grundlinie; folglich müssen die Winkel g und h, da die zwey Seiten über der Grundlinie AD und DB einander gleich sind, gleich groß seyn (vermöge des vorigen Lehrsatzes); nun können wir auch

die Seite DB zur Grundlinie annehmen, und alsdann sind die Winkel f und h, weil sie an der Grundlinie liegen, einander gleich; letztens können wir auch die Seite DA zur Grundlinie annehmen, wo sodann die an dieser Grundlinie liegenden Winkel f und g einander gleich sind; also sind alle drey Winkel g, h, f einander gleich; in einem gleichseitigen Dreyecke sind also alle Winkel gleich groß; gleichseitige Dreyecke sind also alle Winkel gleich groß; gleichseitige Dreyecke sind also auch gleichschenkligt.

2. Zusatz. Weil alle Winkel und Seiten bey einem gleichseitigen Dreyecke einander gleich sind, so ist also jedes gleichseitige Dreyeck, eine reguläre Figur.

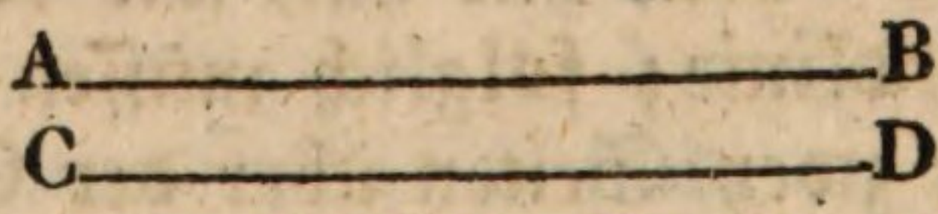
Sechster Abschnitt.

Von den Parallellinien.

§. 1.

Erklärung der Parallellinien.

Gerade Linien, die in einer Ebene liegen, und überall gleich weit von einander abstehen, heißen parallel oder gleichlaufend. Die Linien AB und CD



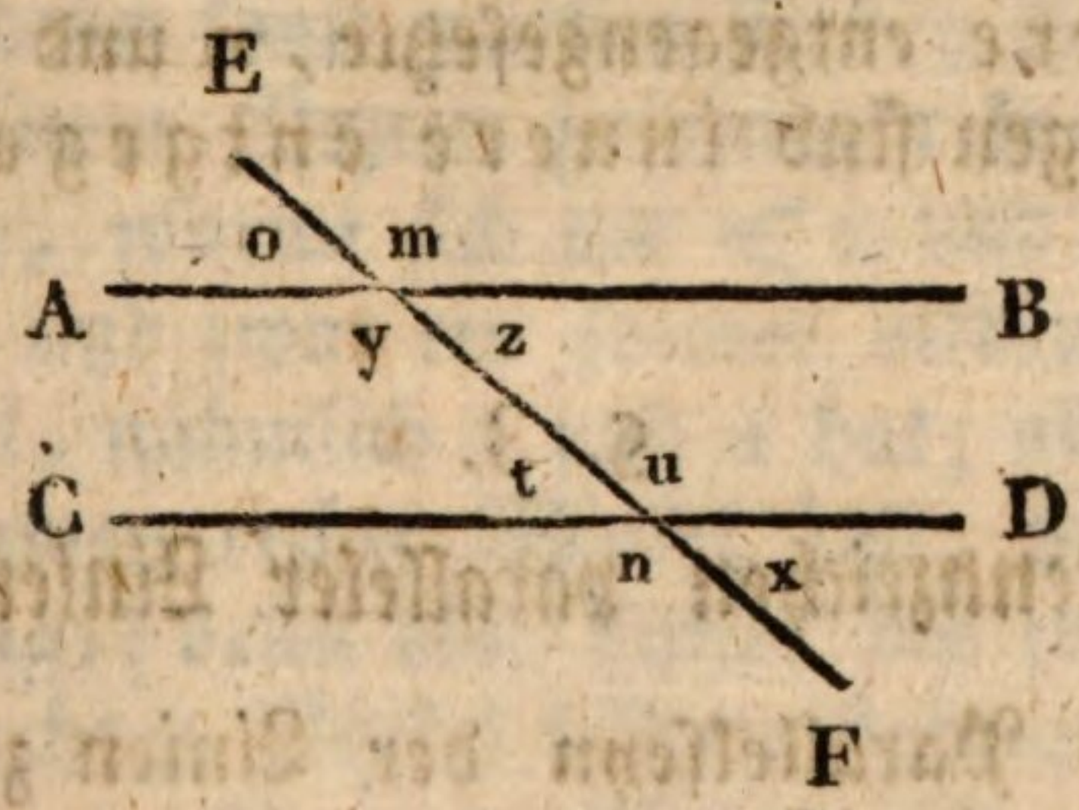
sind von einer solchen Beschaffenheit, daß sie in allen Puncten gleich weit von einander abstehen; sie sind

daher gleichlaufende oder Parallellinien. Wenn man zwischen Parallellinien senkrechte Linien errichtet, so müssen diese gleich groß, und zu einander selbst parallel seyn; dieses bringt schon der Begriff des Parallelseyns, und der Begriff einer senkrechten Linie mit sich.

Das Zeichen des Parallelseyns ist (∥), und man schreibt z. B. für AB ist parallel mit CD, kurz AB ∥ CD.

§. 2.

Erklärung der Winkel, welche entstehen, wenn zwey gerade Linien von einer dritten geraden Linie durchschnitten werden.



Wenn zwey gerade neben einander herlaufende Linien (AB und CD) von einer dritten Linie (EF) durchschnitten werden, so entstehen dadurch 8 Winkel (o, m, y, z, t, u, n, x), welche von ihrer Lage und Beziehung auf einander verschiedene Nahmen haben. Die vier Winkel, welche sich innerhalb der zwey Linien befinden, wie y, z, t und u heißen innere, und die vier außerhalb der zwey Linien befindlichen Winkel, wie o, m, n und x, heißen äußere Winkel. Sowohl die äußern, als innern Winkel liegen entweder an einer Seite, oder sie sind Wechselwin-

kel. So sind y und t, ferner z und u innere auf einer Seite liegende Winkel, o und n, ferner m und x aber äußere auf einer Seite liegende Winkel. Die Winkel u und y, ferner z und t, da sie wechselweise oder an verschiedenen Seiten der schneidenden Linie, und zwar innerhalb der zwey Linien AB und CD liegen, heißen innere Wechselwinkel; m und n, ferner x und o hingegen, da sie wechselweise an der schneidenden Linie, und zwar außerhalb der zwey geraden Linien AB und CD liegen, führen den Nahmen äußere Wechselwinkel. Endlich können noch die äußern und innern Winkel nach ihrer Entgegensetzung betrachtet werden, wo man innere und äußere entgegengesetzte Winkel erhält. So sind o und t, ferner m und u äußere entgegengesetzte, n und y, ferner x und z hingegen sind innere entgegengesetzte Winkel.

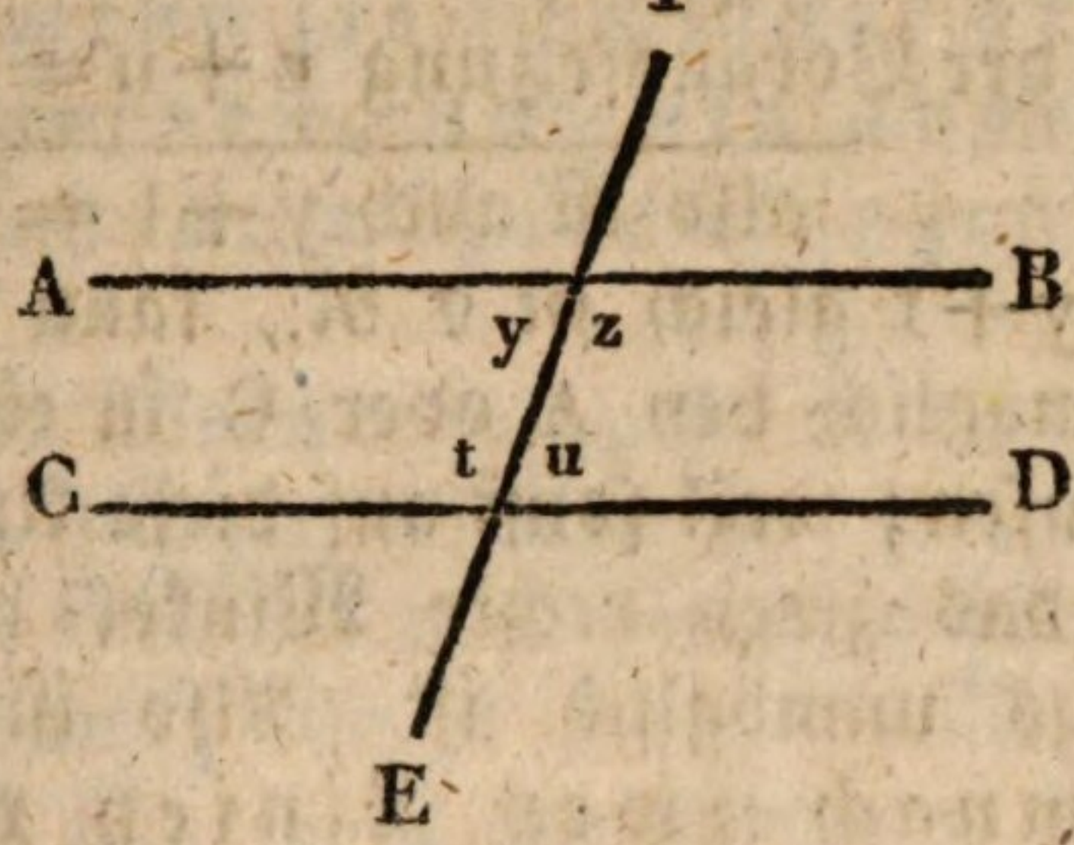
§. 3.

Kennzeichen paralleler Linien.

Um das Parallelseyn der Linien zu erkennen, muß man gewisse Kennzeichen ableiten, aus denen man erkennen kann, ob zwey oder mehrere Linien gleichlaufend sind oder nicht. Diese Kennzeichen sind in folgenden Lehrsätzen enthalten:

1. Lehrsatz. Zwey gerade Linien sind parallel, wenn sie von einer dritten durchschnitten werden, und zwey innere auf einer Seite liegende Winkel zwey rechten Winkeln gleich sind, oder was eines ist, wenn sie zusammen 180° betragen.

Wenn in der beygezeichneten Figur z und u = 2 R., so ist AB ∦ CD.



Beweis. Unter diesen Umständen können AB und CD nicht nach der Seite von B und D zusammenlaufen; denn sonst würden sie bey ihrer Verlängerung in einem Puncte zusammen kommen, und mit der Linie, woran sich die ∠ z und u befinden, ein Dreyeck, und zwar ein solches bilden, das zwey rechte Winkel, nähmlich z und u hat; allein ein △, in welchem zwey rechte Winkel sind, ist unmöglich (ist ein Unding); denn eine Linie, die mit einer andern einen rechten Winkel bildet, steht auf derselben senkrecht; wenn also zwey Linien mit einer dritten zwey rechte Winkel bilden, so stehen beyde auf derselben senkrecht, und können eben deßwegen, weil sie sich auf keine Seite neigen, niemahls in irgend einem Puncte zusammen kommen; in einem Dreyecke können also unmöglich zwey rechte Winkel sich befinden.

Wenn also z und u rechte Winkel sind, so können die zwey Linien AB und CD niemahls nach der Seite von B und D zusammen laufen.

Auch nach der Seite von A und C können sie ebenfalls nicht zusammen laufen; denn

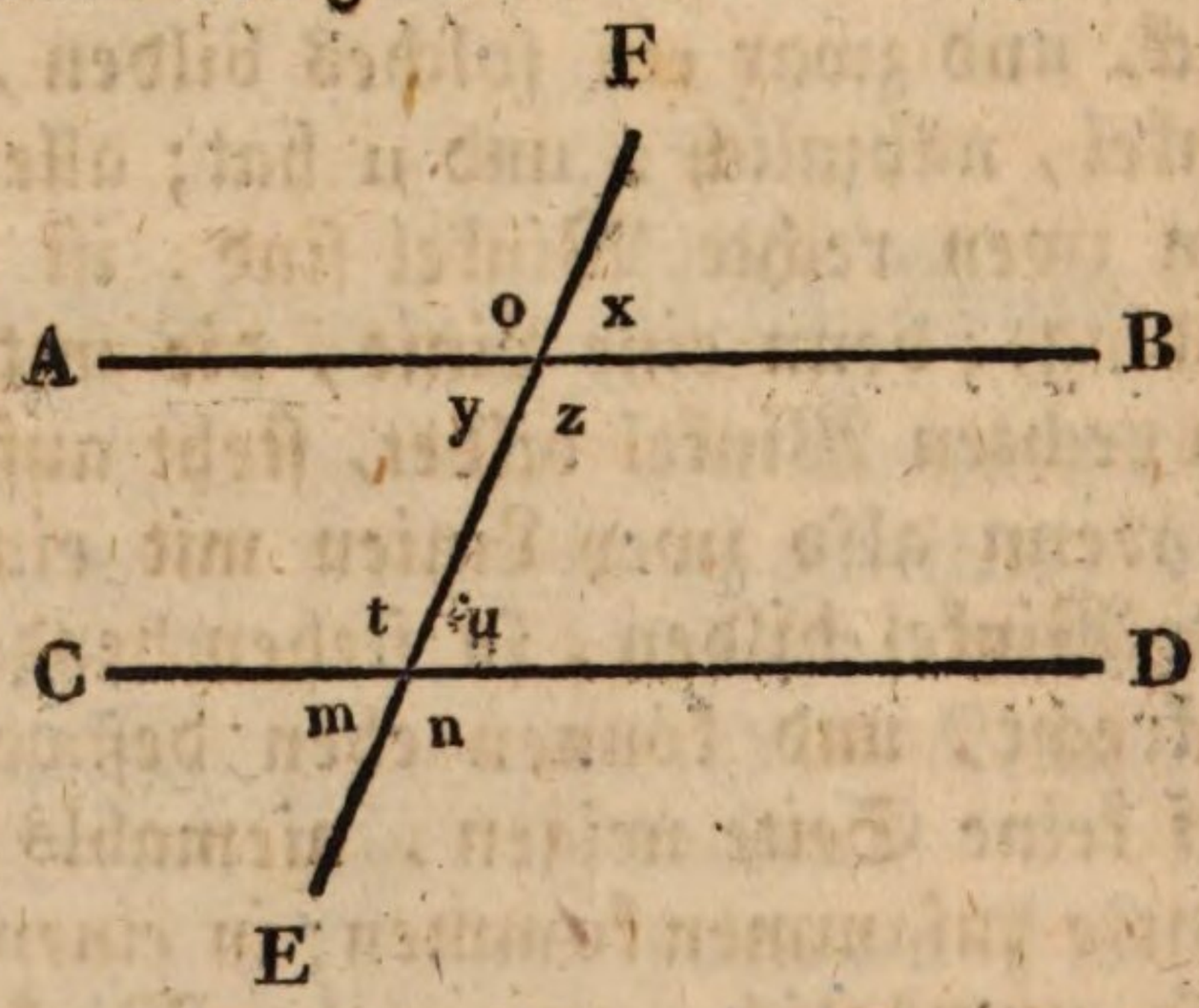
$y + z = 2$ R. oder 180° } Viert. Abschn.
$t + u = 2$ R. } §. 11.

also $y + z + t + u = 4$ R.;
nun ist nach der Voraussetzung $z + u = 2$ R.,

also ist auch $y + t = 2$ R.

Wenn aber $y + t$ gleich ist 2 R., kann die Linie BA und DC unmöglich bey A oder C in einem Puncte zusammenlaufen; weil sonst auf diese Art ein △ herauskäme, das zwey rechte Winkel hat, welches schlechterdings unmöglich ist. Also ist AB ∦ CD. Wenn demnach zwey Linien von einer dritten durchschnitten werden, u. s. w. wie oben.

2. Lehrsatz. Zwey gerade Linien sind parallel, wenn sie von einer dritten geschnitten werden, und zwey äußere auf einer Seite liegende Winkel sind = 2 R.



Beweis. Wenn $x + n = 2$ R., so ist AD ∦ CD.

Den $x + z = 2$ R. } Viert. Abschn. §. 11.
$u + n = 2$ R. }

also ist $x + z + u + n = 4$ R.;
nun ist aber $x + n = 2$ R.,

also ist auch $z + u = 2$ R.

Wenn aber (nach dem erst. Lehrs.) z + u gleich zwey rechten Winkeln ist, so ist AB ∥ CD. Also u. s. w.

3. Lehrsatz. Zwey gerade Linien sind parallel, wenn sie von einer dritten geschnitten werden, und ein äußerer Winkel ist gleich dem ihm entgegengesetzten innern.

Beweis. Wenn x = u, so ist AB ∥ CD; denn x + z = 2 R. (Viert. Abschn. §. 11.), und x = u; wenn ich aber Gleiches von Gleichem hinweg nehme, so bleibt Gleiches; also ist z + u = 2 R.; wenn aber z + u = 2 R. ist, so ist (nach dem 1. Lehrs.) AB ∥ CD. Folglich u. s. w.

4. Lehrsatz. Zwey gerade Linien, die von einer dritten geschnitten werden, sind parallel, wenn zwey innere Wechselwinkel gleich sind.

Beweis. Wenn y = u, so ist AB ∥ CD; denn y + z = 2 R., und u ist = y; also u + z = 2 R.; folglich ist auch (nach dem 1. Lehrs.) AB ∥ CD. Also u. s. w.

5. Lehrsatz. Zwey gerade Linien sind parallel, die von einer dritten durchschnitten werden, wenn die äußern Wechselwinkel einander gleich sind.

Beweis. Wenn o = n, so ist AB ∥ CD.

Denn n = t, weil es Vertikalwinkel sind.

und n = o

---

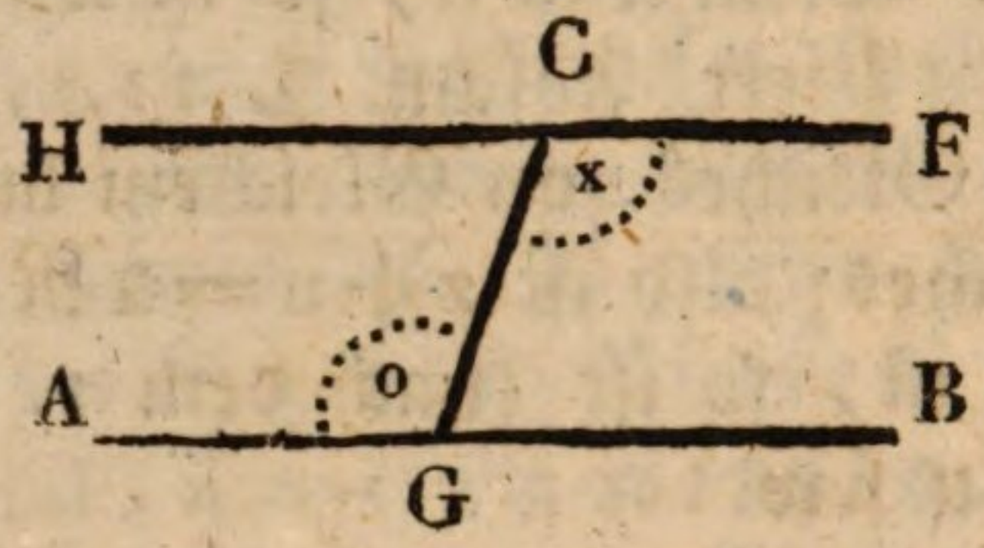
also t = o.

Wenn aber (nach dem 3. Lehrs.) ein äußerer Winkel dem innern entgegengesetzten gleich ist, so ist AB ∥ CD. Also u. s. w.

§. 4.

Aufgabe.

Es ist eine gerade Linie und ein Punct außerhalb derselben gegeben, man soll durch diesen Punct eine Linie ziehen, die mit ihr parallel lauft.

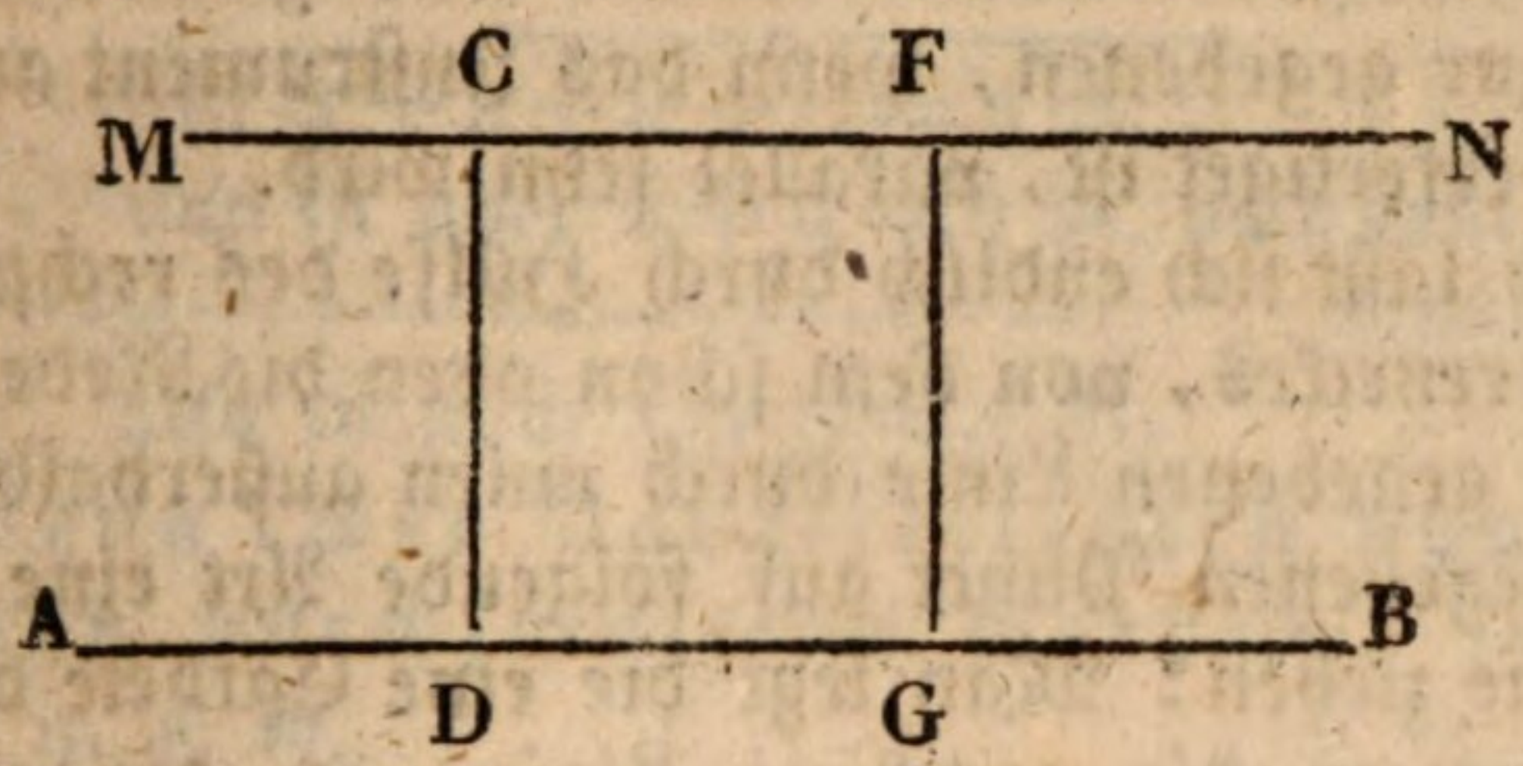


Auflösung. AB sey die gerade Linie und C der gegebene Punct, durch den man eine Parallellinie zu AB ziehen soll. Um dieses zu bewerkstelligen, ziehe man aus dem Puncte C auf AB eine gerade Linie CG. Nun trage man den Winkel AGC an den Punct C gegen B auf, nähmlich FCG; man verlängere alsdann CF nach H, so wird FH ∥ BA seyn; denn die innern Wechselwinkel x und o sind einander gleich; folglich sind (nach dem viert. Lehrs.) FH und AB zu einander parallel.

Zweyte Auflösung durch senkrechte Linien.

Da die senkrechten Linien zwischen zwey Parallellinien ihre Weite bestimmen, so läßt sich zu einer gegebenen Linie auch dadurch eine Parallellinie ziehen, wenn man auf der gegebenen Linie senkrechte Linien von gleicher Höhe errichtet und durch die Endpuncte derselben eine gerade Linie zieht. Soll die zu ziehende Linie durch einen gewissen Punct gehen, so mache man die senkrechten Linien so lang, als der

gegebene Punct von der gegebenen Linie entfernt ist. Z. B. Es soll zu AB durch den Punct C eine Parallellinie gezogen werden.



Man errichte auf der gegebenen Linie AB solche senkrechte Linien, die mit der Weite, welche der bestimmte Punct C von der gegebenen Linie AB hat, überein kommen, nähmlich CD und FG, und ziehe dann MN, so ist diese zu AB parallel; weil sie, wie es die zwey zwischen ihr befindlichen gleich langen senkrechten Linien darthun, von ihr überall gleich weit entfernt ist.

Zusatz. Es kann durch den Punct C nur eine einzige Linie gezogen werden, welche mit AB parallel lauft; denn würde man noch eine andere ziehen, so wäre sie mit AB nicht parallel; denn da müßte sie entweder zu ihr hinlaufen oder müßte sich immer weiter von ihr entfernen; in beyden Fällen hörte sie aber auf zu AB parallel zu seyn.

Anmerkung. Man kann auch auf eine mechanische Art zu einer gegebenen Linie eine Parallellinie ziehen, nähmlich vermittelst eines Parallellinials, eines Instrumentes, welches aus zwey Linialen besteht, die durch zwey gleich lange Oberbänder so zusammen verbunden sind, daß sie sich nach Gefallen von einander schieben lassen, und dabey immer gleiche Weite behalten.

Die eine Seite dieses Instrumentes legt man an die gegebene Linie AB, schiebt das andere Linial bis an den Punct C, und zieht durch diesen Punct nach der Richtung des obern Linials eine gerade Linie, welche zur gegebenen, wenn das Instrument anders richtig verfertiget ist, parallel seyn wird.

Auch läßt sich endlich durch Hülfe des rechtwinkligten Dreyeckes, von dem schon oben die Rede war, zu einer gegebenen Linie durch einen außerhalb derselben gegebenen Punct auf folgende Art eine Parallellinie ziehen: Man legt die eine Cathete dieses Dreyeckes an die gegebene Linie, an die andere schiebt man ein Linial, hält dieses, wenn es an dem Dreyecke genau anliegt, fest; hierauf schiebt man das Dreyeck an der Schärfe des Linials hinauf, bis es mit dem gegebenen Puncte zusammenfällt, und zieht dann längst der Cathete des Dreyeckes eine Linie, welche mit der gegebenen parallel seyn muß.

§. 5.

Die §. 3. angeführten Lehrsätze gelten auch in ihrer Umkehrung.

1. Lehrsatz. Wenn zwey Parallellinien von einer dritten geschnitten werden, so sind die beyden innern auf einer Seite liegenden Winkel gleich zwey Rechten.

Beweis. (Man nehme die §. 3. gezeichnete Figur zu Hülfe). Denn wären die Winkel z + u kleiner oder größer, als zwey Rechte, so müßten die Linien AB und CD bey B und D convergirend oder divergirend seyn; in beyden Fällen aber hörten AB und CD auf, Parallellinien zu seyn; folglich u. s. w.

2. Lehrsatz. Wenn zwey Parallellinien von einer dritten durchschnitten werden,

so sind die beyden äußern auf einer Seite liegenden Winkel = 2 R., d. i. x + n = 2 R.

Beweis. Denn x + z = 2 R.

u + n = 2 R.,

---

also x + z + u + n = 4 R.;

nun ist aber z + u = 2 R. nach dem vorigen Beweise,

---

also ist auch x + n = 2 R.

Wenn zwey Parallellinien von einer dritten durchschnitten werden, so sind also u. s. w.

3. Lehrsatz. Wenn zwey Parallellinien von einer dritten durchschnitten werden, so ist der äußere Winkel gleich dem innern gegenüberstehenden d. i. x = u.

Bweis. x + z = 2 R.

u + n = 2 R.

z + u = 2 R.,

---

also x + z = z + u; wenn ich aber Gleiches von Gleichem hinweg nehme, so bleibt Gleiches; folglich ist x = u, also u. s. w.

4. Lehrsatz. Wenn zwey Parallellinien von einer dritten durchschnitten werden, so sind die innern Wechselwinkel einander gleich, d. i. y = u.

Beweis. y + z = 2 R.

z + u = 2 R.;

---

folglich y + z = z + u, also ist auch y = u.

5. Lehrsatz. Wenn zwey Parallellinien von einer dritten durchschnitten werden, so sind die äußern Wechselwinkel einander gleich, d. i. o = n.

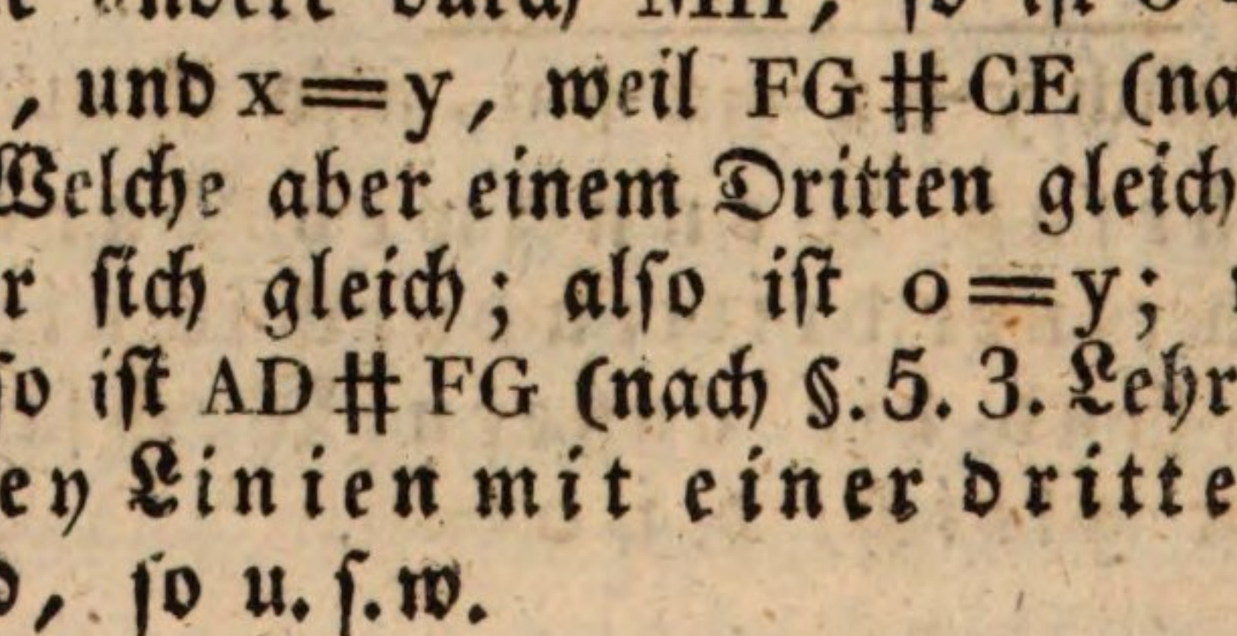
Beweis. u + n = 2 R. weil sie Nebenwinkel sind,
und z + u = 2 R. vermöge des 1. Beweises;

folglich u + n = z + u
nun ist aber z = o, weil es Vertikalwinkel sind;
also u + n = o + u; folglich ist n = o;
denn Gleiches von Gleichem hinweg genommen, bleibt Gleiches; also u. s. w.

§. 6.

Lehrsatz.

Wenn zwey Linien mit einer dritten parallel sind, so sind sie auch unter einander parallel.

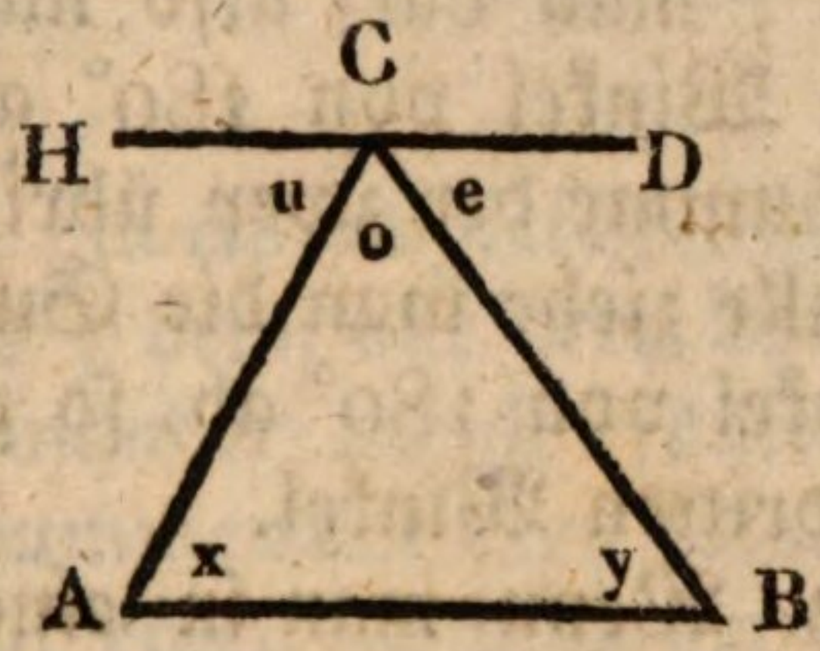


Beweis. In der beygefügten Figur sey AD ∥ CE und FG ∥ CE, so ist auch AD ∥ FG. Um dieß beweisen zu können, schneide man alle drey Linien durch eine andere durch MH, so ist o = x, weil AD ∥ CE, und x = y, weil FG ∥ CE (nach §. 5. 3. Lehrs.). Welche aber einem Dritten gleich sind, sind auch unter sich gleich; also ist o = y; wenn aber dieß ist, so ist AD ∥ FG (nach §. 5. 3. Lehrs.). Wenn also zwey Linien mit einer dritten parallel sind, so u. s. w.

§. 7.

Lehrsatz.

In einem jeden Dreyecke sind alle drey Winkel zusammen genommen 180° oder 2 R.



Beweis. Um diesen Satz beweisen zu können, ziehe man zur Grundlinie AB durch die Spitze C die Parallellinie HD. Nun ist u = x, e = y, und o = o; also ist auch u + e + o = x + y + o; nun ist aber u + o + e = 180° (viert. Abschn. §. 11. Zus. 6.); also ist auch x + y + o = 180°; in einem jeden Dreyecke sind also alle 3 Winkel = 180° oder 2 R.

Anmerkung. Man kann den eben geführten Beweis auf folgende Art versinnlichen: Man beschreibe aus allen drey Scheitelpuncten der Winkel eines verzeichneten Dreyeckes mit gleicher Oeffnung des Zirkels, Bögen zwischen ihren Schenkeln; schneide die Winkel im Papiere aus, und lege sie an eine Linie, über die man mit der nähmlichen Oeffnung des Zirkels, womit man die Bögen zwischen den Schenkeln der Winkel gemacht hat, eine halbe Peripherie gezogen hat; so wird man finden, daß die Winkel die Größe eines halben Zirkels ausmachen, also 180° halten.

Zusätze.

1. Zusatz. Wenn man einen Winkel eines Dreyeckes weiß, so weiß man auch die Summe der zwey übrigen Winkel. Und wenn man zwey Winkel oder doch die Summe derselben weiß, so weiß man auch den dritten Winkel; denn alle drey Winkel betragen zusammen 180°; man darf also nur im ersten Falle den bekannten Winkel von 180° abziehen, so gibt der Rest die Summe der zwey übrigen Winkel, und im zweyten Falle ziehe man die Summe der beyden bekannten Winkel von 180° ab, so gibt der Rest das Maß für den dritten Winkel.

2. Zusatz. Wenn man in einem gleichschenkligen Dreyecke einen Winkel weiß, so weiß man alle drey Winkel; denn ist jener Winkel bekannt, der zwischen den zwey gleichen Schenkeln liegt, so darf man nur diesen von 180° abziehen, so hat man die Summe der zwey übrigen, und da beyde diese einander gleich sind (fünft. Abschn. §. 18.), so darf man nur die gefundene Summe halbiren, so hat man jeden derselben insbesondere. Ist aber ein Winkel an der Grundlinie bekannt, so nimmt man diesen doppelt, zieht dieses Doppelte von 180° ab, so bleibt der Winkel an der Spitze.

Es halte z. B. ein Winkel an der Grundlinie 57° 20′; folglich hält der andere ebenfalls 57° 20′, diese zusammen addirt

57	20
57	20
114°	40′

180. abgezogen

114	40

so bleibt 65° 20′ für den dritten Winkel.

Es sey der Winkel an der Spitze 19° 32′ groß, so muß dieß von 180° abgezogen, und der Rest halbirt werden, wie folgt:

18.0.
19 32
---
160 28
: 2) 80° 14′ beträgt ein Winkel an der Grundlinie.

3. Zusatz. In einem gleichseitigen Dreyecke hält jeder Winkel 60°; denn alle drey Winkel sind in diesem Dreyecke einander gleich (fünft. Abschn. §. 18. 1. Zus.). Die Summe aller drey Winkel beträgt 180°; folglich fällt auf einen Winkel der dritte Theil von 180°, das ist 60°.

4. Zusatz. Wenn zwey Winkel eines Dreyeckes den zwey Winkeln eines andern Dreyeckes gleich sind, so ist nothwendig auch der dritte Winkel dem dritten gleich.

5. Zusatz. Wenn also eine Seite und zwey beliebige Winkel eines Dreyeckes gegeben sind, so ist das Dreyeck bestimmt; denn gesetzt, die zwey gegebenen Winkel seyen nicht die zwey an der gegebenen Linie anliegenden Winkel (fünft. Absch. §. 10.), so ist doch durch die zwey beliebigen Winkel auch der dritte Winkel bestimmt.

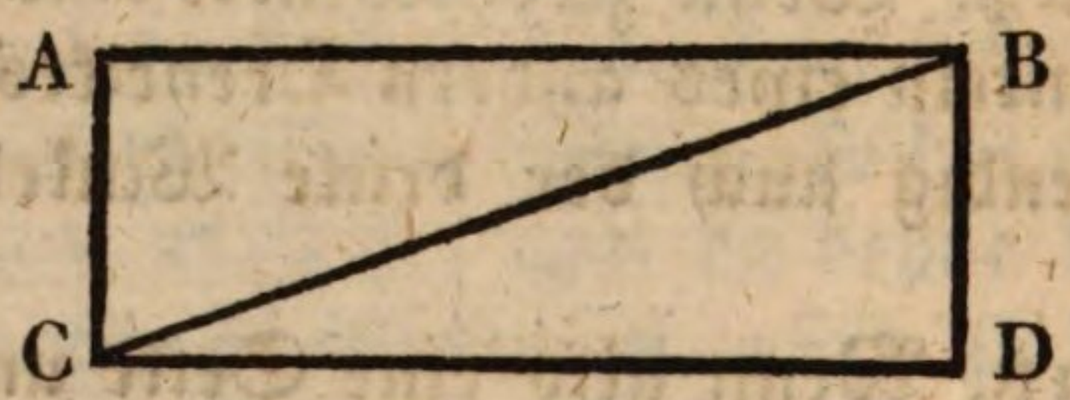
6. Zusatz. In einem Dreyecke kann nur ein einziger rechter Winkel seyn; weil sonst, wenn zwey Rechte darin wären, für den dritten nichts übrig bliebe; indem dann die 180°, welche das Maß für die drey Winkel eines jeden Dreyeckes sind, für die zwey rechten Winkel gehörten.

7. Zusatz. In einem Dreyecke kann also auch nur ein stumpfer Winkel seyn; und ist dieser darin enthalten, so sind die zwey andern nothwendig

spitzige Winkel; weil, wenn ein stumpfer Winkel da ist, dieser über 90 Grade beträgt; folglich enthält jeder von den zwey übrigen Winkeln des Dreyeckes weniger, als 90°.

8. Zusatz. Zwey an die Endpuncte einer Linie gesetzten Winkel können niemahl zusammen treffen, es sey dann, daß sie kleiner, als zwey Rechte sind; in welchem Falle sie allein convergiren; sind sie aber größer, so divergiren sie auf der einen Seite, und stoßen auf der entgegengesetzten untern Gegend zusammen, wenn man sie unterwärts verlängert.

9. Zusatz. Da sich jedes Viereck durch die Diagonallinie in zwey Dreyecke theilen läßt, wie es beygezeichnete Figur darthut, nähmlich das Viereck AB CD, welches durch die Diagonallinie CB in die zwey

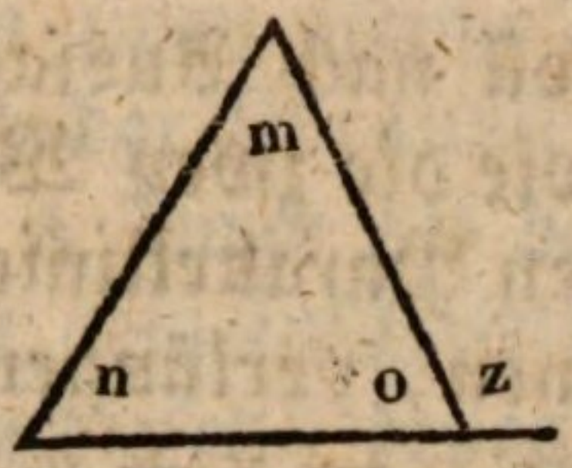


Dreyecke ACB und CBD getheilt ist, und da die Summe der Winkel in einem Dreyecke 180° beträgt: so betragen also alle vier Winkel in einem jeden Viereck 360°; denn 2 × 180° = 360°.

§. 8.

Lehrsatz.

Wenn man in einem Dreyecke eine Seite verlängert, so ist der dadurch entstandene äußere Winkel den beyden innern ihm gegenüber stehenden Winkeln zusammen genommen gleich.



Beweis. $z = n + m$.

Denn $n + m + o = 180°$ (sechst. Abschn. §. 7.),
und $z + o = 180°$ (viert. Abschn. §. 11.);

also ist auch $n + m + o = z + o$ (Arithm. dritt. Absch. §. 13. 1.);

folglich ist $n + m = z$ (Einl. §. 8. Nro. 3.).

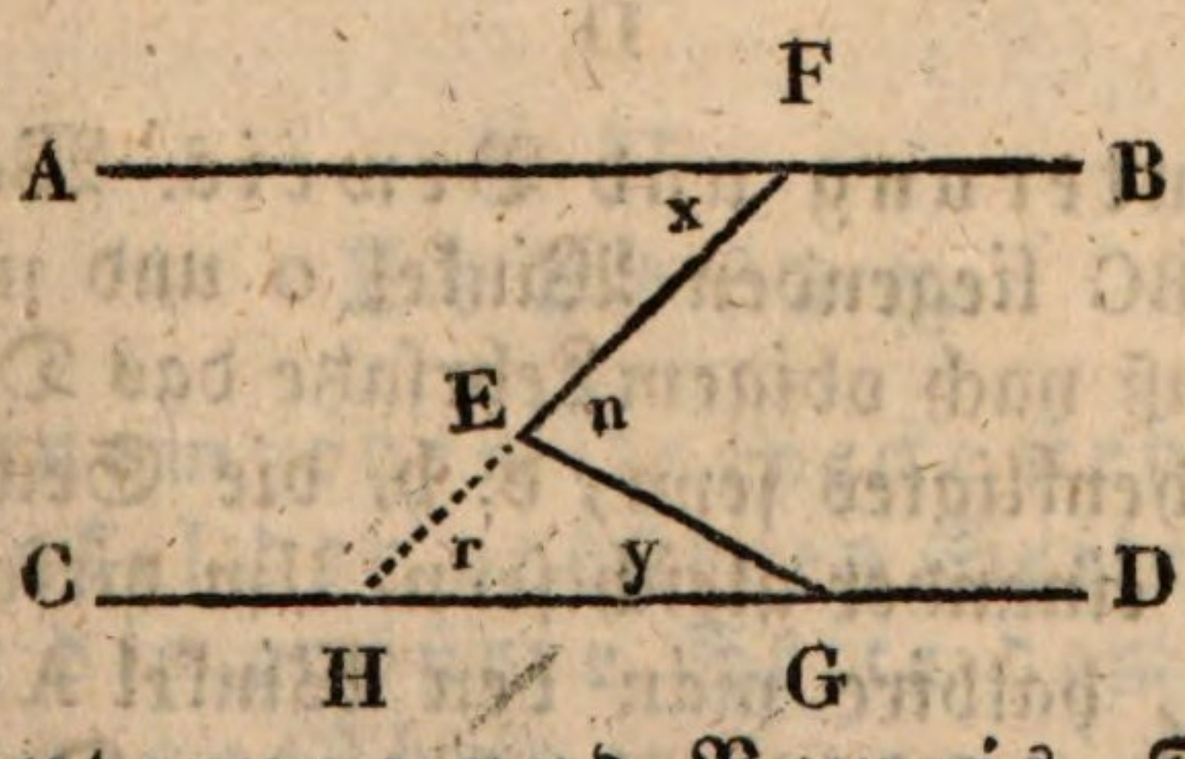
Wenn man in einem Dreyecke eine Seite verlängert, so ist also u. s. w.

Zusatz. Wenn also der äußere Winkel eines Dreyeckes gegeben ist, so sind die zwey innern zusammen, und auch der dritte als der Nebenwinkel vom äußern Winkel gegeben.

§. 9.

Lehrsatz.

Ein Winkel, der sich zwischen zwey Parallellinien befindet, ist gleich den zwey Winkeln, welche seine Schenkel mit den Parallellinien bilden.



Erläuterung und Beweis. Der Winkel FEG, der sich zwischen den zwey Parallellinien AB

und CD befindet, soll nach Aussage obigen Lehrsatzes so groß seyn, wie die zwey Winkel x und y, die seine Schenkel an den Parallellinien bilden. Um dieses beweisen zu können, verlängere man FE bis H.

Satz. FEG oder $n = x + y$.

Beweis. $n = y + r$ (nach dem vorig. §.),
und $r = x$ (sechst Absch. §. 5. Lehrs. 3.);

folglich ist $n = x + y$ (Arith. dritt. Absch. §. 12.).

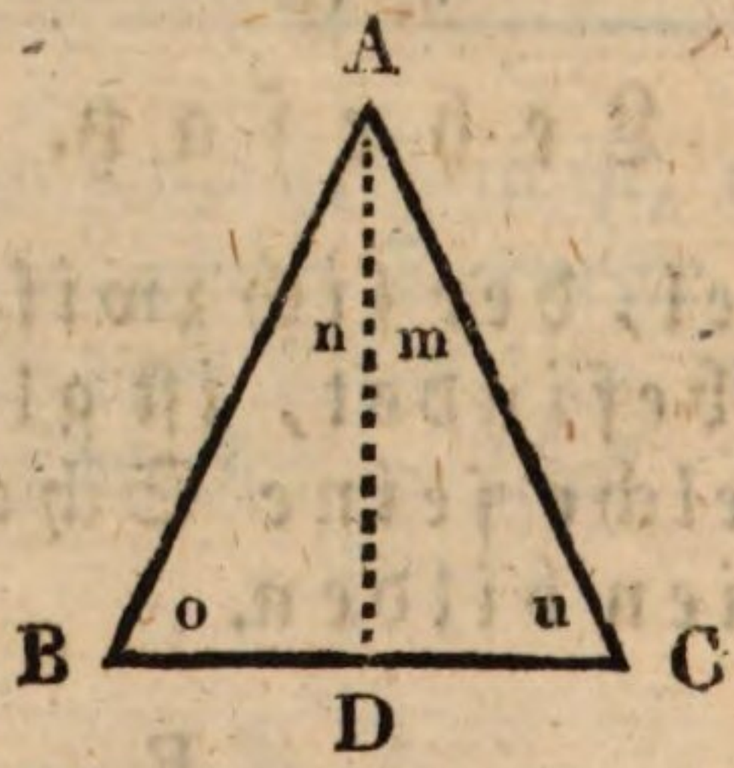
Ein Winkel, der sich u.s.w.

Anmerkung. Dieser Lehrsatz hat besonders in der Astronomie seine Anwendung.

§. 10.

Lehrsatz.

Wenn in einem Dreyecke zwey Winkel, die an einer Seite zu liegen, gleich sind, so ist es ein gleichschenkligtes.



Erläuterung und Beweis. Wenn die an der Seite BC liegenden Winkel o und u sich gleich sind, so muß nach obigem Lehrsatze das Dreyeck ABC ein gleichschenkligtes seyn, d. h. die Seiten BA und AC müssen einander gleich seyn. Um dieses beweisen zu können, halbire man den Winkel A durch AD. Man erhält auf solche Art die zwey Dreyecke ABD und ADC, welche von einer solchen Beschaffenheit

sind, daß in ihnen zwey gleiche Winkel sind, nähmlich o und u (nach der Voraussetzung), und n und m (weil der Winkel A durch AD halbirt ist), und überdieß haben sie die gemeinschaftliche Seite AD; also kommen in beyden diesen Dreyecken zwey gleiche Winkel und eine gleiche Seite vor; folglich sind (nach §. 7. 5. Zusatz dieses Absch.) beyde Dreyecke einander gleich; also ist auch AB = AC, und das Dreyeck ABC ist also ein gleichschenkligtes. Wenn also in einem Dreyecke zwey Winkel u. s. w.

Anmerkung. Die Gleichheit der zwey Dreyecke ABD und ADC kann auch so bewiesen werden: Durch die gezogene Linie AD entstehen oben bey A und unten bey D zwey gleiche Winkel (nach fünften Absch. §. 16.), und da AD zu beyden Dreyecken gehört, so befindet sich also in beyden Dreyecken eine gleiche Seite sammt zwey gleichen anliegenden Winkeln; folglich sind beyde Dreyecke einander gleich (nach fünft. Absch. §. 10.).

Zusatz. Ein Dreyeck, das drey gleiche Winkel hat, ist also gleichseitig; weil man jede der drey Linien zur Grundlinie annehmen kann, wo alle Mahl die zwey darüber stehenden Seiten einander gleich seyn müssen; folglich sind alle drey Seiten in einem Dreyecke gleich, wenn alle darin befindliche Winkel sich gleich sind.

§. 11.

Lehrsatz.

In einem jeden Dreyecke steht der größere Winkel der größeren Seite, und umgekehrt die größere Seite dem größern Winkel gegenüber.

Der Beweis dieses Lehrsatzes gründet sich auf

den Begriff eines Winkel, der größer oder kleiner seyn kann, je nachdem sich seine Schenkel mehr oder weniger auf beyden Seiten ausdehnen.

1. Zusatz. Hieraus erhellet, daß in einem rechtwinkligten Dreyecke die Hypothenuse größer ist, als jede Cathete; so auch, daß im stumpfwinkligten Dreyecke die Seite, die dem stumpfen Winkel gegenüber steht, die größte ist.

2. Zusatz. Die senkrechte Linie ist demnach die kürzeste unter allen möglichen Linien, die man von einem Puncte nach einer geraden Linie ziehen kann; denn jede andere ist immer die Hypothenuse, die senkrechte hingegen die Cathete.

Man bedient sich daher der senkrechten Linie zur Bestimmung der Entfernung eines Punctes von einer geraden Linie.

Siebenter Abschnitt.

Von den Vierecken, insbesondere von den Parallelogrammen.

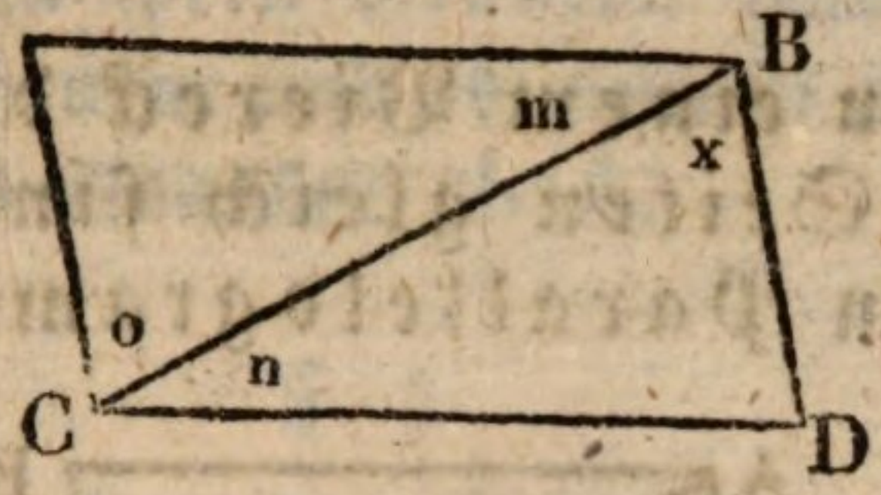
Was Parallelogramme für Figuren sind, und wie viel Arten derselben es gibt, ist schon im dritten Abschnitte §. 5 bis §. 11. vortragen worden, welches hier wieder nachgelesen werden muß.

§. 1.

Lehrsatz.

In einem jeden Parallelogramm sind

die gegenüber stehenden Seiten und Winkel gleich.



Beweis. Um diesen führen zu können, ziehe man die Diagonallinie CB. Dadurch erhält man die zwey Dreyecke ACB und CBD, welche einander gleich sind; denn AB ∥ CD (nach der Voraussetzung); folglich ist o = x, und n = m, weil diese Winkel innere Wechselwinkel sind (sechst. Absch. §. 5. 4. Lehrs.), und CB = CB; man hat also in den beyden Dreyecken ABC und CBD eine gleiche Seite sammt zwey gleichen anliegenden Winkeln; folglich ist △ ABC = △ CBD (fünft. Abschn §. 10.); also ist auch AB = CD, und AC = BD. Dieses war das Erste zu beweisen.

Addirt man die Winkel o + n und m + x, so ist auch der ganze Winkel C, der aus o + n besteht, dem Winkel B gleich, der aus m + x besteht; folglich sind auch die gegenüber stehenden Winkel sich gleich, welches das Zweyte war. In einem jeden Parallelogramm sind also u. s. w.

Anmerkung. Man kann den ersten Theil dieses Lehrsatzes auch so ausdrücken. Parallellinien zwischen Parallellinien sind einander gleich.

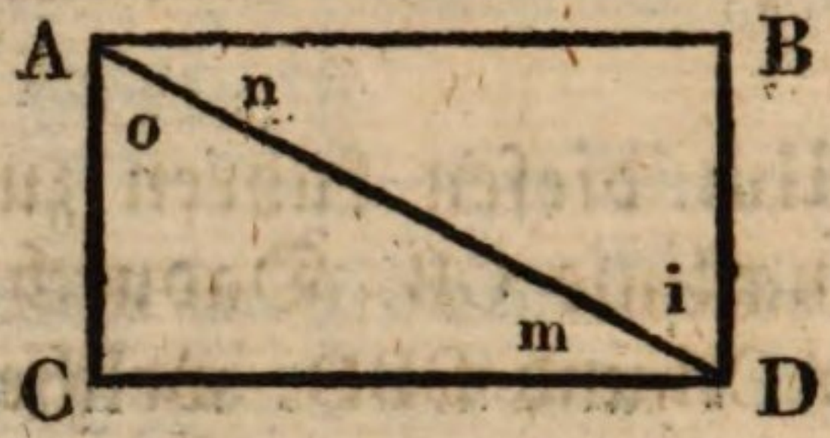
1. Zusatz. In einem jeden Parallelogramm müssen also wenigstens die gegenüber stehenden Seiten gleich seyn.

2. Zusatz. Die Diagonallinie theilt jedes Parallelogramm in zwey gleiche Dreyecke.

§. 2.

Lehrsatz.

Wenn in einem Viereck die gegenüber stehenden Seiten gleich sind, so ist das Viereck ein Parallelogramm.



Beweis. Man ziehe die Diagonallinie AD, so erhält man zwey Dreyecke, nähmlich ACD und ABD, in denen alle drey Seiten einander gleich sind; denn AB = CD, und AC = BD (nach der Voraussetzung), ferner AD = AD; folglich ist auch der $\angle$ m = $\angle$ n; wenn aber zwey Linien durch eine dritte durchschnitten werden, und die innern Wechselwinkel einander gleich sind, so laufen diese zwey Linien zu einander parallel; folglich ist AB ∥ CD, und da auch der $\angle$ o = $\angle$ i, so ist auch (sechst. Abschn. §. 5. 4. Lehrs.) AC ∥ BD; es sind also die gegenüber stehenden Seiten zu einander parallel; folglich ist das Viereck ABDC ein Parallelogramm. **Wenn also in einem Viereck u. s. w.**

§. 3.

Lehrsatz.

Zwey Quadrate, in denen eine Seite gleich ist, sind congruent, und folglich gleich.

Beweis. Ein Quadrat ist ein solches Viereck, das aus vier gleichen Seiten und vier rechten Win-

keln besteht; wenn also zwey Quadrate eine gleiche Seite haben, und man legt sie auf einander, so müssen sie nothwendig in ihren Gränzen zusammen fallen, d. i. sie sind congruent und folglich in allen vier Seiten und Winkeln einander gleich.

§. 4.

Lehrsatz.

Zwey Rechtecke sind congruent und gleich, wenn in ihnen die Seiten gleich sind, die den rechten Winkel einschließen.

Beweis. Denn unter diesen Umständen müssen sie einander nothwendig decken, wenn man sie auf einander legt.

§. 5.

Lehrsatz.

Zwey Rauten sind congruent und gleich, wenn in ihnen eine Seite und ein Winkel gleich sind.

Beweis. Denn unter diesen Umständen müssen die Rauten einander nothwendig decken, wie es der Begriff einer Raute darthut.

§. 6.

Lehrsatz.

Zwey längligte Rauten sind congruent, wenn in ihnen zwey Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich sind.

Beweis. Legt man beyde Rauten auf einander, so fallen erstlich die zwey Seiten und der eingeschlossene Winkel zusammen, und da in einer Raute

als einem Parallelogramme die gegenüber stehenden Seiten und Winkel sich gleich sind, so müssen also auch zweytens die dritte und vierte Seite sammt den davon eingeschlossenen Winkeln in ihren Gränzen zusammenfallen, d. h. sie sind congruent.

Anmerkung. Alle bisher vorgetragenen Lehrsätze über die Congruenz der Parallelogramme lassen sich in folgenden allgemeinen Satz zusammen faßen:

Zwey Parallelogramme sind congruent, wenn in ihnen zwey Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich sind.

§. 7.

Lehrsatz.

Zwey Vierecke sind congruent, wenn in ihnen drey Seiten und die von diesen eingeschlossenen Winkel gleich sind.

Beweis. Unter diesen Umständen decken sich nicht nur die drey gleichen Seiten mit den gleichen Winkeln, sondern es muß auch nothwendig die vierte Seite mit den anliegenden Winkeln sich decken; d. h. die ganzen Vierecke decken sich, und sind also congruent.

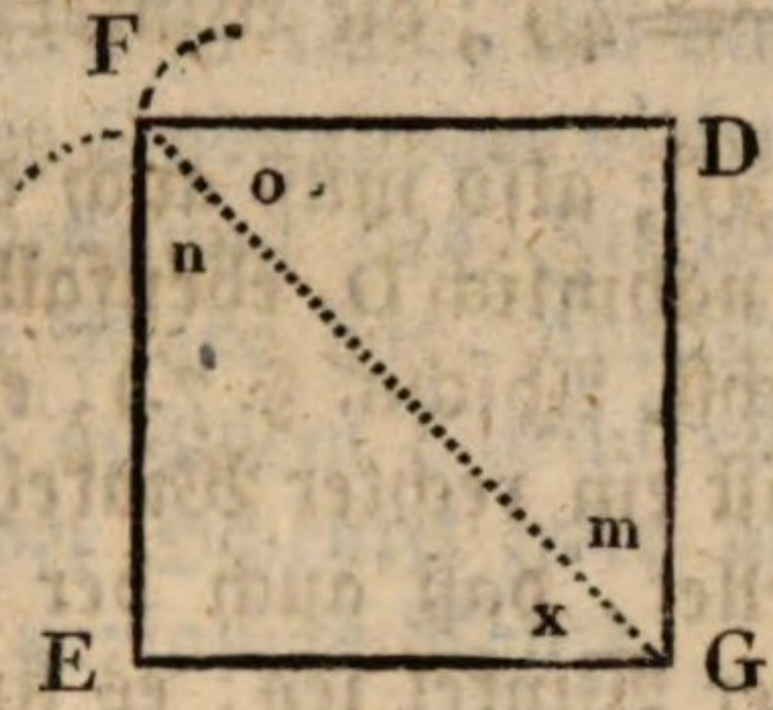
Anmerkung. Von diesem Lehrsatze und auch von den vorigen Lehrsätzen die Congruenz der Parallelogramme betreffend, kann man sich anschaulich dadurch überzeugen, wenn man sich Parallelogramme so aus Papier ausschneidet, wie es besagte Lehrsätze verlangen, und dann sie auf einander legt.

§. 8.

Aufgabe.

Aus einer gegebenen Linie ein Qua-

drat zu beschreiben, das diese Linie zur Seite hat.



Auflösung. 1) Man nimmt die gegebene Linie (EG), und errichtet an einem ihrer Endpuncte (G) eine senkrechte (DG), die man der gegebenen Linie gleich macht.

2) Alsdann macht man aus den Puncten D und E mit der Länge der gegebenen Linie durch Hülfe des Zirkels zwey Bögen. Von dem Durchschneidungspuncte F ziehe man FD und FE, so ist das verlangte Quadrat verfertiget.

Beweis. Daß alle vier Seiten einander gleich sind, ergibt sich aus der Verfertigung. Allein zu einem Quadrate wird auch noch erfordert, daß alle Winkel, die in ihm vorkommen, rechte Winkel sind. Um dieses beweisen zu können, ziehe man die Diagonallinie FG. Dadurch entstehen zwey gleiche Dreyecke, nähmlich $\triangle$FGD und $\triangle$ FGE (fünft. Abschn. §. 7.); folglich ist $\angle x = m$ und $\angle n = o$; überdieß ist $\angle x = n$ und $m = o$ (fünft. Abschn. §. 18.); also ist auch $x + m = n + o$; nun machen aber die Winkel $x + m$ den Winkel G aus, der nach der Verfertigung ein rechter Winkel ist, weil DG auf EG senkrecht errichtet wurde; folglich muß auch $n + o$ einem rechten Winkel gleich seyn, d. h. der ganze Winkel F muß ebenfalls ein rechter Winkel seyn. Weiter, weil m die Hälfte von dem rechten Winkel G ist, und o die Hälfte von dem ganzen rechten Winkel F ist, so

muß o und m, ein jeder für sich 45° zu seinem Maße haben; denn $\frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$; die Winkel m + o betragen also zusammen 90°; also muß auch der dritte Winkel in dem △ FDG, nähmlich D, ebenfalls 90° zu seinem Maße haben (sechst. Abschn. §. 7.); ein Winkel aber, der 90° beträgt, ist ein rechter Winkel. Auf die nähmliche Weise erhellet, daß auch der ∠ E 90° halte, folglich ein rechter Winkel sey; es sind also alle vier Winkel rechte Winkel; nach obiger Auflösung erhält man also ein richtiges Quadrat, das die gegebene Linie zur Seite hat.

§. 9.

Aufgabe.

Aus zwey gegebenen Linien ein Rechteck zu beschreiben, das diese Linien zu Seiten hat.

Auflösung. Man nimmt eine der gegebenen Linien, gemeiniglich die längere, zur Grundlinie, und die andere wird senkrecht an einem der Endpuncte aufgerichtet, von dessen obern Endpuncte man mit der längern Seite einen Bogen macht, der aus dem zweyten Endpuncte der Grundlinie mit der kürzern Seite durchkreuzt werden kann. Uebrigens verfährt man wie beym Quadrate.

§. 10.

Aufgabe.

Aus einer gegebenen Linie und einem gegebenen schiefen Winkel eine Raute zu beschreiben, worin sich der gegebene Winkel findet, und welche die gegebene Linie zur Seite hat.

Auflösung. Man zeichnet zuerst den gegebenen Winkel (nach fünft. Absch. §. 8.), und macht die Schenkel desselben so lang, als die gegebene Seite lang ist. Aus den Endpuncten dieser Schenkel macht man mit der Oeffnung des Zirkels, der die gegebene Seite zum Maße hat, durchkreuzende Bögen, und zieht zuletzt aus dem Durchkreuzungspuncte auf die Endpuncte der Schenkel zwey gerade Linien, so erhält man die verlangte Raute.

§. 11.

Aufgabe.

Aus zwey gegebenen Linien und einem gegebenen schiefen Winkel eine längligte Raute zu beschreiben, welche diese gegebene Stücke in sich faßt.

Auflösung. Man setzet den gegebenen Winkel an das eine Ende der einen gegebenen Linie, und verfährt übrigens wie bey Verfertigung eines Rechteckes.

§. 12.

Aufgabe.

Ein Trapez zu verzeichnen.

Auflösung. Dazu braucht man die zwey Parallelseiten, eine dritte Seite und den Winkel, unter welchem diese letztern mit einer der Parallellinien zusammen gesetzt ist; das Uebrige bestimmt sich von selbst. Man zieht demnach zuerst eine gerade Linie, macht sie so lang, als jene Parallellinie ist, an welche die dritte Seite unter dem gegebenen Winkel gesetzt ist; setzt die besagte Seite wirklich unter dem verlangten Winkel daran, zieht vom Endpuncte dieser letztern eine Parallellinie mit der erstern, macht

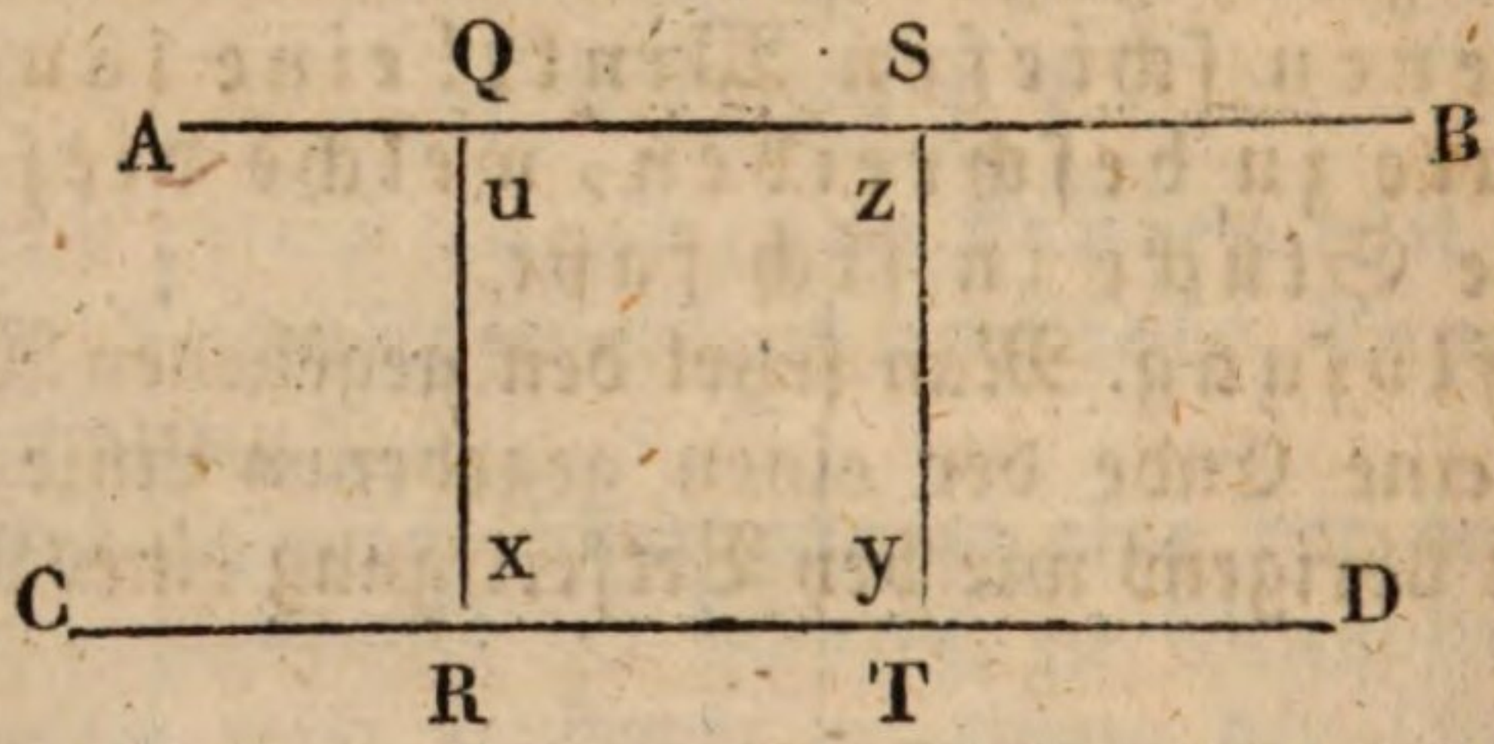
sie so groß, als die gegebene Parallelseite, und schließt dann die Figur durch eine gerade Linie.

Anmerkung. Aus den bisherigen Aufgaben ergibt sich, wie man überhaupt ein Quadrat, Rhombus, Rhomboides, oder Viereck verzeichnen kann, das einem gegebenen gleich ist.

§. 13.

Lehrsatz.

Alle senkrechten Linien zwischen zwey Parallellinien sind parallel und unter sich gleich.

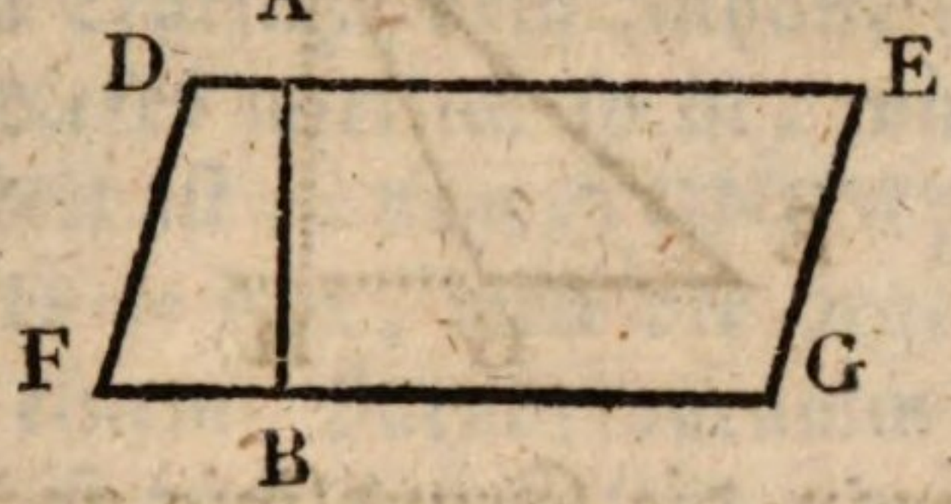


Beweis. AB und CD seyen parallel. Nun errichte man an beliebigen Puncten von CD, z. B. an Q und S senkrechte Linien, QR und ST. Weil nun diese Linien senkrecht sind, so ist $x + y = 2$ R.; folglich ist QR # ST (sechst. Abschn. §. 3.); nun ist QRST ein Parallelogramm, und zwar ein Rechteck; es ist folglich QR = ST; denn senkrechte Linien zwischen Parallellinien sind einander gleich.

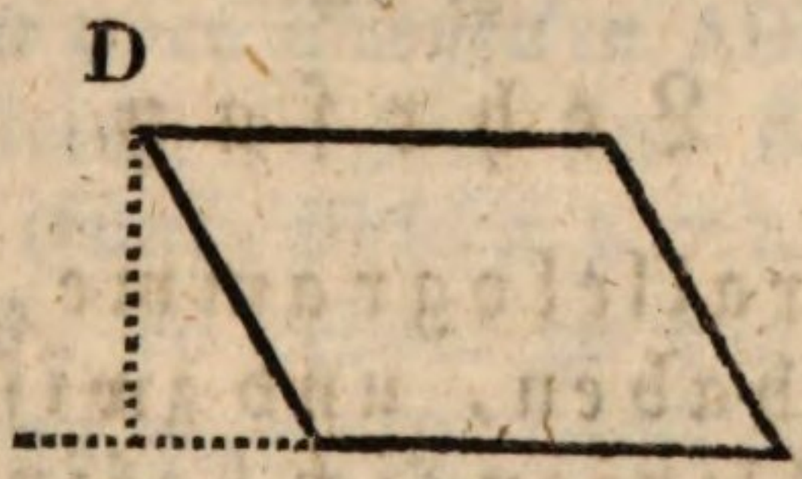
Zusatz. Jede senkrechte Linie auf die Grundlinie eines Parallelogramms aus einem Puncte der gegenüber stehenden Seite ist die Höhe dieses Parallelogramms; denn alle diese Senkrechten, wie QR, ST sind gleich groß, und eine größere Senk-

rechte, als aus Puncten der gegenüber stehenden Seite ist nicht möglich.

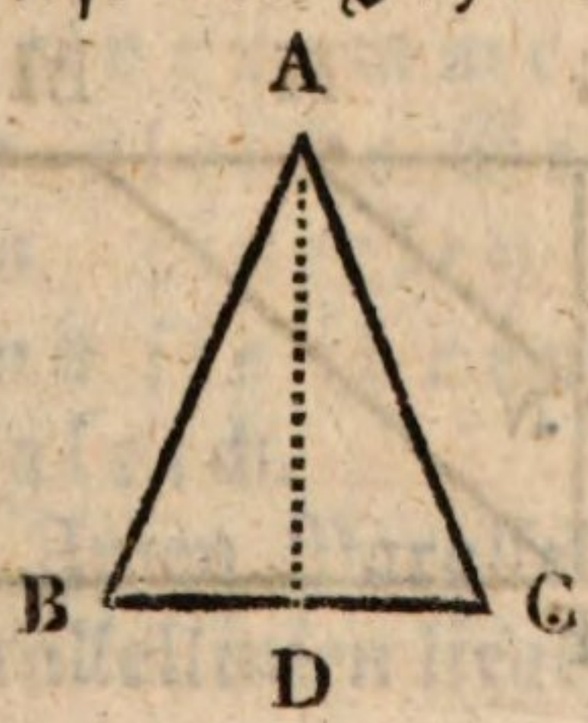
So bestimmt z. B. die Senkrechte AB die Höhe des Parallelogramms DEFG



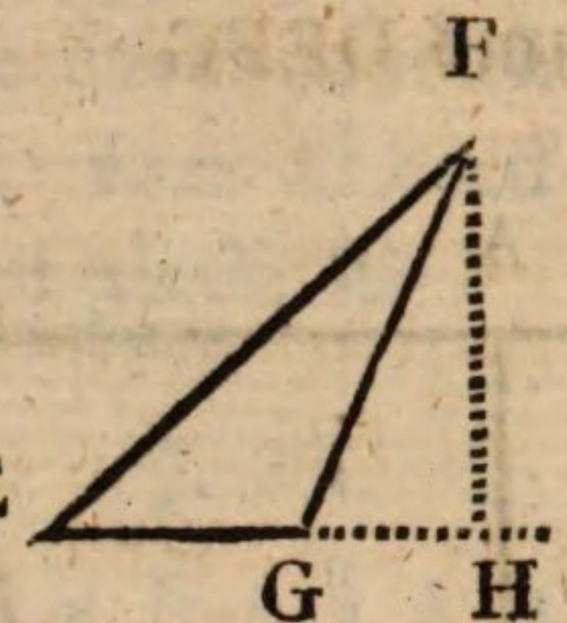
Um also die Höhe eines Parallelogramms bestimmen zu können, zieht man eine Senkrechte von der entgegen gesetzten Seite auf die Grundlinie. Sollte aber diese Senkrechte außerhalb des Parallelogramms fallen, wie DE



so verlängere man die Grundlinie. — Auf gleiche Weise hat man bey der Bestimmung der Höhe eines Dreyeckes zu verfahren. Um z. B. die Höhe des Dreyeckes ABC zu erhalten, so ziehe man aus dem Scheitelpuncte A auf die Grundlinie BC die senkrechte AD, so ist diese die Höhe des Dreyeckes.



Ist aber das Dreyeck so beschaffen, daß die senkrechte Linie die Grundlinie nicht trifft, wie in dem Dreyecke EFG,

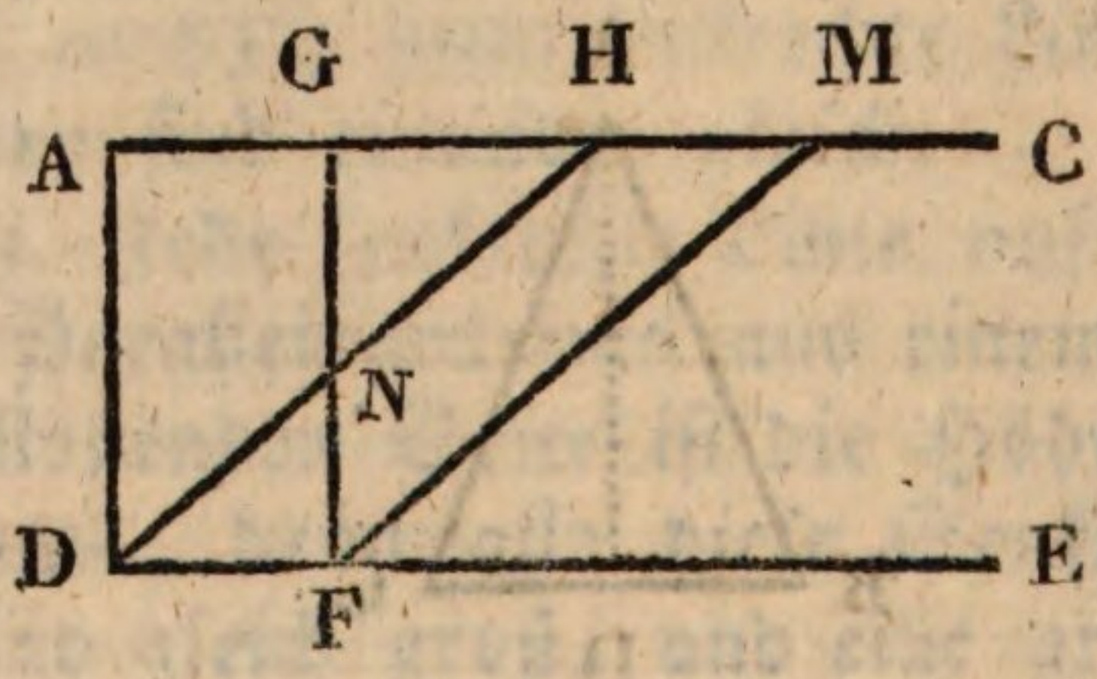


so verlängere man die Grundlinie nach der Seite, wo die Senkrechte hinfällt, und diese zeigt dann außerhalb des Dreyeckes bis zum Durchschnitte die Höhe an; FH ist also die Höhe des △ EFG.

§. 14.

Lehrsatz.

Zwey Parallelogramme, die einerley Grundlinie haben, und zwischen denselben Parallellinien sich befinden, können zwar nach ihrer Gestalt verschieden seyn, aber der Flächenraum, welcher sich innerhalb der Gränzen von beyden Parallelogrammen befindet, ist bey beyden Parallelogrammen gleich groß, d. h. gedachte Parallelogramme sind gleich, obschon nicht ähnlich.

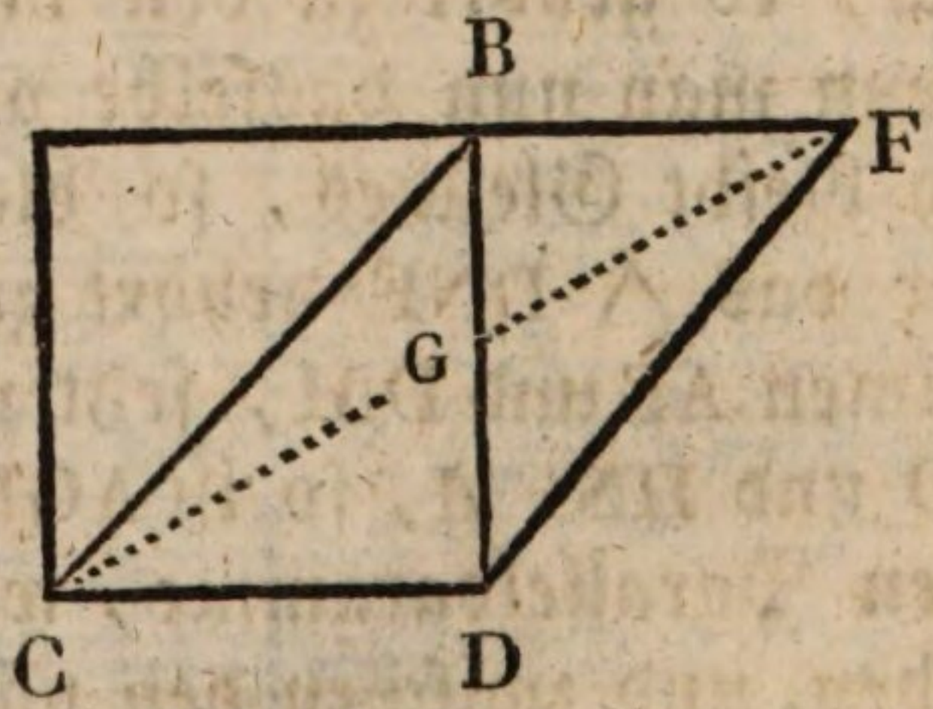


Erläuterung und Beweis. Die zwey Parallelogramme ADGF und DHMF haben eine und die nähmliche Grundlinie, nähmlich DF, und befinden sich zwischen den nähmlichen Parallellinien AC und DE. Beyde diese Parallelogramme sollen nun nach obigem Lehrsatze dem Inhalte nach gleich groß seyn. Daß dieses wirklich so ist, wird so bewiesen: Das △ ADNH ist = dem △ GNFM; denn AD ist = GF, und DH = FM, weil die gegenüber stehenden Seiten in einem Parallelogramm einander gleich sind; weiter ist auch AG = HM; denn AG ist = DF, und HM ist auch = DF; also sind sie auch unter einander gleich; AG ist also = HM, und GH ist sich selbst gleich; wenn man nun zu zwey gleich großen Größen Gleiches hinzusetzt, so bleibt Gleiches; folglich ist AG + GH = HM + GH, AH ist also gleich GM; es sind also in den zwey Dreyecken ADH und GFM alle drey Seiten gleich; folglich sind sie einander vollkommen gleich (fünft. Abschn. §. 7.). Das △ GNH ist gemeinschaftlich, es gehört zu den beyden vorigen Dreyecken; wenn man nun dasselbe von diesen hinwegnimmt, so bleibt Gleiches, so bleibt AGND = HNFM; ferner das △ DNF gehört zu den beyden Parallelogrammen AF und DM, setzt man nun dasselbe zu AGND und HNFM, so ist AGDF = HDFM, d. i. die beyden Parallelogramme, welche einerley Grundlinie haben, und zwischen den nähmlichen Parallellinien liegen, sind einander gleich; wenn also zwey Parallelogramme die nähmliche, oder doch eine gleiche Grundlinie haben und zwischen einerley Parallellinien liegen, so sind sie ihrem Inhalte (ihrer Fläche) nach gleich.

1. Zusatz. Zwey Parallelogramme, die zwischen einerley Parallellinien liegen, haben eine gleiche

Höhe; denn die Höhe eines Parallelogramms ist (nach 13. Zus.) die senkrechte Linie, die von der entgegengesetzten Seite auf die Grundlinie gezogen wird; da aber alle senkrechten Linien zwischen zwey Parallellinien sich gleich sind; so haben also zwey Parallelogramme, die zwischen einerley Parallellinien liegen, eine gleiche Höhe. Obiger Lehrsatz kann also auch so ausgedrückt werden: Wenn zwey Parallelogramme einerley, oder doch eine gleiche Grundlinie, und einerley, oder doch eine gleiche Höhe haben, so sind sie einander gleich.

2. Zusatz. Da jedes Parallelogramm durch die Diagonallinie in zwey gleiche Dreyecke getheilt wird (§. 1. 2. Zus.), so müssen auch zwey Dreyecke, die einerley Grundlinie haben, und zwischen einerley Parallellinien liegen, einander gleich seyn; denn von gleichen Ganzen sind auch die Hälften gleich. So ist z. B. das $\triangle CBD = \triangle CFD$,



weil in beyden alle drey gleichnahmigen Seiten gleich sind, nähmlich $CD = BF$, $CB = DF$, und $BD = BD$ u. s. w.; folglich sind zwey Dreyecke, welche gleiche Grundlinien haben und zwischen einerley Parallellinien liegen, oder was eben das ist, welche gleiche Grundlinien und gleiche Höhe haben, einander gleich.

3. Zusatz. Ein Dreyeck ist halb so groß, als

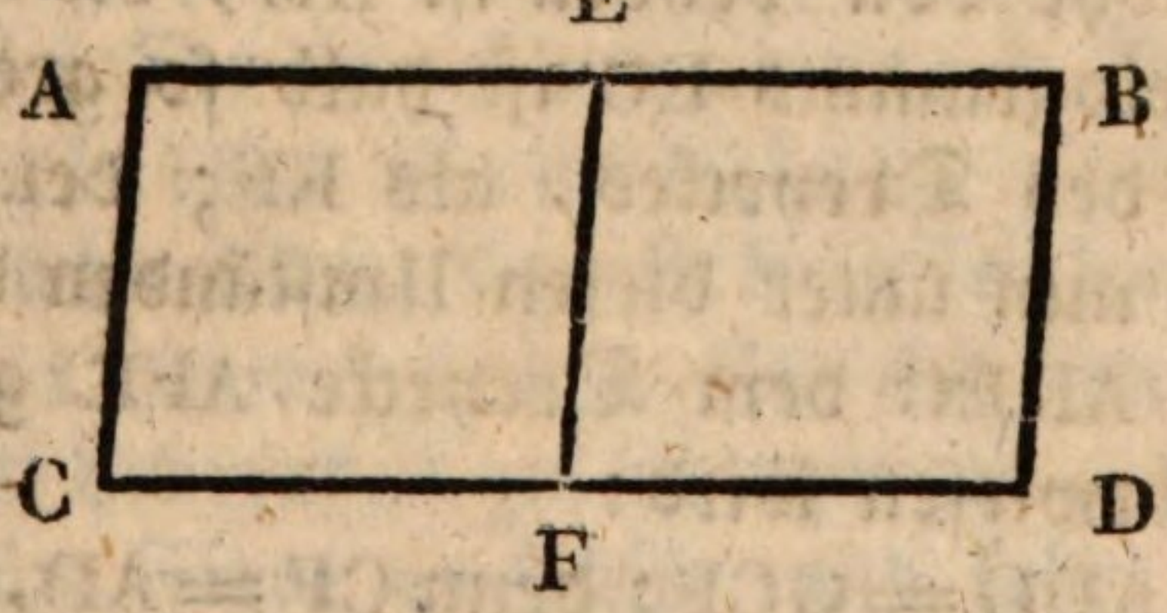
ein Parallelogramm, das mit ihm einerley oder gleiche Grundlinie und Höhe hat.

§. 15.

Lehrsatz.

Wenn man in einem Parallelogramm eine Seite in zwey gleiche Theile theilt, und zieht dann aus diesem Theilungspuncte zur gegenüber stehenden Seite eine Linie, die mit einer andern Seite des Parallelogramms parallel läuft; so theilt diese Linie das ganze Parallelogramm in zwey gleiche Parallelogramme.

Beweis. Das gegebene Parallelogramm sey AD. Man mache AE = EB, und ziehe EF ∥ AC, und also auch ∥ BD, so entstehen die zwey Parallelogramme AF und ED, welche nach der Aussage des Lehrsatzes einander gleich sind, welches so bewiesen wird:



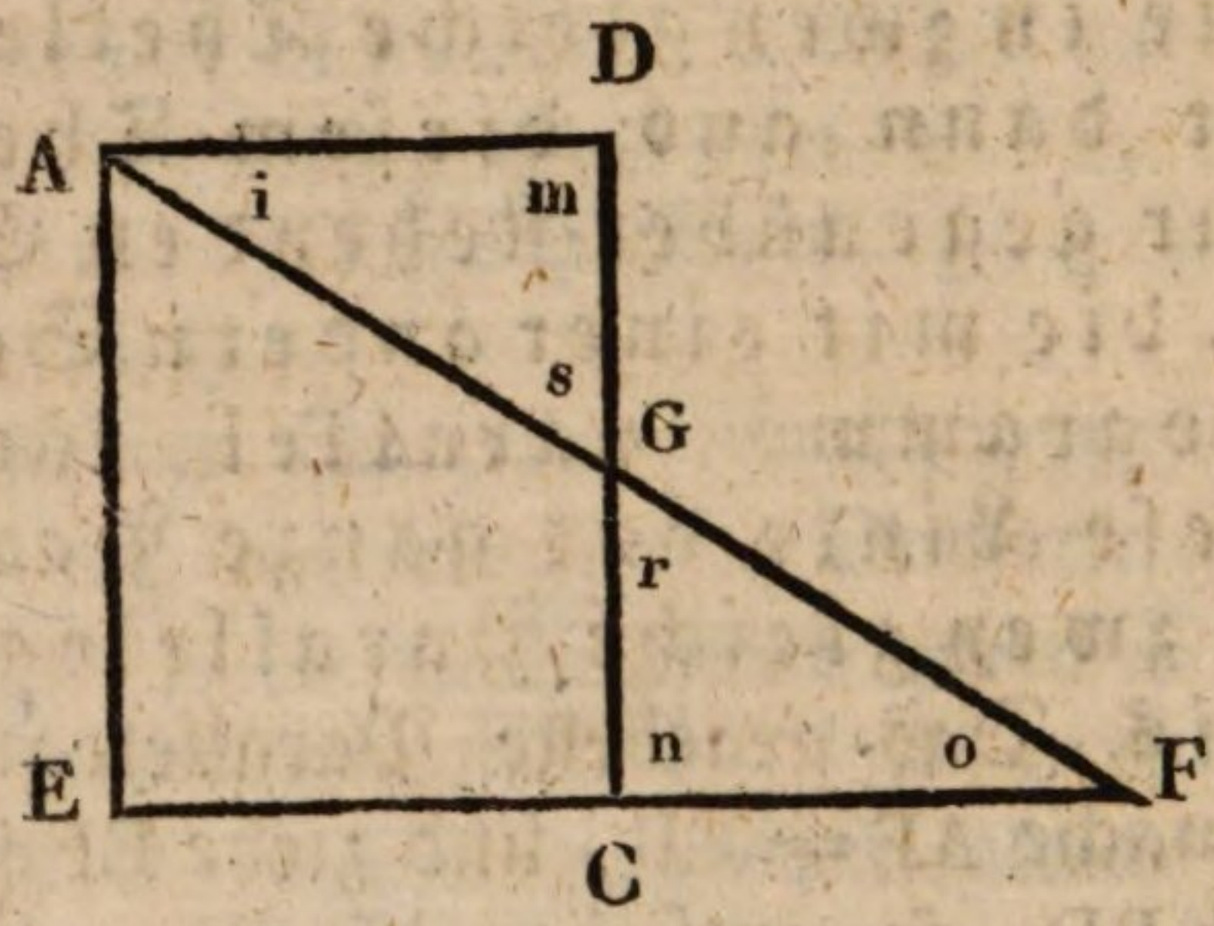
EB = AE, AC = BD, und der Winkel A = dem Winkel B; folglich sind (nach §. 6.) die Parallelogramme AF und ED einander gleich. Wenn man also in einem Parallelogramm u. s. w.

Zusatz. Die Hälfte eines Parallelogramms ist also ein Parallelogramm, das von jenem die halbe Grundlinie und die ganze Höhe hat.

§. 16.

Lehrsatz.

Ein Dreyeck ist einem Parallelogramm gleich, das mit ihm einerley Höhe hat, und dessen Grundlinie halb so groß als die Grundlinie des Dreyeckes ist.



Beweis. Das Parallelogramm ADEC hat mit dem Dreyecke AEF gleiche Höhe; indem beyde zwischen einerley Parallellinien AD und EC sich befinden; die Höhe von beyden ist AE, die Grundlinie des Parallelogramms EC ist halb so groß, als die Grundlinie des Dreyeckes, als EF; dem Lehrsatze zufolge soll nun unter diesen Umständen das Parallelogramm ADEC dem Dreyecke AFE gleich seyn, welches so bewiesen wird:

Das $\triangle$ ADG = GCF; denn CF = AD, weil CF = EC, und AD = EC; folglich CF = AD; denn zwey Größen, die einer dritten gleich sind, sind auch unter sich gleich; ferner ist der Winkel o = dem Winkel i, weil sie Wechselwinkel sind, die entstanden sind, da zwey Parallellinien von einer dritten durchschnitten wurden (sechst. Absch. §. 5. 4. Lehrs.); ferner ist der $<$ r = $<$ s, weil sie Vertikalwinkel sind (viert.

Absch. §. 14.); folglich ist auch der $< n = < m$; in den beyden Dreyecken ADG und GCF sind also zwey Seiten sammt den zwey anliegenden Winkeln einander gleich; folglich ist das $\triangle$ ADG = GCF (fünfter Absch. §. 10.), und da das Trapez AGCE sich selbst gleich ist, und da Gleiches gleich bleibt, wenn man Gleiches dazusetzt, so ist AGCE + ADG = ADCE + GCF, d. i. das Parallelogramm AECD ist gleich dem $\triangle$ AEF. Also u. s. w.

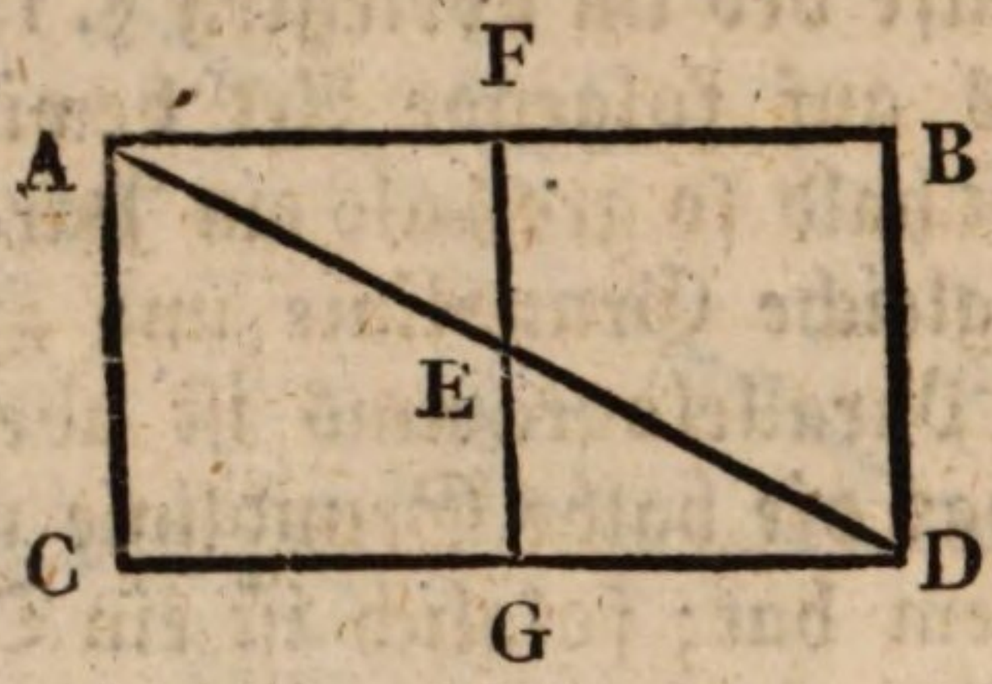
Anmerkung. Der eben geführte Lehrsatz kann auch durch Hülfe des im vorletzten §. 15. vorgetragenen Lehrsatzes auf folgende Art bewiesen werden: Ein Dreyeck ist halb so groß als ein Parallelogramm, das mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat; die Hälfte eines Parallelogramms ist aber ein Parallelogramm, das die halbe Grundlinie und die ganze Höhe mit jenem hat; folglich ist ein Dreyeck einem Parallelogramm gleich, das mit ihm einerley Höhe hat, und dessen Grundlinie halb so groß, als die Grundlinie des Dreyeckes ist.

Zusatz. Obiger Lehrsatz hat auch, wenn er umgekehrt wird, seine Gültigkeit, und dann heißt er: Wenn ein Dreyeck mit einem Parallelogramm gleiche Grundlinie und nur die halbe Höhe hat, so ist dasselbe dem Parallelogramm gleich. Um sich von der Wahrheit dieses Lehrsatzes zu überzeugen, nehme man wieder obige Figur zu Hülfe, und kehre sie um, so, daß AE die Grundlinie wird, wo sodann EF die Höhe ist, die beym Dreyecke AFE doppelt so groß ist, als beym Parallelogramm AECD. Der Beweis ist übrigens dem vorigen ganz gleich.

§. 17.

Lehrsatz.

Wenn man durch die Mitte der Diagonallinie eines Parallelogramms eine Linie so zieht, daß sie mit einer der gegenüber stehenden Seiten des Parallelogramms parallel läuft, so wird dadurch das Parallelogramm in zwey congruente Parallelogramme getheilt.



Beweis. Die Diagonallinie AD theilt das Parallelogramm BC in zwey gleiche Dreyecke ACD = ABD, weil in denselben alle drey Seiten gleich sind (fünft. Absch. §. 7.); nun ist aber auch das △ AEF = △ EGD, weil EG = EF, der ∠ GED = ∠ AEF, und der ∠ EGD = ∠ AFE (fünft. Absch. §. 10., sechst. Absch. §. 5. 4. Lehrs.); Größen, die einander gleich sind, können für einander gesetzt werden; also ist das Parallelogramm FC = BG. **Wenn man durch die Mitte u. s. w.**

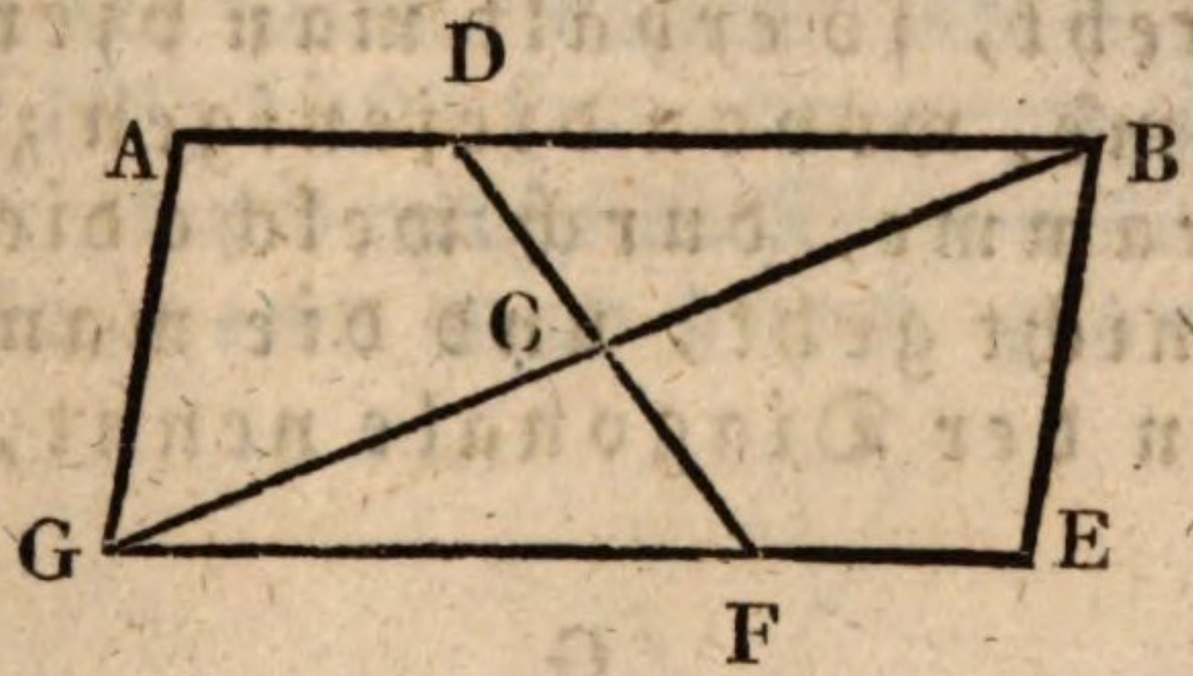
§. 18.

Lehrsatz.

Wenn man die Diagonallinie eines Parallelogramms in zwey gleiche Theile theilt, und zieht durch den Theilungs-

punct eine gerade Linie nach einer beliebigen Richtung von einer Parallelseite zur andern, so entstehen zwey Trapezien, die einander gleich sind.

Erläuterung und Beweis. Wenn in dem Parallelogramm AE die Diagonallinie GB in zwey gleiche Theile getheilt wird, und man zieht durch den Theilungspunct C die Linie DF, so sind die auf solche Art entstandenen Trapezien ADFG und DBEF einander gleich.



Beweis. Daß ADFG = ABEF ist.

△ ABG = △ EBG

△ DCB = △ FCG, weil in beyden eine Seite sammt den zwey anlieg. Winkeln gleich ist, d.i. CF = CD;

folglich △ ABG — △ DCB = △ EGB — △ FCG; also ADCG = EBCF, weil FCG = DCB, und Gleiches von Gleichem abgezogen Gleiches bleibt; ferner ist △ FCG = △ DCB (fünft. Absch. §. 10.), folglich ist HDCG + △ FCG = EBCF + △ DCB, d. i. ADFG = DBEF; denn Gleiches zu Gleichem addirt bleibt Gleiches. Wenn man u. s. w.

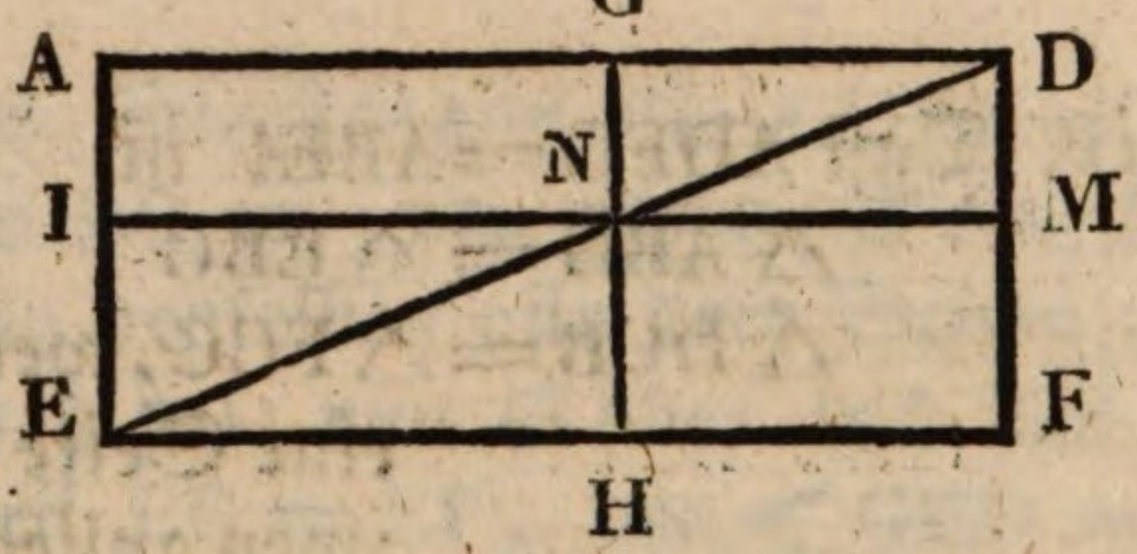
Zusatz. Da sich aus dem Theilungspuncte der Diagonallinie nach verschiedenen Richtungen auf vielfache Art eine gerade Linie ziehen läßt, wodurch allemahl zwey gleiche Trapezien entstehen, so erhellet

hieraus, daß jedes Parallelogramm durch den Mittelpunct der Diagonallinie in unendlich viele, aber immer gleiche Trapezien getheilt werden kann.

§. 19.

Lehrsatz.

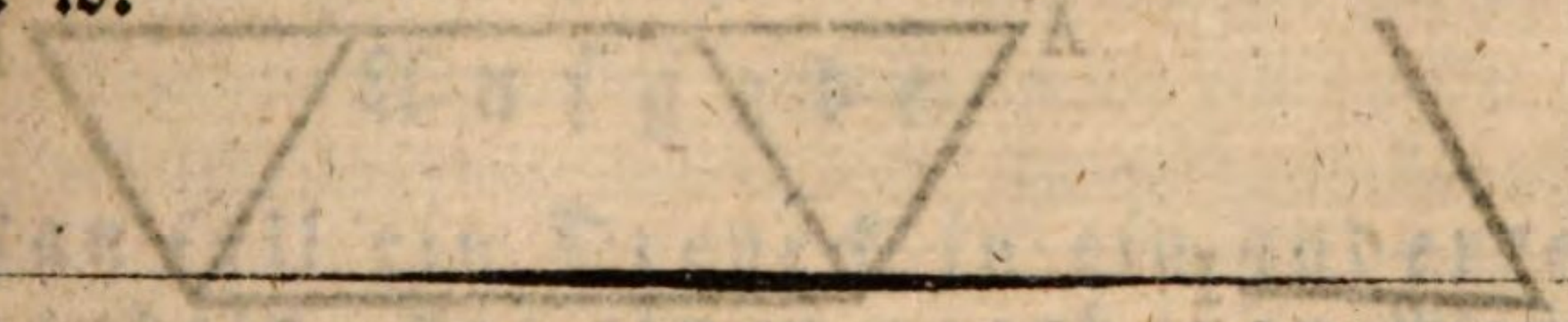
Wenn man durch einen Punct in der Diagonallinie eines Parallelogramms mit den Seiten desselben zwey parallele Linien zieht, so erhält man vier Parallelogramme, wovon diejenigen zwey Parallelogramme, durch welche die Diagonallinie nicht geht, und die man Ergänzungen an der Diagonale nennt, gleich sind.



Erläuterung und Beweis. AF sey das Parallelogramm, ED die Diagonallinie; durch den Punct N ziehe man GH ∥ zu DF und AE; durch eben diesen Punct ziehe man IM ∥ zu AD und EF, so werden GM, AN, IH und NF Parallelogramme seyn. AN und NF sind nun jene zwey Parallelogramme, durch welche die Diagonallinie DE nicht geht; diese sollen nun nach unserm Lehrsatze einander gleich seyn. Wir müssen also beweisen, daß AN = NF sey.

Beweis. Durch ED wird das Parallelogramm AF in zwey gleiche Dreyecke getheilt (§. 1. 1. Zus.), also ist das △AED = △EDF; ferner ist auch das

△ GND = △ DNM, und das △ INE = △ NEH, weil die Diagonallinie ED auch die Parallelogramme GM und IH in zwey gleiche Dreyecke theilt; nun aber, wenn man von zwey gleichen Größen Gleiches hinwegnimmt, so bleiben die Reste gleich; folglich bleibt NMFE = GNEA, wenn beyderseits die gleichen Dreyecke GND und DNM abgezogen werden. Da überdieß das △ INE = NEH ist, so wird NA = NF seyn, wenn man von GNEA und NMFE die zwey gleichen Dreyecke NEH und INE hinwegnimmt; folglich ist das Parallelogramm AN = dem Parallelogramm NF; dieses sind aber gerade jene Parallelogramme, durch welche die Diagonallinie ED nicht läuft; also wenn man durch einen Punct u. s. w.



Achter Abschnitt.

Von der Verwandlung geradlinigter Figuren.

§. 1.

Erklärung der Verwandlung einer Figur.

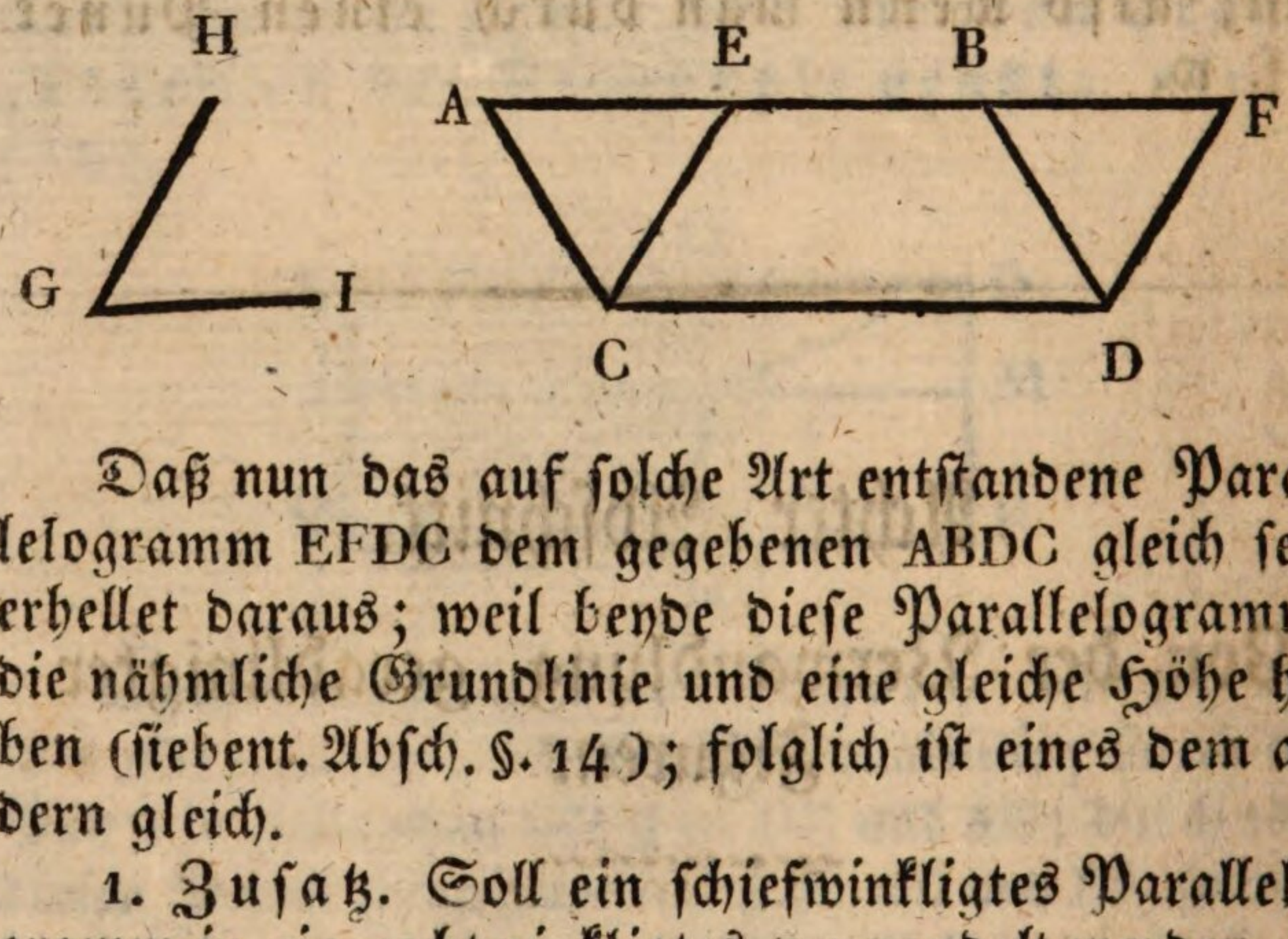
Eine Figur verwandeln, heißt eine andere Figur machen, die der ersten gleich ist, ohne mit ihr congruent zu seyn.

§. 2.

Aufgabe.

Man soll ein Parallelogramm in ein anderes verwandeln, das einen gegebenen Winkel hat.

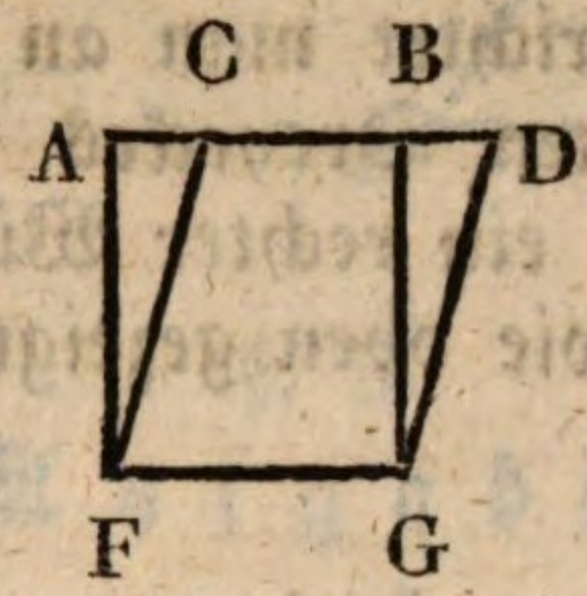
Auflösung. Das gegebene Parallelogramm sey BC, der gegebene Winkel HGI. Um nun aus BC ein Parallelogramm zu machen, das den gegebenen Winkel HGI hat, gehe man so zu Werke: 1) Man lege den Winkel HGI an C so, daß ECD = HGI. 2) Man verlängere dann AB, und ziehe auf dieselbe DF zu EC parallel, wie folgt:



Daß nun das auf solche Art entstandene Parallelogramm EFDC dem gegebenen ABDC gleich sey, erhellet daraus; weil beyde diese Parallelogramme die nähmliche Grundlinie und eine gleiche Höhe haben (siebent. Absch. §. 14); folglich ist eines dem andern gleich.

1. Zusatz. Soll ein schiefwinkligtes Parallelogramm in ein rechtwinkligtes verwandelt werden, so verfährt man auf gleiche Weise, nur mit dem Unterschiede, daß man anstatt des hinzulegenden Winkels eine senkrechte Linie errichtet; denn auf diese Art wird dann der schiefe Winkel in einen rechten verwandelt. Z.B. das schiefwinkligte Parallelogramm CFGD soll in ein rechtwinkligtes verwandelt werden. Man erhält, wenn man auf die gezeigte Art ver-

fährt, das rechtwinkligte Parallelogramm AFGB, welches dem vorigen, da es mit ihm gleiche Höhe und gleiche Grundlinie hat, gleich ist.



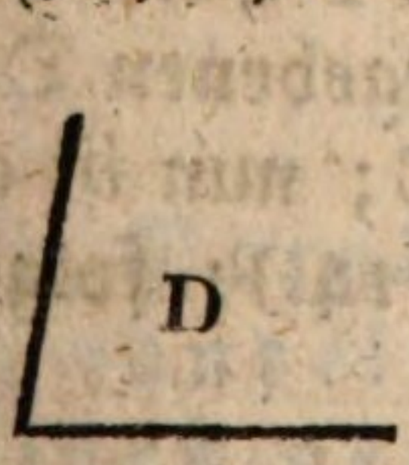
2. Zusatz. Zugleich wird man einsehen, wie man umgekehrt ein rechtwinkligtes Parallelogramm in ein schiefwinkligtes verwandeln kann.

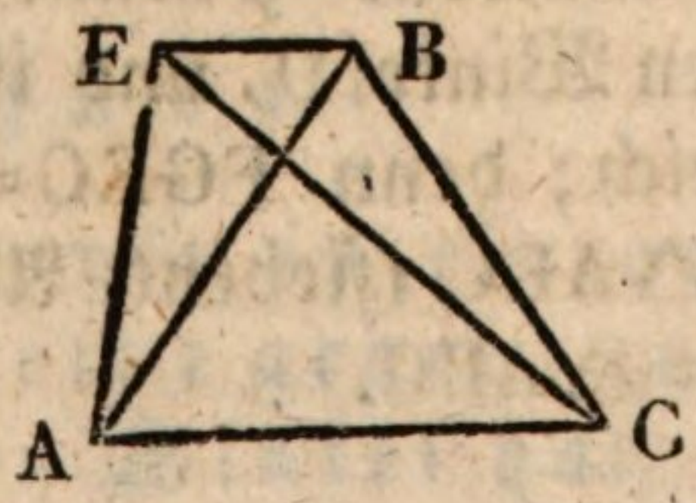
§. 3.

Aufgabe.

Man soll ein Dreyeck in ein anderes verwandeln, das einen gegebenen Winkel hat.

Auflösung. Das gegebene Dreyeck sey ABC, der gegebene Winkel D. Man lege den $\angle$ D an A, und mache also den $\angle$ EAC $=\angle$ D. Aus dem Scheitelpuncte B ziehe man zu AC eine Parallellinie von unbestimmter Länge, nähmlich BE. Hierauf verlängere man AE bis sie EB trifft. Letztens ziehe man EC, so ist AEC das verlangte Dreyeck, welches den gegebenen Winkel hat und dem gegebenen Dreyecke gleich ist, weil beyde eine gleiche Grundlinie und gleiche Höhe haben.





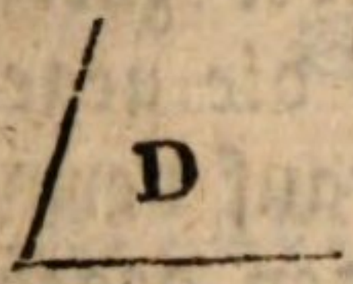
Zusatz. Hieraus ergibt sich zugleich die Art und Weise, nach welcher man jedes Dreyeck in ein rechtwinkligtes verwandeln kann. Um dieses bewerkstelligen zu können, errichtet man an dem einen Endpuncte des gegebenen Dreyeckes eine Senkrechte, damit auf diese Art ein rechter Winkel entsteht, und verfährt übrigens wie oben gezeigt wurde.

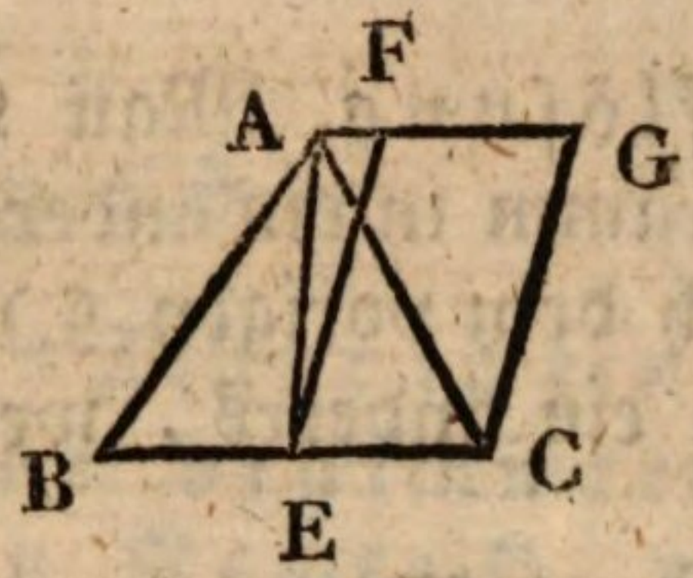
§. 4.

Aufgabe.

Man soll ein Dreyeck in ein Parallelogramm verwandeln, das einen gegebenen Winkel hat.

Auflösung. Da ein Dreyeck die Hälfte eines Parallelogramms ist, das mit ihm gleiche Höhe und gleiche Grundlinie hat; so muß man also, um ein Dreyeck in ein Parallelogramm verwandeln zu können, entweder die Höhe oder die Grundlinie des zu verfertigenden Parallelogramms nur halb so groß nehmen, als die Höhe oder Grundlinie des zu verwandelnden Dreyeckes ist. Es sey z. B. das Dreyeck ABC und der Winkel D gegeben. Man halbire die Grundlinie BC in E, und ziehe aus E an die Spitze des Dreyeckes die Linie EA. An den Punct E lege man den gegebenen Winkel D, man erhält den Winkel FEC. Aus der Spitze A ziehe man AG zu BC, und aus C die Linie CG zu EF parallel. Das hierdurch entstandene Parallelogramm FGEC hat den gegebenen Winkel D, und ist dem gegebenen Dreyecke ABC gleich; denn FGEC = 2 AEC; nun ist aber △ ABE = △ AEC (siebent. Abschn. §. 14.); folglich ist FGEC = △ ABC.



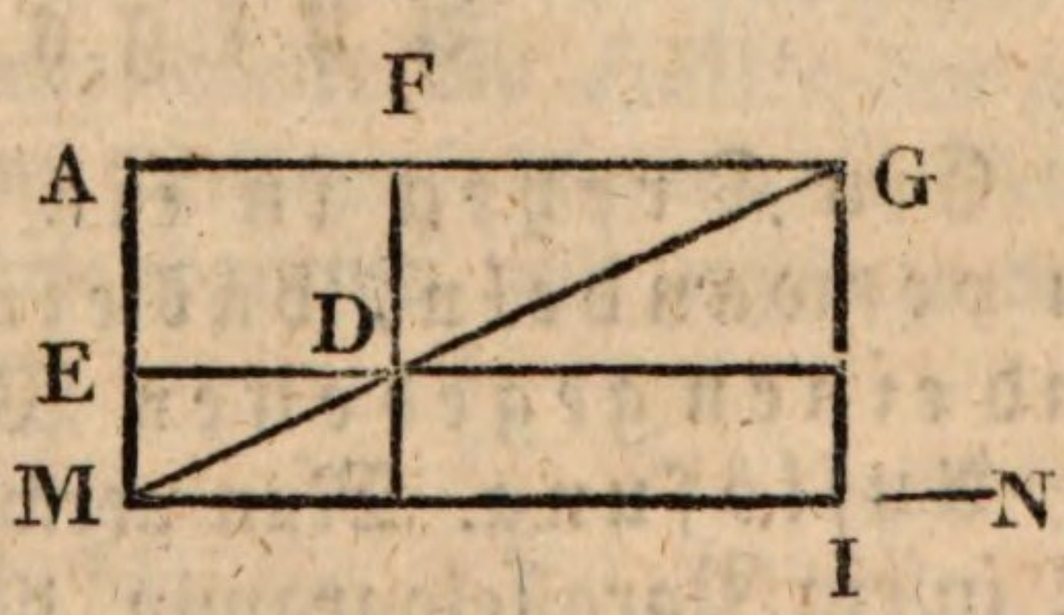


§. 5.

Aufgabe.

Ein Parallelogramm in ein anderes zu verwandeln, das eine gegebene Seite hat.

Auflösung. AD sey das gegebene Parallelogramm, und CH die gegebene Seite. Man verlängere AF, und mache FG = CH. Man ziehe alsdann aus dem Puncte G durch den Punct D bis gegen E eine gerade Linie GM. Dann verlängere man AE bis sie mit GM zusammen stößt. Von M ziehe man zu AG eine Parallellinie MN; diese mache man AG gleich, und ziehe GI; ferner verlängere man auch FD und ED in gerader Richtung, und man erhält das Parallelogramm DI, welches AD gleich ist (siebent. Absch. §. 19.).



§. 6.

Aufgabe.

Ein Parallelogramm in ein anderes zu verwandeln, das eine gegebene Seite und einen gegebenen Winkel hat.

Auflösung. Man verwandle zuerst das Parallelogramm in ein anderes, das die gegebene Seite hat (nach dem vorigen §.). Hierauf verwandle man dieses in ein anderes, welches den gegebenen Winkel hat.

Zusatz. Man kann also jedes Parallelogramm in ein Rechteck mit einer gegebenen Seite verwandeln.

§. 7.

Aufgabe.

Ein Dreyeck in ein Parallelogramm zu verwandeln, das eine gegebene Seite hat.

Auflösung. Man verwandle zuerst das Dreyeck in ein Parallelogramm mit einem beliebigen Winkel, weil die Aufgabe über den Winkel nichts bestimmt (nach §. 4.), und dieses verwandle man (nach §. 5.) in ein Parallelogramm mit der gegebenen Seite.

§. 8.

Aufgabe.

Ein Dreyeck in ein Parallelogramm zu verwandeln, das eine gegebene Seite und einen gegebenen Winkel hat.

Auflösung. Man verwandle zuerst das Dreyeck in ein Parallelogramm, das den gegebenen Winkel hat; alsdann verwandle man dieses (nach §. 5.) in ein anderes Parallelogramm, das die gegebene Seite hat.

Zusatz. Man kann also auch jedes Dreyeck in ein Rechteck mit einer bestimmten Seite verwandeln.

§. 9.

Aufgabe.

Jede geradlinigte Figur in ein Parallelogramm mit einem bestimmten Winkel (also auch in ein Rechteck), und mit einer bestimmten Seite zu verwandeln.

Auflösung. Man theile die gegebene Figur durch Diagonale in Dreyecke ab, verwandle jedes derselben in ein Parallelogramm, das die geforderten Bedingungen hat (nach §. 8.); dann lege man diese Parallelogramme mit den gleichen Seiten an einander, so erhält man das verlangte Parallelogramm.

§. 10.

Aufgabe.

Ein Parallelogramm in ein Dreyeck zu verwandeln, in welchem ein gegebener Winkel an der gegebenen Seite liegt.

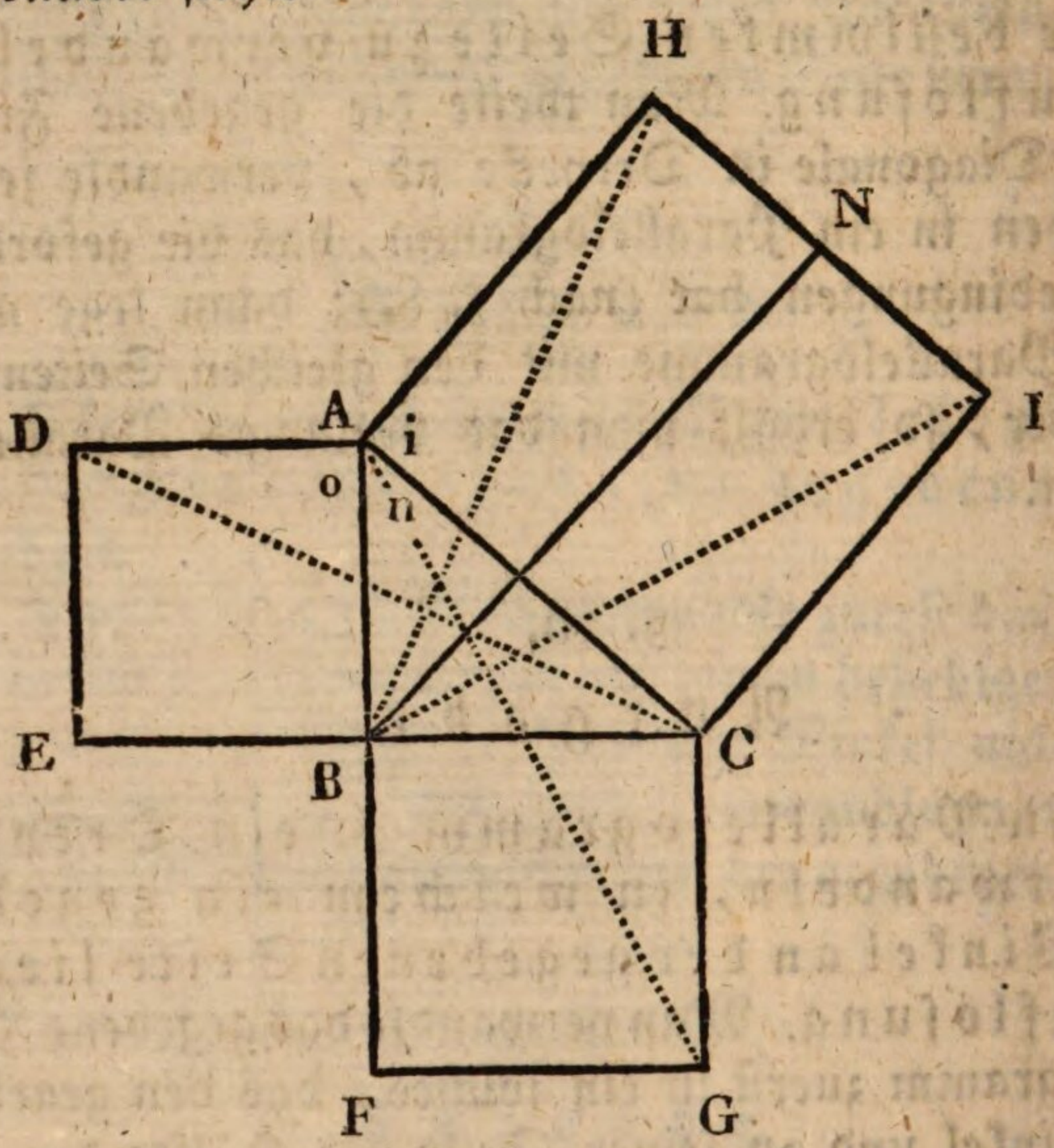
Auflösung. Man verwandle das gegebene Parallelogramm zuerst in ein solches, das den gegebenen Winkel und zu seiner Seite die Hälfte der gegebenen Seite hat; dann verdopple man diese Seite des gefundenen Parallelogramms und ergänze das Dreyeck.

§. 11.

Lehrsatz.

In einem jeden rechtwinkligten Dreyecke ist das Quadrat der Hypothenuse den Quadraten der beyden Catheten zusammen genommen gleich, d. h. wenn auf allen

drey Seiten eines rechtwinkligten Dreyeckes Quadrate errichtet werden, so ist der Flächenraum der beyden Quadrate auf den zwey Seiten, welche den rechten Winkel einschließen so groß, als das Quadrat derjenigen Seite, welche dem rechten Winkel gegenüber steht.



Erläuterung und Beweis. Es soll bewiesen werden, daß HC = AE + CF ist. Um dieses beweisen zu können, ziehe man aus der Spitze des rechten Winkels B zu CI eine Parallellinie BN, so wird dadurch das Quadrat HC in zwey Rechtecke AN und NC getheilt. Kann man nun beweisen, daß NC = CF, und AN = AE ist, so folgt nothwendig, daß HC = AE + CF ist. Nun dieses kann bewiesen werden. Um beweisen zu können, daß AN = AE ist, ziehe man BH und DC, und um beweisen zu können, daß NC = CF ist, ziehe man BI und AG.

Daß NA=AE ist, wird so bewiesen: Das △ ABH ist = △ADC; denn DA=AB, und AH=AC, weil jedes Paar dieser Linien Seiten sind eines und des nähmlichen Quadrates; ferner ist der Winkel o=i, weil es rechte Winkel sind, und n=n; also ist auch o+n = n+i; es kommen also in diesen beyden Dreyecken zwey gleiche Seiten sammt dem eingeschlossenen Winkel vor; folglich sind beyde Dreyecke einander gleich (fünft. Absch. §. 12.); nun ist aber das △ ADC die Hälfte von dem Parallelogramm AE, weil es mit demselben einerley Grundlinie und gleiche Höhe hat. Das nähmliche gilt auch von dem Dreyecke ABH, welches auch die Hälfte ist von dem Parallelogramm NA; also sind die Hälften einander gleich; folglich ist auch NA=AE. Auf eben diese Art wird auch bewiesen, daß NC=CF; denn auch hier sind die Dreyecke IBC und AGC einander gleich, welche die Hälften sind von den zwey Parallelogrammen NC und CF; folglich sind die ganzen Parallelogramme NC und CF sich gleich; also, da NC=CF, und NA=AE ist, ist HC=AE+CF, d. h. das Quadrat der Hypothenuse ist gleich den Quadraten der beyden Catheten zusammen genommen.

Anmerkung. Pythagoras, ein alter heidnischer Philosoph, hat diesen Lehrsatz, der in der Mathematik von größter Wichtigkeit ist, erfunden; er heißt darum der pythagoreische Lehrsatz, und seines großen Einflusses wegen in alle mathematischen Wissenschaften pflegt man ihn auch den Magister Matheseos (den Meister der Mathematik) zu nennen.

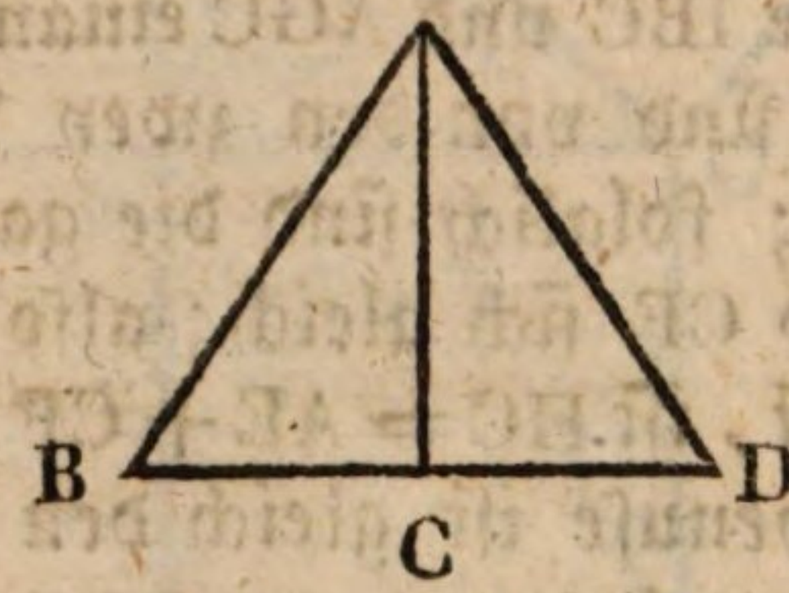
1. Zusatz. Wenn man von dem Quadrate der Hypothenuse das Quadrat eines der Catheten abzieht, so bekommt man das Quadrat des andern Catheten zum Reste, d. i. $AC^2 - AB^2 = BC^2$, oder $AC^2 - BC^2 = AC^2$.

2. Zusatz. Wenn in zwey rechtwinkligten Dreyecken die beyden Catheten einander gleich sind, so ist auch die Hypothenuse des einen Dreyeckes der Hypothenuse des andern gleich.

§. 12.

Lehrsatz.

Wenn in einem Dreyecke das Quadrat der einen Seite den Quadraten der beyden andern Seiten gleich ist; so ist das Dreyeck rechtwinkligt, und zwar steht der rechte Winkel, wie sich dieses von selbst versteht, der größten Seite gegenüber.



Vorbereitung zum Beweise. Es sey $AD^2 = AC^2 + CD^2$, so soll nach Aussage des Lehrsatzes ACD ein rechter Winkel seyn. Man errichte in C auf CD eine senkrechte BC, und mache $BC = CD$, und ziehe AB.

Beweis. Das $\triangle$ ABC ist ein rechtwinkligtes, weil der Winkel ACB nach der Verfertigung ein rechter Winkel ist; folglich ist $AB^2 = BC^2 + AC^2$; nun ist aber auch $AB^2 = CD^2 + AC^2$, weil $BC = CD$; weiter ist $AD^2 = CD^2 + AC^2$ nach der Voraussetzung; also ist $AB^2 = AD^2$; denn Größen, die einer dritten gleich

sind, sind auch unter sich gleich; folglich ist auch AB = AD; denn zwey gleiche Quadrate haben gleiche Seiten; ferner ist BC = CD, und AC = AC; die zwey Dreyecke ABC und ACD sind also einander gleich (fünft. Absch. §. 7.); nun ist aber in dem Dreyecke ABC der Winkel ACB ein rechter; folglich ist auch in dem Dreyecke ADC der Winkel ACD ein rechter. Wenn also in einem Dreyecke u. s. w.

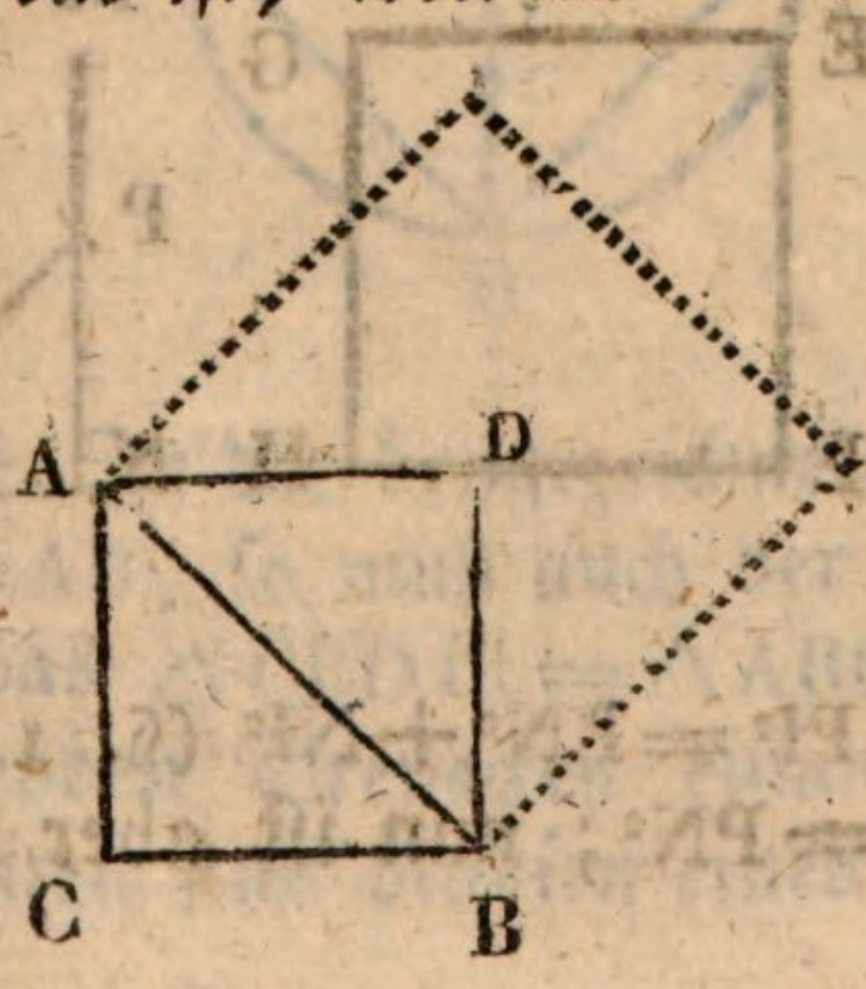
§. 13.

Aufgabe.

Zwey Quadrate in eines zu verwandeln, welches so groß ist, als beyde zusammen genommen.

Auflösung. Man nehme zwey Seiten von den beyden gegebenen Quadraten, und bilde damit einen rechten Winkel; dann ziehe man die Hypothenuse, so gibt diese die Seite zu einem Quadrate, das den beyden gegebenen Quadraten gleich ist (§. 11.).

Zusatz. Sollte ein Quadrat verfertiget werden, das noch ein Mahl so groß ist, als ein anderes, das gegeben ist, so ziehe man in dem gegebenen Quadrate (DC) die Diagonallinie (AB), so gibt diese die Seite zu einem noch ein Mahl so großen Quadrate, als das gegebene ist, weil $AB^2 = AC^2 + CB^2$ ist.



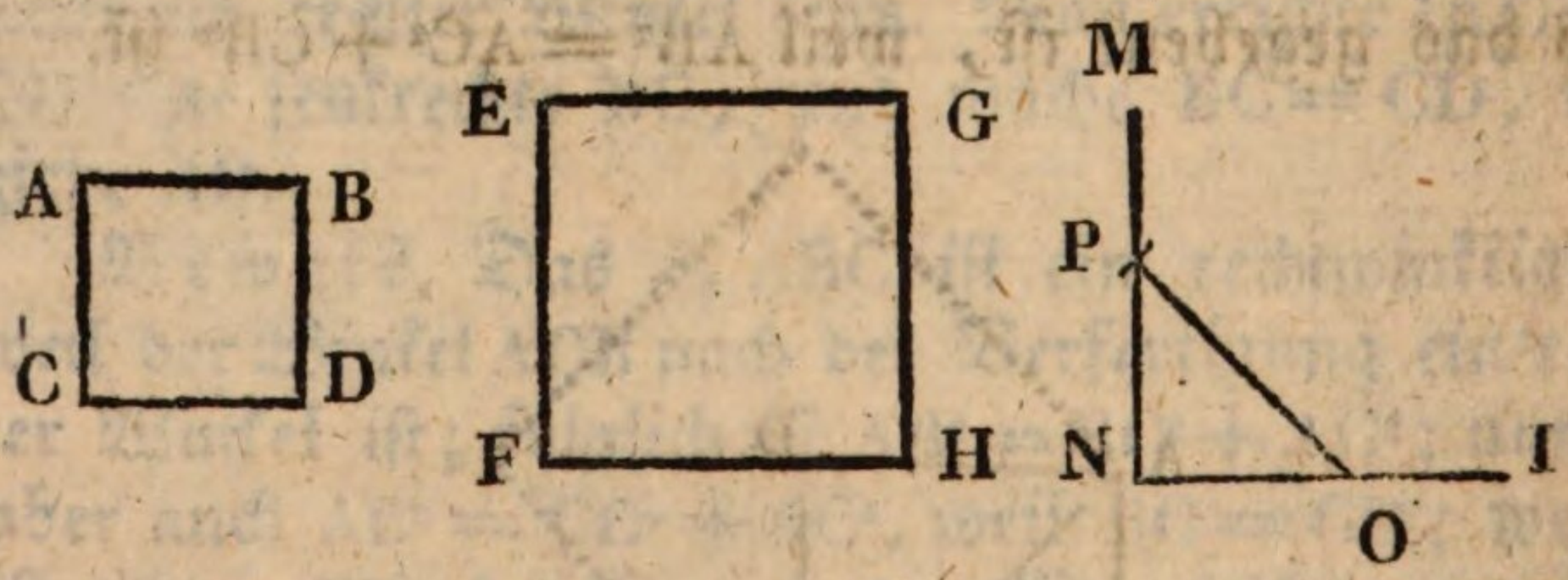
Es lassen sich also auch mehrere Quadrate in eines verwandeln, das ihnen zusammen genommen gleich ist. Wenn z. B. vier oder fünf Quadrate von verschiedener Größe in ein einziges verwandelt werden sollten, so verwandle man zuerst zwey derselben in ein einziges auf die eben gezeigte Art; dann verwandle man dieses auf dieselbe Weise mit dem dritten Quadrate u. s. w.

§. 14.

Aufgabe.

Ein Quadrat zu machen, welches der Differenz zweyer gegebenen Quadrate gleich ist.

Auflösung. Man bilde einen rechten Winkel, z. B. MNO, NO mache man mit der Seite des kleinern Quadrates, nähmlich mit CD gleich; aus I beschreibe man mit der Seite des größern Quadrates EH durch Hülfe des Zirkels auf der Linie MN einen Bogen. Von dem Durchschneidungspuncte P ziehe man auf I eine gerade Linie, so ist diese = EG, und NI = CD; PN gibt nun die Seite für das Quadrat, das die Differenz der beyden gegebenen Quadrate ist.



Beweis. $PI^2 = PN^2 + NI^2$ (§. 11.); folglich ist auch $PI^2 - NI^2 = PN^2$; nun ist aber PI = EG, und

NI = CD; also ist auch $EG^2 - CD^2 = PN^2$; wenn man also über PN ein Quadrat errichtet, so ist dieses von den beyden gegebenen Quadraten die Differenz.

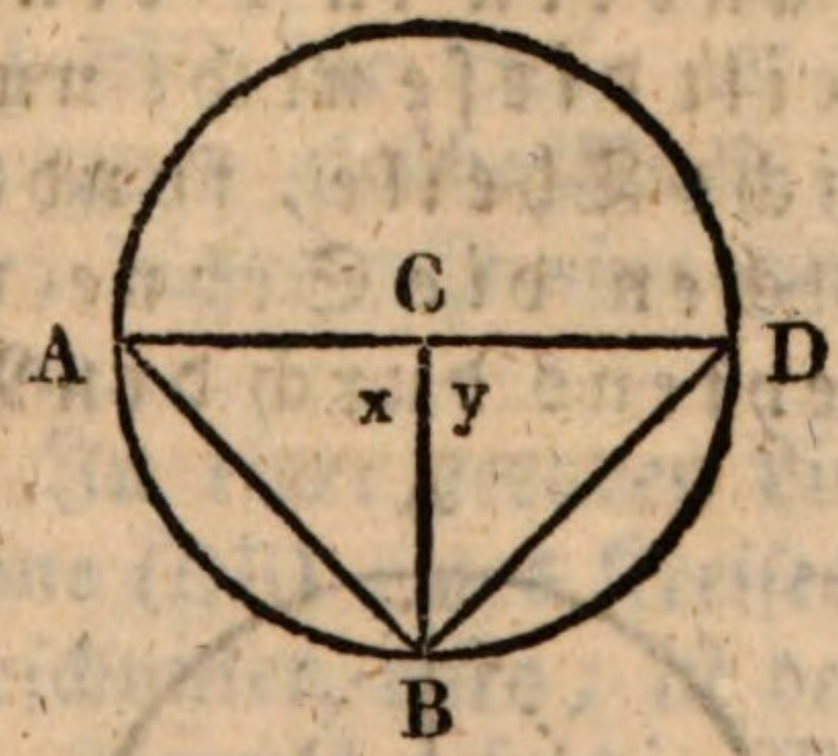
Neunter Abschnitt.

Von Linien, Winkeln und Figuren in und an dem Kreise, und von dessen Verwandlung und Ausmessung.

§. 1.

Lehrsatz.

Gleiche Bögen in einem oder gleichen Kreisen sind alle Mahl mit gleichen Sehnen, und gleiche Sehnen mit gleichen Bögen verbunden.



Beweis. In der beygezeichneten Figur sey die Sehne BD = AB, so muß auch der Bogen BD = AB seyn; denn das △ CBD ist = △ ABC; weil alle drey Seiten in beyden Dreyecken einander gleich sind; denn alle Seiten sind Radien eines und des nähm-

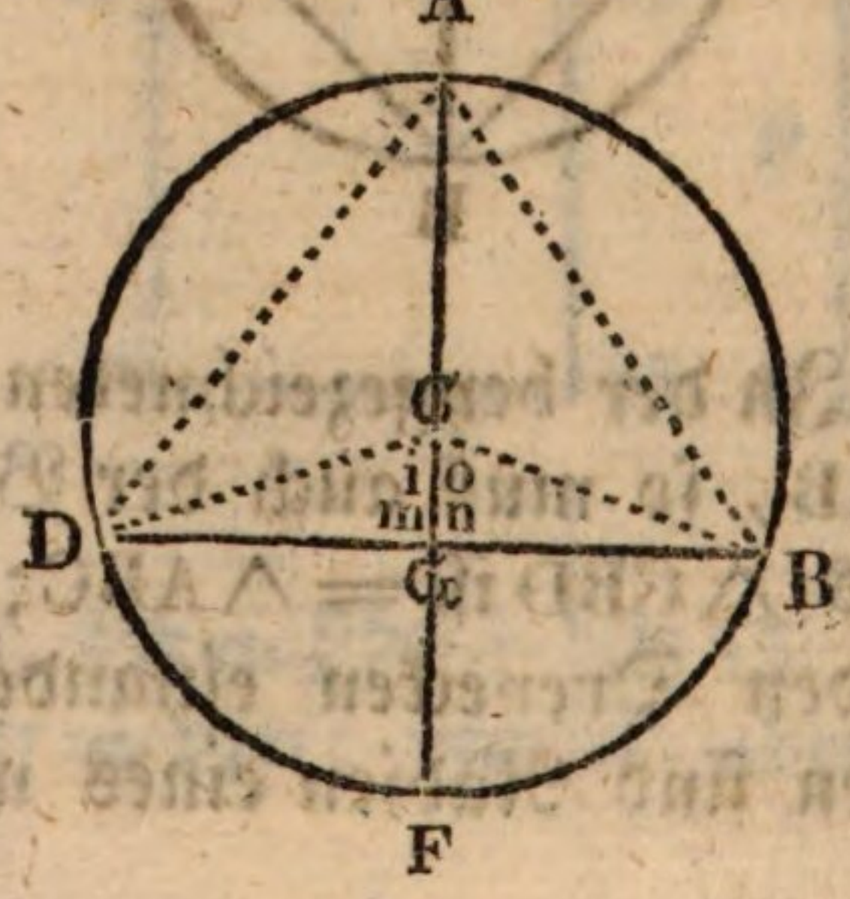
lichen Zirkels; also ist auch der Winkel y = x; gleiche Winkel aber haben gleiches Maß; das Maß des Winkels y ist der Bogen BD, und das Maß des Winkels x ist der Bogen AB; also ist der Bogen BD = AB; in einem Kreise überspannen also gleiche Sehnen gleiche Bögen.

Umgekehrt, wenn die Bögen BD und AB einander gleich sind, so müssen auch die Sehnen BD und AB einander gleich seyn; denn in diesem Falle ist dann y = x, und überdieß CD = CA, und CB = CB; folglich sind die ganzen Dreyecke ACB und CBD einander gleich (fünft. Absch. §. 12.); also wird auch die Sehne AB = BD seyn; folglich haben gleiche Bögen in einem Kreise auch gleiche Sehnen.

§. 2.

Lehrsatz.

Wenn man in einem Kreise auf den Mittelpunct einer Sehne von dem gegenüber stehenden Puncte der Peripherie bis zu dem andern in F eine senkrechte zieht, so theilt diese nicht nur die Sehne in zwey gleiche Theile, sondern auch den Bogen, welchen die Sehne überspannt, und geht zweytens durch den Mittelpunct.



Erläuterung und Beweis. Es muß erstens bewiesen werden, daß die Bögen DF und FB einander gleich sind. Um dieses beweisen zu können, ziehe man die Hülfslinien DC und CB, so bekommt man zwey Dreyecke, nähmlich DCG und CGB, die einander gleich sind, weil darin alle drey Seiten einander gleich sind; also ist auch der $< i = < o$; gleiche Winkel aber haben gleiches Maß; also muß der Bogen DF, das Maß des Winkels i gleich seyn dem Bogen FB, welcher das Maß des Winkels o ist.

Zweytens muß bewiesen werden, daß dann die Senkrechte AF, welche die Sehne DB in zwey gleiche Theile theilt, durch den Mittelpunct gehen muß. Dieses wird so bewiesen: Nach dem Vorigen ist der Bogen DF = FB, aber auch der Bogen DA ist gleich AB; denn beyde sind das Maß der Winkel m und n; nun sind aber diese rechte Winkel, weil AG senkrecht auf DB steht; rechte Winkel sind aber einander gleich, und haben gleiches Maß; folglich ist der Bogen AB = AD; setzt man nun zu diesen beyden Bögen die zwey andern gleichen Bögen DF und FB hinzu, so bleibt Gleiches; also ist der Bogen AD + DF = AB + BF; die Linie AF theilt also den ganzen Kreis in zwey gleiche Theile; folglich ist sie der Durchmesser, dieser geht aber durch den Mittelpunct; also u. s. w.

1. Zusatz. In einer geraden Linie (AF), von welcher die Sehne (DB) eines Kreises in der Mitte (G) senkrecht geschnitten wird, ist der Mittelpunct.

2. Zusatz. Hieraus geht die Methode hervor, den Mittelpunct eines Kreises zu finden, welche darin besteht: Man ziehe in dem Kreise eine beliebige Sehne, wenn noch keine gezogen ist; halbire dieselbe und errichte auf ihren Mittelpunct eine senkrechte Linie, diese verlängere man so, daß sie von einem

Ende der Peripherie zu dem andern reicht; diese ist dann der Durchmesser des Kreises, in deren Mitte sich der Mittelpunct befindet, den man also dadurch findet, wenn man diese Linie halbirt. Man sehe obige Figur an.

§. 3.

Lehrsatz.

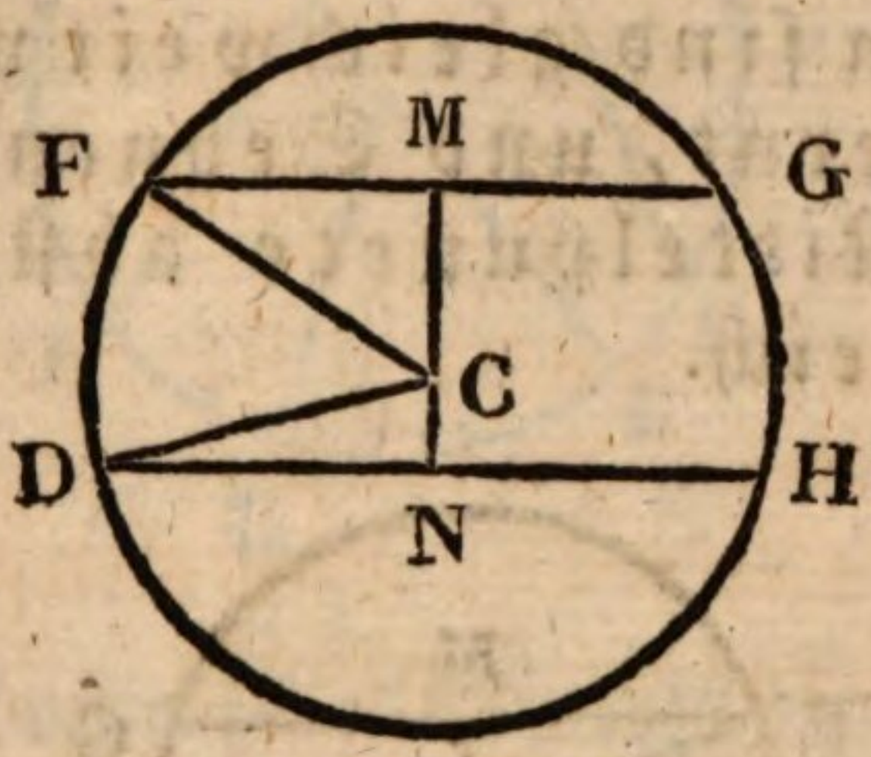
Wenn man aus dem Mittelpuncte auf die Sehne eine Senkrechte zieht, so theilt diese die Sehne und den Bogen der Sehne in zwey gleiche Theile.

Erläuterung und Beweis. Wenn CF (siehe obige Figur) auf DB senkrecht aus dem Mittelpuncte C errichtet ist, so muß nach Aussage des Lehrsatzes DG = GB, und DF = BF seyn. Dieß wird so bewiesen: Die Dreyecke DCG und CGB sind rechtwinkligte Dreyecke, weil m und n rechte Winkel sind; DC und CB sind also die Hypothenusen, die sind aber einander gleich, weil sie Radien eines nähmlichen Zirkels sind; ferner ist die Cathete CG gemeinschaftlich und sich selbst gleich; also muß auch die zweyte Cathete DG der andern Cathete GB gleich seyn; die Sehne DB wird also in zwey gleiche Theile getheilt; weiter sind die Dreyecke DCG und CGB eben deßwegen einander gleich, weil alle drey Seiten in beyden einander gleich sind; folglich muß auch der Winkel i = dem Winkel o seyn; gleiche Winkel aber haben gleiches Maß; also muß auch der Bogen DF = FB seyn; **wenn man also u. s. w.**

§. 4.

Lehrsatz.

In einem oder in gleichen Kreisen ist die größere Sehne nicht so weit von dem Mittelpuncte entfernt, als die kleinere.



Vorbereitung zum Beweise. Die Sehne DH sey > FG, so muß DH näher beym Mittelpuncte C seyn, als FG, oder was einerley ist CN muß kleiner seyn, als CM. Man ziehe die Halbmesser FC und DC, so bekommt man zwey rechtwinkligte Dreyecke FMC und DCN; denn die Winkel N und M sind rechte. Weil nun DH > FG ist, so muß auch die Hälfte DN > EM seyn.

Beweis. $FC^2 = FM^2 + MC^2$, und $DC^2 = DN^2 + NC^2$ (acht. Absch. §. 11.); nun ist aber $FC^2 = DC^2$, weil beyde Radien des nähmlichen Zirkels sind; Größen aber, die einer dritten gleich sind, sind auch unter sich gleich; also ist $FM^2 + MC^2 = DN^2 + NC^2$; nun ist aber $DN^2 > FM^2$; also muß $NC^2 < MC^2$ seyn; folglich wird auch NC < MC bleiben nach der Ausziehung der Quadratwurzel; die größere Sehne DH steht also nicht so weit von dem Mittelpuncte, als die kleinere FG.

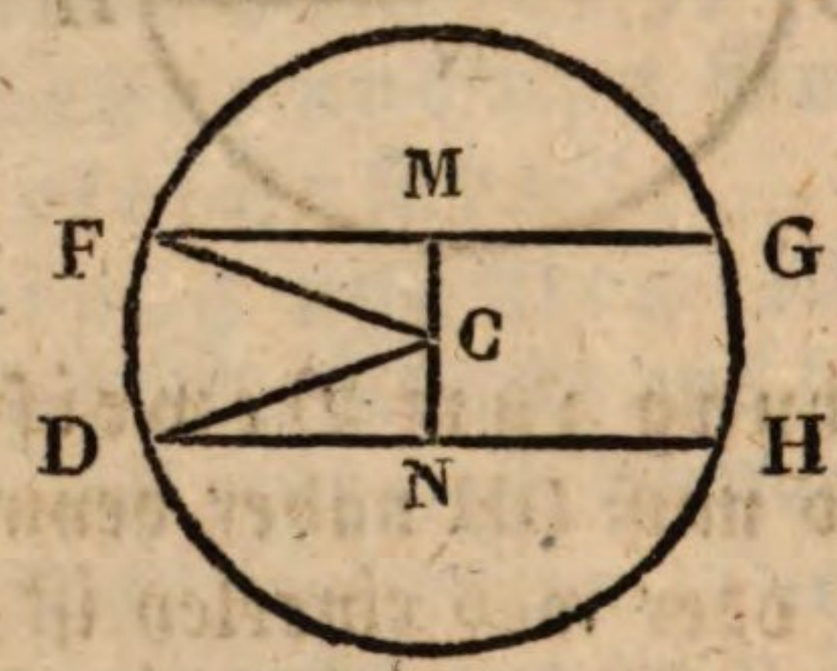
1. Zusatz. In einem oder in gleichen Kreisen, ist die entferntere Sehne demnach kleiner, als die nähere.

2. Zusatz. Der Diameter oder Durchmesser, ist also die größte Sehne eines Kreises.

§. 5.

Lehrsatz.

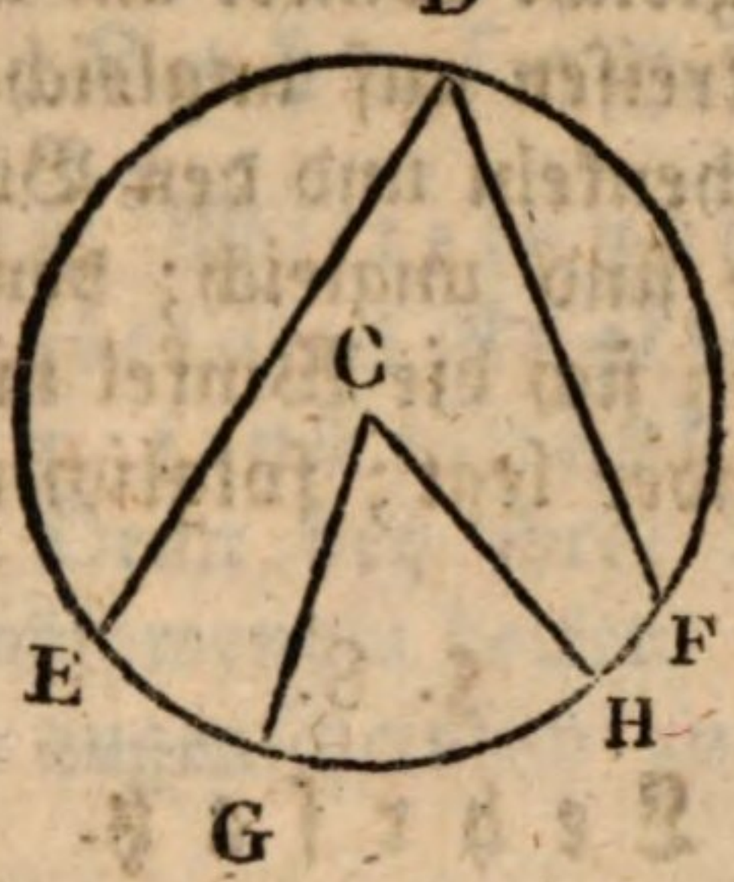
Gleiche Sehnen in einem oder in gleichen Kreisen sind gleichweit vom Mittelpuncte entfernt, und Sehnen, die gleichweit vom Mittelpuncte abstehen, sind einander gleich.



Beweis. In diesem Falle sind die rechtwinkligten Dreyecke, wenn man die Radien FC und DC zieht, einander gleich; denn die beyden Radien sind einander gleich, weil sie Radien eines nähmlichen Zirkels (oder doch von gleichen Zirkeln sind), und da auch die Sehnen FG und DH einander gleich sind, wie vorausgesetzt wird, so ist auch GM = DN; also muß auch NC = CM seyn, weil unter diesen Umständen die Dreyecke einander decken müssen; also u. s. w.

§. 6.

Erklärung der Centri- und Peripheriewinkel.



Wenn die Spitze eines Winkels am Mittelpuncte eines Zirkels liegt, so heißt ein solcher Winkel ein Winkel am Mittelpuncte, ein Winkel am Centro, oder ein Centriwinkel (ein Mittelpunctswinkel). So ist der ∠GCH ein Centriwinkel. Liegt aber die Spitze (der Scheitelpunct) eines Winkels an der Peripherie, wie der Winkel EDF, so heißt er ein Winkel am Umkreise, oder Peripheriewinkel. Man sagt von ihnen, daß sie auf den Bögen ruhen, welche ihre verlängerten Schenkel von der Peripherie abschneiden. So ruht der Winkel D auf dem Bogen EF, und Winkel C auf dem Bogen GH.

§. 7.

Lehrsatz.

Gleiche Winkel am Mittelpuncte stehen in gleichen Kreisen auf gleichen Bögen und Sehnen, und die von ihren Schenkeln und den Bögen eingeschlossenen Ausschnitte sind congruent.

Beweis. Denn in diesem Falle müssen sie sich nothwendig decken, folglich müssen sie gleich und congruent seyn.

Zusatz. Ungleiche Winkel am Mittelpuncte stehen in gleichen Kreisen auf ungleichen Bögen, und die von ihren Schenkeln und den Bögen eingeschlossenen Ausschnitte sind ungleich; denn unter diesen Umständen werden sich die Winkel nicht decken, wenn man sie auf einander legt; folglich u. s. w.

§. 8.

Lehrsatz.

Gleiche Winkel am Mittelpuncte stehen in einem Kreise auf gleichen Bogen und Sehnen, und die von ihren Schenkeln und den Bögen eingeschlossenen Ausschnitte sind congruent.

Beweis. Denn sie müssen sich nothwendig decken, wenn man sie auf einander legt.

1. Zwey Durchmesser, die sich senkrecht schneiden, theilen den Umkreis und Kreis selbst in vier congruente Theile, und jeder dieser Theile sowohl der Peripherie, als des Kreises selbst heißt ein Quadrant.

Der zu einem stumpfen Winkel am Mittelpuncte gehörige Bogen ist größer, als ein Quadrant, der zu einem spitzigen Centriwinkel gehörige Bogen ist kleiner, als ein Quadrant.

2. Zusatz. Ungleiche Winkel am Mittelpuncte stehen in einem Kreise auf ungleichen Bögen, und die von ihren Schenkeln und Bögen eingeschlossenen Ausschnitte sind ungleich.

Anmerkung. Um sich die in den zwey vorigen Paragraphen enthaltenen Lehr- und Zusätze zu

versinnlichen, und die Wahrheit derselben deutlich einzusehen, verzeichne man die dazu gehörigen Figuren.

§. 9.

Lehrsatz.

Winkel am Mittelpuncte, die in einem oder in gleichen Kreisen auf gleichen Bögen ruhen, sind einander gleich.

Beweis. Denn bey ihrer Aufeinanderlegung müssen sie sich nothwendig decken. Man versuche es, um sich hiervon augenscheinlich zu überzeugen.

§. 10.

Lehrsatz.

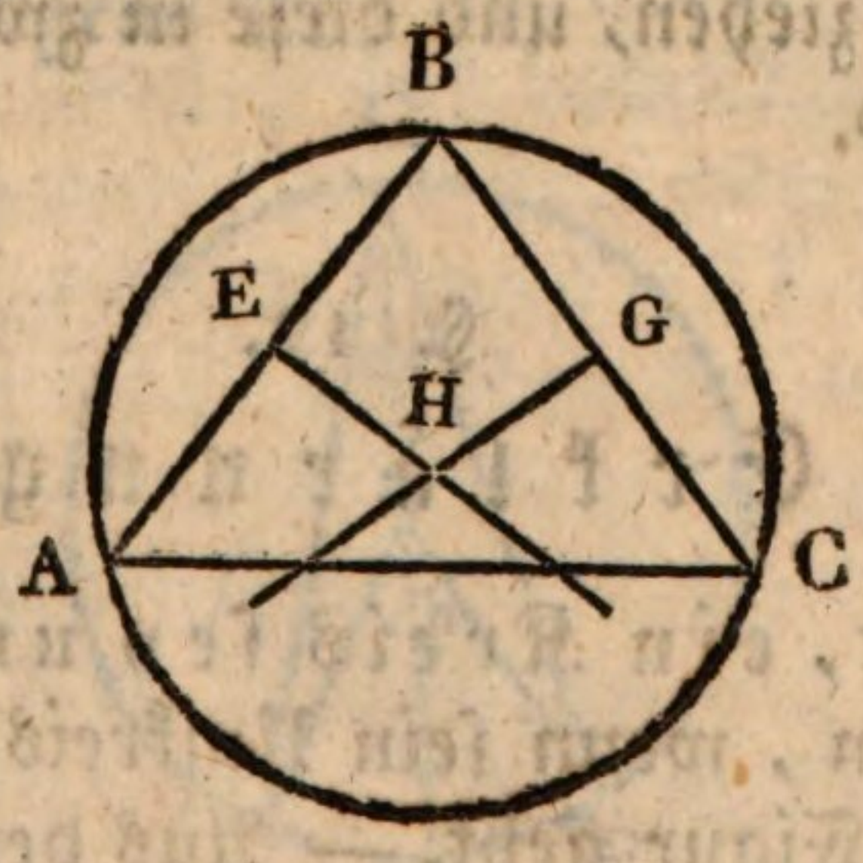
In einem oder in gleichen Kreisen, gehören zu gleichen Bögen gleiche Sehnen, und zu gleichen Sehnen gleiche Bögen.

Der Beweis dieses Lehrsatzes liegt am Tage.

§. 11.

Aufgabe.

Durch drey gegebene Puncte, die nicht in gerader Linie liegen, einen Kreis zu beschreiben.



Auflösung. Die drey gegebenen Puncte seyen A, B, C. Man verbinde sie durch gerade Linien, durch AC, CB und BA. Man theile nun zwey davon AB und BC in zwey gleiche Theile. Auf die Theilungspuncte E und G errichte man zwey senkrechte Linien, und verlängere sie, bis sie einander in einem Puncte schneiden; dort nun, wo sie zusammen stoßen, ist das Centrum, nähmlich in H. Man darf jetzt nur die Länge von dem Puncte H bis zu dem Puncte A, oder B, oder C durch Hülfe des Zirkels nehmen, so hat man den Halbmesser, mit dem man durch die drey gegebenen Puncte einen Kreis beschreiben kann.

Beweis. AC, BC und BA kann ich als Sehnen betrachten, von einem Zirkel, dessen Endpuncte in der Peripherie liegen. Werden nun diese Sehnen in zwey gleiche Theile getheilt, und errichtet man auf die Theilungspuncte zwey senkrechte, so müssen diese durch den Mittelpunct gehen (§. 2.); wo sie sich also in ihrer Verlängerung durchkreuzen, dort muß der Mittelpunct seyn, von dem man durch die drey gegebenen Puncte einen Kreis, wie verlangt wird, beschreiben kann.

Zusatz. Hieraus ergibt sich also die Art und Weise, wie man zu einem Bogen oder Kreis den Mittelpunct, wenn solcher unbekannt ist, finden kann. Man darf nähmlich nur in dem Bogen oder Kreise zwey Sehnen ziehen, und diese in zwey gleiche Theile theilen u. s. w.

§. 12.

Erklärung.

Man sagt, ein Kreis sey um eine Figur beschrieben, wenn sein Umkreis durch alle Winkelspitzen der Figur geht. — Aus dem vorigen §. er-

gibt sich die Auflösung der Aufgabe: Man soll um ein Dreyeck einen Kreis beschreiben.

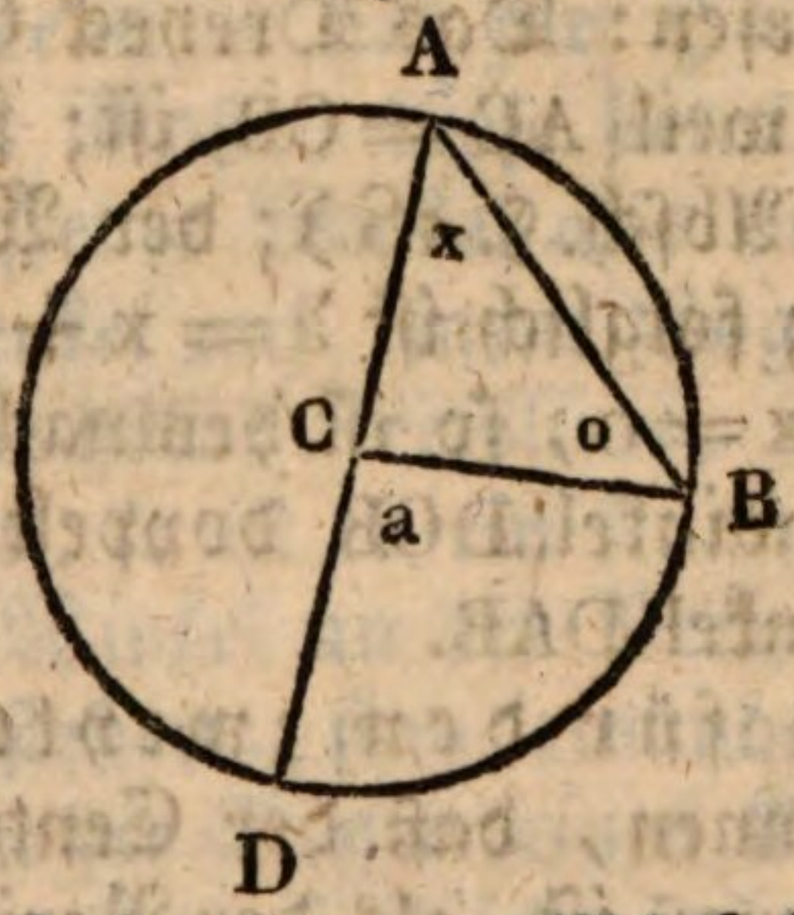
§. 13.

Lehrsatz.

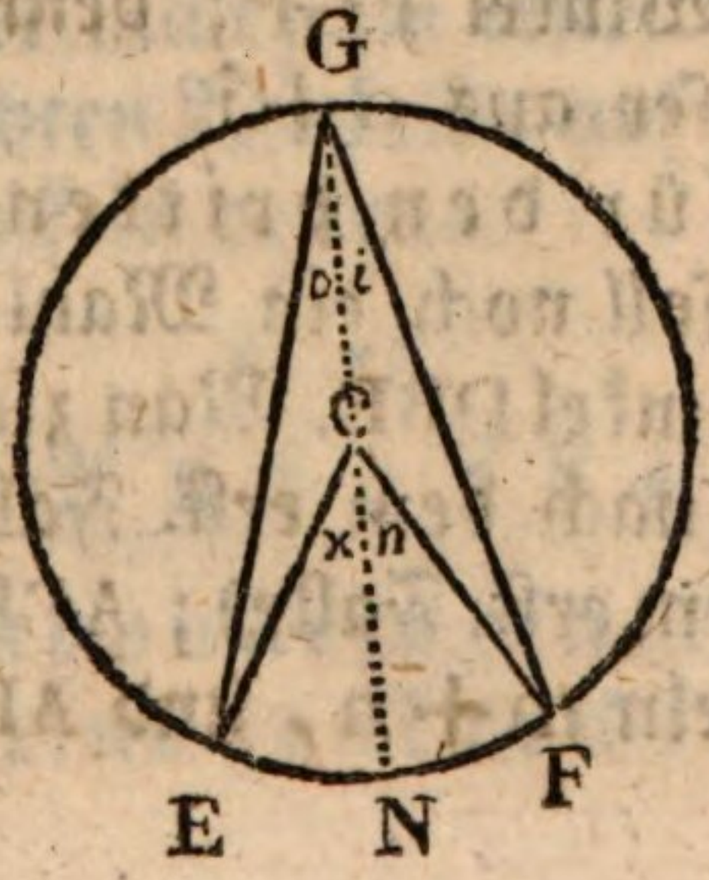
Der Winkel am Mittelpuncte ist doppelt so groß, als der Winkel am Umkreise, der mit ihm auf demselben Bogen steht.

Vorbereitung zum Beweise. Es lassen sich für die Lage des Winkels am Umfange drey Fälle denken.

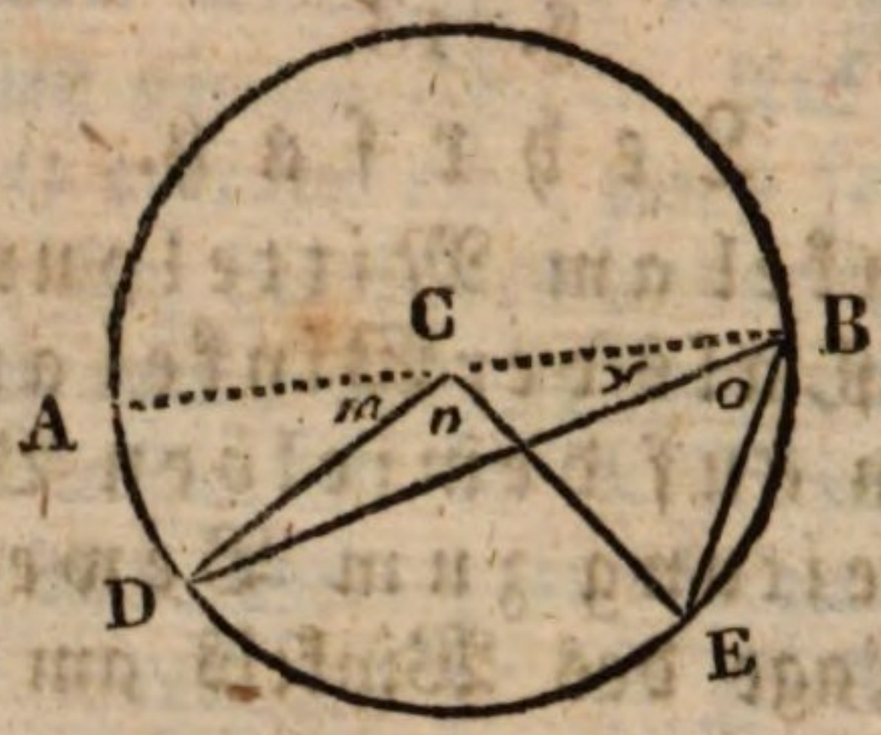
1) Entweder liegt er so, daß ein Schenkel von ihm mit einem Schenkel des Winkels am Mittelpuncte in gerader Linie liegt, wie DAB und DCB.



2) Oder die Schenkel des Winkels an der Peripherie (am Umfange), begegnen den Schenkeln des Winkels am Mittelpuncte erst an den beyden Endpuncten des Bogens EF.



3) Oder ein Schenkel des Winkels am Umkreise (BD) schneidet einen Schenkel des Winkels am Mittelpuncte.



Beweis für den ersten Fall. Es soll bewiesen werden, daß der Centriwinkel DCB doppelt so groß ist, als der Peripheriewinkel DAB. Dieses wird so bewiesen: Das Dreyeck CAB ist ein gleichschenkligtes, weil AC = CB ist; folglich ist der < x = o (fünft. Absch. §. 18.); der Winkel a ist ein äußerer Winkel; folglich ist a = x + o (sechst. Absch §. 8.); da aber x = o, so ist demnach a = 2 x; folglich ist der Centriwinkel DCB doppelt so groß, als der Peripheriewinkel DAB.

Beweis für den zweyten Fall. Um beweisen zu können, daß der Centriwinkel ECF noch ein Mahl so groß ist, als der Peripheriewinkel EGF, ziehe man die Linie GN. Dieses wird so bewiesen: Nach dem ersten Falle ist 2 x = o, und 2 n = i; folglich ist der ganze Winkel ECF noch ein Mahl so groß, als der Winkel EGF; denn jener besteht aus x + n, und dieser aus o + i.

Beweis für den dritten Fall. Der Centriwinkel DCE soll noch ein Mahl so groß seyn, als der Peripheriewinkel DBE. Man ziehe AB. Beweis. 2 ACD = ABD (nach dem erst. Falle); ferner 2 ACE = ABE (nach dem erst. Falle); ACE besteht aber aus den zwey Winkeln m + n, und ABE aus x + o, also

$2m+n=x+o$; nun ist aber $2m=x$; folglich ist $2n=o$; denn wenn man Gleiches von Gleichem abzieht, so bleibt Gleiches; also ist DCE noch ein Mahl so groß, als DBE. — Da nun nur diese drey Fälle möglich sind, so ist also überhaupt bewiesen, daß jeder Winkel an dem Mittelpuncte doppelt so groß ist, als der Winkel am Umkreise, der mit ihm auf demselben Bogen steht.

1. Zusatz. Ein Winkel an der Peripherie hat also die Hälfte von dem Bogen zu seinem Maße, auf dem seine Schenkel stehen.

2. Zusatz. Jeder Winkel am Umkreise, der auf einem halben Kreise ruht, oder dessen Schenkel auf den Endpuncten des Durchmessers stehen, ist ein rechter Winkel; denn er hat die Hälfte des halben Kreises zu seinem Maße, diese beträgt aber 90°.

3. Zusatz. Jeder Winkel also an der Peripherie, dessen Schenkel auf einem Bogen ruhen, der kleiner ist, als die halbe Kreislinie, ist ein spitziger, ist er aber größer, so ist er ein stumpfer Winkel.

4. Zusatz. Winkel an der Peripherie, die auf einerley Bögen stehen, sind einander gleich. Und umgekehrt müssen die Bögen eines Kreises einander gleich seyn, wenn darauf gleich große Winkel stehen.

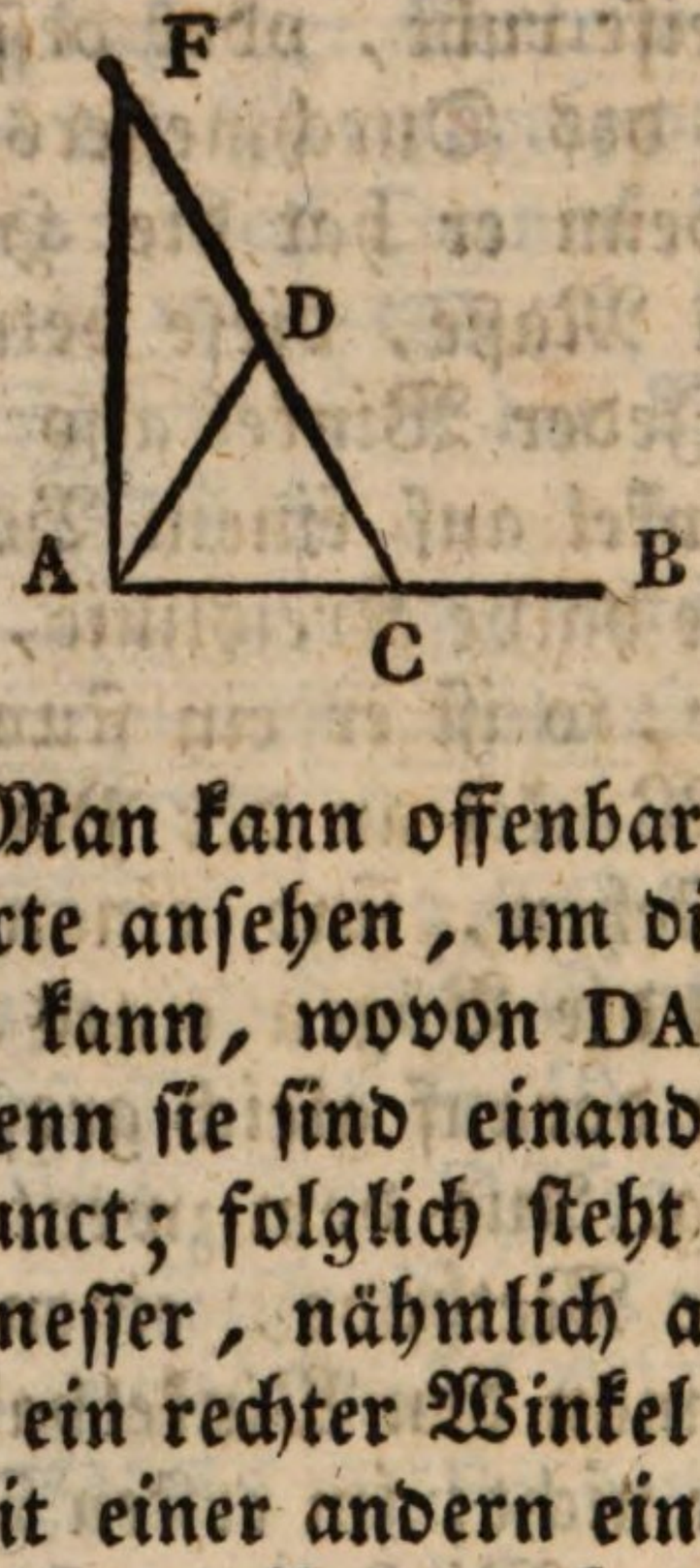
Anmerkung. Aus dem zweyten Zusatze ergibt sich eine bequeme Methode, einen rechten Winkel zu bilden, woran man den Winkelhaken prüfen kann, ob er echt ist oder nicht; im ersten Falle wird er die Schenkel des rechten Winkels, auf den man ihn legt, mit seinen Schenkeln decken.

§. 14.

Aufgabe.

An dem Endpuncte einer geraden gegebenen Linie eine senkrechte zu errichten.

Auflösung. Die gegebene Linie sey AB. Man soll an dem Puncte A eine senkrechte errichten. Um dieses bewerkstelligen zu können, verfahre man auf folgende Art: Man schneide ein beliebiges Stück von AB ab, z. B. AC. Auf AC errichte man ein gleichschenkliges Dreyeck von beliebiger Größe, nähmlich ACD. Man verlängere DC nach Belieben in gerader Richtung, und trage von D die Länge DC auf die verlängerte Linie auf, so daß DF = DC ist. Von dem Puncte F auf den Punct A ziehe man nun eine gerade Linie, so wird diese auf AB senkrecht stehen.



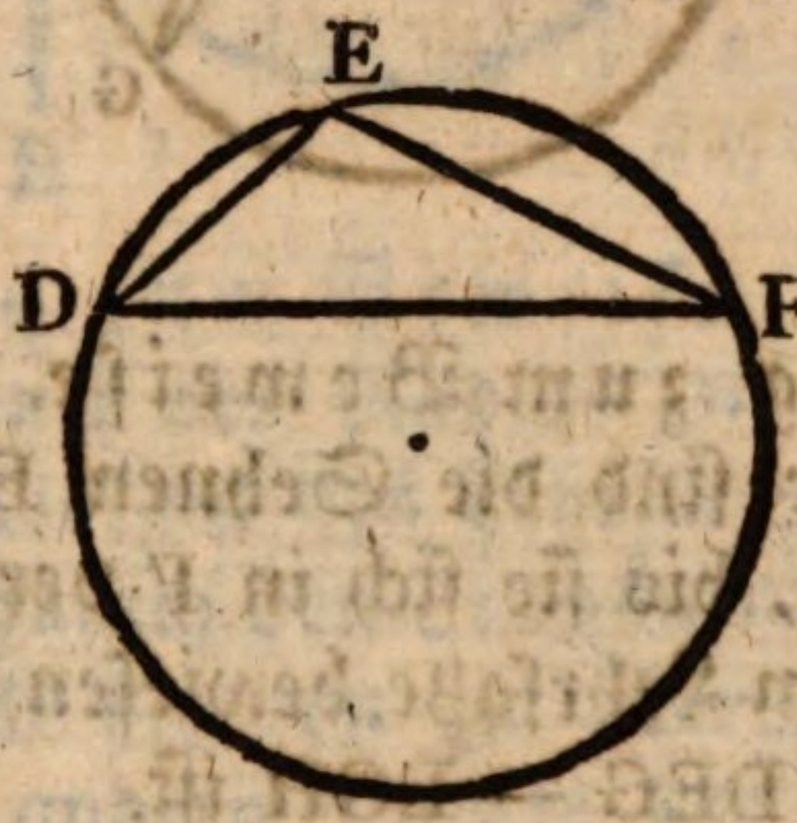
Beweis. Man kann offenbar die Puncte FAC als solche Puncte ansehen, um die eine Peripherie gezogen werden kann, wovon DA, AC und FD die Radien sind; denn sie sind einander gleich, und D ist der Mittelpunct; folglich steht der Winkel FAC auf dem Durchmesser, nähmlich auf FC, der Winkel FAC ist also ein rechter Winkel (§. 13.); eine Linie aber, die mit einer andern einen rechten Winkel bildet, steht auf derselben senkrecht; also steht FA auf AB senkrecht; auf die gezeigte Art kann also eine senkrechte errichtet werden.

Zusatz. Man sieht leicht ein, wie man einen rechten Winkel nach obiger Methode verfertigen kann.

§. 15.

Erklärung.

Ein Winkel heißt ein Winkel im Abschnitte, wenn seine Spitze im Bogen des Abschnittes und seine Schenkel auf den Endpuncten der Sehne desselben ruhen. So ist der Winkel DEF ein Winkel im Abschnitte.



Aus §. 13. ergibt sich, daß ein Winkel in einem Abschnitte, der kleiner ist, als ein halber Kreis, ein stumpfer, und ein Winkel in einem Abschnitte, der größer ist, als ein halber Kreis, ein spitziger Winkel ist; denn ein Peripheriewinkel, der den halben Kreis zu seinem Maße hat, ist ein rechter Winkel.

§. 10.

Lehrsatz.

Wenn man zwey nicht parallele Sehnen über den Kreis hinaus verlängert, bis sie sich schneiden; so ist der Winkel, den sie außerhalb dem Kreise bilden, gleich dem Unterschiede der Peripheriewinkel, welche auf den zwischen den Sehnen abgeschnittenen Bögen stehen.

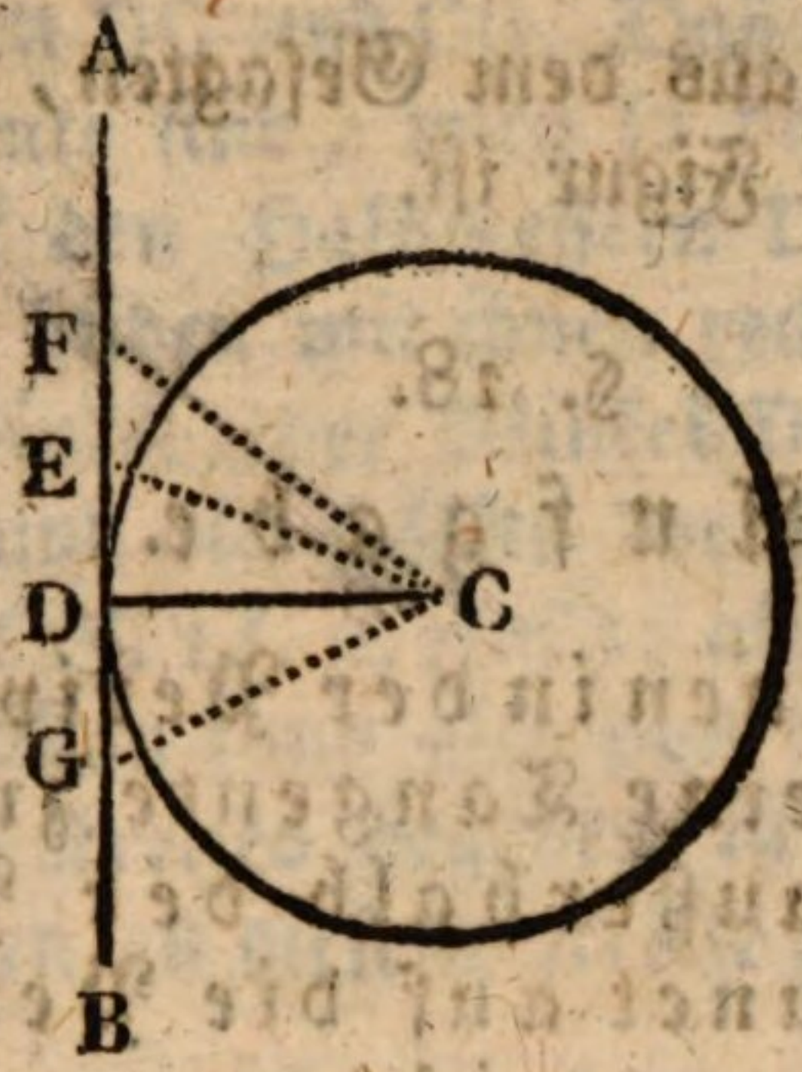
Anleitung zum Beweise. In der beygezeichneten Figur sind die Sehnen ED und HG verlängert worden, bis sie sich in F vereinigten. Es soll nun nach obigem Lehrsatze bewiesen werden, daß der Winkel DFG = DEG — EGH ist.

Beweis. Der Winkel DEG ist EFG + FGF, weil er ein äußerer Winkel ist (sechst. Abschn. §. 8.); wenn also von dem Winkel E der Winkel G abgezogen wird, so gibt der Rest das Maß für den Winkel F; der äußere Winkel F ist also gleich dem Winkel E—G, und so ist obiger Lehrsatz erwiesen.

§. 17.

Lehrsatz.

Wenn man auf dem Endpuncte eines Radius eine senkrechte Linie (eine Tangente) errichtet, so hat diese mit der Peripherie nur diesen einen Punct gemein.



Anleitung zum Beweise. Die Linie AB ist auf den Endpunct des Radius DC senkrecht errichtet, und nach Aussage des Lehrsatzes hat sie nur einen Punct, nähmlich den Endpunct mit dem Radius gemein. Um sich hiervon zu überzeugen, so ziehe man von jedem andern Puncte der senkrechten Linie eine Linie bis zum Mittelpuncte des Kreises C, z. B. FC, EC, GC. Jeder dieser Linien nun ist offenbar größer, als der Radius, weil sie die Hypothenuse und er (der Radius) eine Cathete des rechtwinkligten Dreyeckes ist; denn die Dreyecke FDC, EDC und GDC sind lauter rechtwinkligte Dreyecke, weil AD auf DC senkrecht steht; also kann die senkrechte AD die Linie DC nur in einem Puncte, nähmlich in dem Endpuncte D berühren. Jeder andere Punct der senkrechten Linie AD liegt außerhalb des Kreises.

Eine solche Linie nun, welche den Kreis nur berührt, heißt eine **Berührungslinie** oder **Tangente** des Kreises.

Jede Tangente steht auf dem Endpuncte des Halbmessers senkrecht, und macht also mit ihm einen rechten Winkel. Auch der Halbmesser steht auf der Tangente senkrecht, weil er die kürzeste Linie ist, die vom Mittelpuncte C nach AB gezogen werden kann.

Auch erhellet aus dem Gesagten, daß der Kreis eine krummlinigte Figur ist.

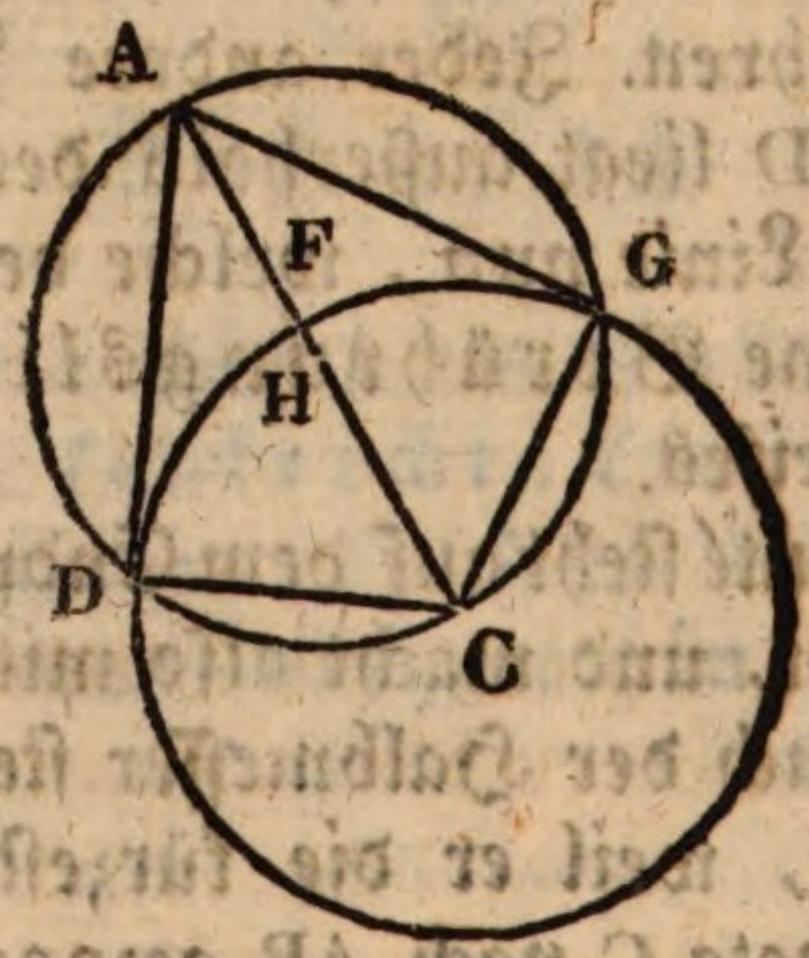
§. 18.

Aufgabe.

1) Durch einen in der Peripherie gegebenen Punct eine Tangente zu ziehen. 2) Durch einen außerhalb der Peripherie gegebenen Punct auf die Peripherie eine Tangente zu errichten.

Auflösung. Im ersten Falle ziehe man aus dem gegebenen Puncte in der Peripherie den Halbmesser, und errichte dann auf dem Endpuncte desselben eine senkrechte, so ist diese verlangte Tangente. (Man sehe die vorige Figur an).

Im zweyten Falle ziehe man von dem gegebenen Puncte (A) bis zum Mittelpuncte (C) eine gerade Linie (AC); diese halbire man (in H), und beschreibe einen Kreis, der AH zum Halbmesser hat, dieser wird den gegebenen Kreis in D und G schneiden; alsdann ziehe man aus dem einen Durchschneidungspuncte aus D oder G eine gerade Linie DA oder AG, so ist diese die verlangte Tangente.



Beweis. Um diesen führen zu können, so ziehe

man die Radien DC und CG. Daß nun AD und AG wirklich Tangente sind, wird so bewiesen: AD und AG stehen auf den Halbmessern DC und CG senkrecht; denn sie bilden mit ihnen rechte Winkel, weil jeder dieser Winkel, der Winkel D und G ein Centriwinkel ist, und die Hälfte der Peripherie zu seinem Maße hat (§. 13. 2. Zus.); also u. s. w.

Zusatz. Man kann also von einem Puncte, der außerhalb des Kreises gegeben ist, eine oder auch zwey Tangenten zu diesem Kreise ziehen.

§. 19.

Lehrsatz.

Wenn zwey Tangenten (DA und GA) des Kreises einander (in A) schneiden, so sind diese vom Durchschneidungspuncte angefangen bis zum Berührungspuncte am Kreise gleich groß; auch werden die Winkel GAD und GCD nebst dem Bogen DFG von AC halbirt.

Beweis. Die bey D und G rechtwinkligte Dreyecke haben die gleichen Seiten DC = CG und CA = CA; also ist DA = AG, und DAC = CAG, DCA = ACG (§. 11. 2. Zus.); folglich ist auch der Bogen DF = FG; denn gleiche Winkel haben gleiches Maß; also u. s. w.

§. 20.

Erklärung.

Ein Kreis wird in einer Figur beschrieben, wenn er alle Seiten der Figur von innen berührt.

Eine Figur wird um einen Kreis be-

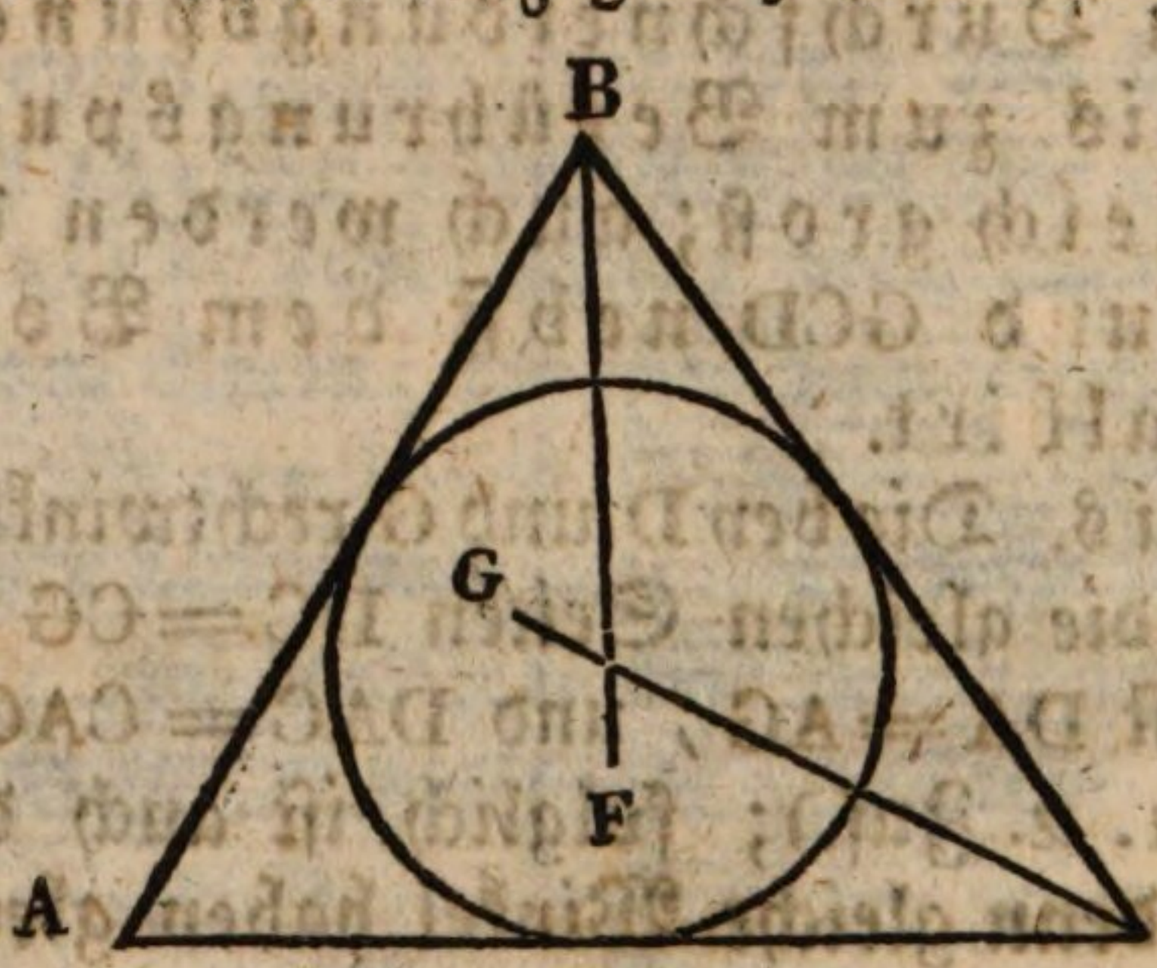
schrieben, wenn jede ihrer Seiten den Kreis von außen berührt.

§. 21.

Aufgabe.

Einen Kreis in ein Dreyeck zu beschreiben.

Auflösung. Das gegebene Dreyeck sey ABC. Man halbire zwey Winkel des Dreyeckes, z. B. die Winkel B und C durch BF und CG. Wo sich nun diese zwey Linien durchschneiden, dort ist der Mittelpunct des Kreises. Von diesem aus bis zu einem gegenüber stehenden Puncte einer Seite des Dreyeckes beschreibe man einen Kreis, so wird dieser in dem Dreyecke so herumgehen, daß er an jeder Seite desselben nur einen einzigen Punct berührt.



Beweis. Zwey Seiten eines Dreyeckes kann man als zwey Tangenten eines Kreises betrachten; wird nun der Winkel, den diese zwey Seiten bilden, durch eine gerade Linie halbirt, so geht diese durch den Mittelpunct eben jenes Kreises, wovon die zwey Seiten des Dreyeckes die Tangenten sind, wie dieses aus §. 19. erhellet. Nimmt man nun zu diesen zwey Seiten des Dreyeckes noch die dritte Seite, und betrachtet diese mit der ihr anliegenden Seite, die

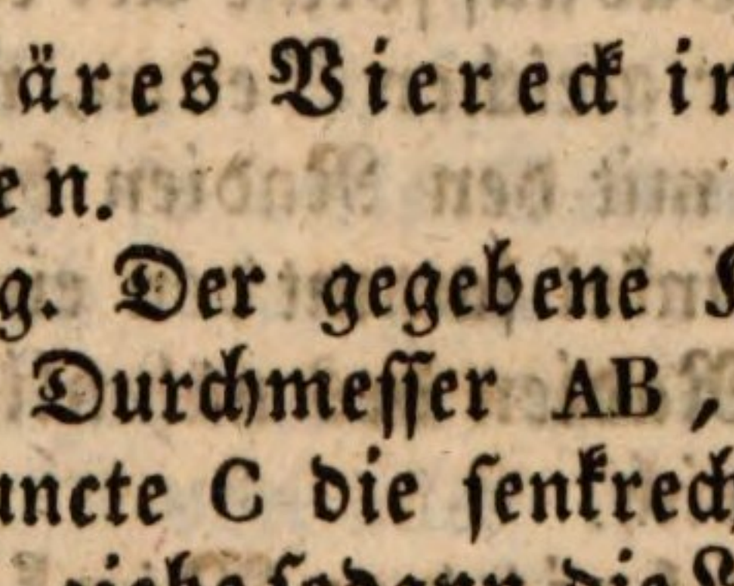
schon vorher als Tangente angenommen wurde, auch als eine Tangente, und halbirt ihren anliegenden Winkel durch eine gerade Linie; so muß diese durch den Mittelpunct desjenigen nähmlichen Kreises gehen (nach §. 19.), wovon sie mit der vorigen anliegenden Seite die Tangente ist; und da denn diese zwey Linien in ihrer Verlängerung, indem sie von verschiedenen Richtungen herkommen, nur in einem Puncte zusammentreffen können (erst. Absch. §. 4. 3. Folges.); so muß also eben dieser Punct, wo die besagten Linien einander schneiden, der Mittelpunct desjenigen Kreises seyn, wovon die Seiten des Dreyeckes die Tangenten sind; folglich läßt sich dann durch Hülfe des Zirkels von diesem Puncte aus bis zu dem gegenüber stehenden Puncte einer Seite des Dreyeckes, indem diese Länge der Halbmesser desjenigen Kreises ist, zu dem die Seiten des Dreyeckes die Tangenten sind, der verlangte Kreis in dem Dreyecke beschreiben.

§. 22.

Aufgabe.

Ein reguläres Viereck in einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung. Der gegebene Kreis sey ADBE. Man ziehe den Durchmesser AB, und errichte auf ihn im Mittelpuncte C die senkrechte CD, und verlängere sie bis E, ziehe sodann die Linien AD, BD, BE und EA, so ist ADBE das verlangte reguläre Viereck.



Beweis. Die Dreyecke ACD, DCB, BCE und ECA sind insgesammt einander gleich, weil die Winkel bey C rechte Winkel sind, und weil die Seiten, die diese Winkel einschließen als Radien des nähmlichen Kreises einander gleich sind; folglich sind auch die Seiten AD, DB, BE und EA einander gleich. Die Winkel DAF, AEB, EBD und BDA sind lauter rechte Winkel, weil sie als Peripheriewinkel auf halben Kreisen ruhen. Das Viereck ADBE hat also vier gleiche Seiten und vier rechte Winkel; es ist also ein reguläres Viereck.

§. 23.

Aufgabe.

Ein reguläres Achteck in einem Kreise zu beschreiben.

Auflösung. Man beschreibe zuerst in dem Kreise nach dem vorigen §. ein reguläres Viereck; alsdann theile man die Centriwinkel in zwey gleiche Theile, und ziehe die dazu gehörigen Sehnen.

Beweis. Das auf solche Art entstandene Achteck besteht aus lauter gleichen Seiten, weil die Dreyecke, die diese Seiten mit den Radien bilden, gleich sind; denn die Centriwinkel sammt den einschließenden Seiten, die lauter Radien des nähmlichen Zirkels sind, sind einander gleich.

Die Gleichheit der Winkel wird so bewiesen: Die Bögen, welche die gleichen Seiten des Achteckes im Kreise abschneiden, sind einander gleich; weil in einem Kreise gleiche Sehnen gleiche Bögen umspannen, diese aber sind das Maß für die Winkel des Achteckes, und da sie gleich sind, so haben also die Winkel des Achteckes gleiches Maß; folglich sind sie einander gleich.

Anmerkung. Die Gleichheit der Winkel kann auch dadurch dargethan werden: Die in die Ecken des Achteckes gezogenen Radien theilen die Winkel des Achteckes in zwey gleiche Winkel, wie dieß aus der Gleichheit der dadurch entstandenen Dreyecke erhellet, und da diese halben Winkel in den gleichen Dreyecken gleich sind, so sind also auch die ganzen Winkel einander gleich.

1. Zusatz. Der so eben geführte Beweis für die Gleichheit der Winkel des gleichseitigen im Kreise beschriebenen Achteckes läßt sich auf jedes im Kreise beschriebene gleichseitige Vieleck anwenden, d. h. jedes im Kreise beschriebene gleichseitige Vieleck ist gleichwinkligt.

2. Zusatz. So wie man aus einem im Kreise beschriebenen regulären Vierecke ein reguläres Achteck machen kann; eben so kann man aus diesem ein reguläres Sechzehneck, und aus diesem ein reguläres Zweyunddreyßigeck, u. s. w. verfertigen, wenn man nähmlich jedes Mahl den Centriwinkel in zwey gleiche Theile theilt, und die dazu gehörigen Sehnen zieht.

3. Zusatz. Ein im Kreise beschriebenes Vieleck, wenn es auch noch so viele Seiten hat, ist allzeit seinem Inhalte nach kleiner, als der Kreis, und auch sein Umfang ist allzeit kleiner, als die Peripherie des Zirkels. Dieses gilt von allen im Kreise beschriebenen Vielecken, von den regulären und irregulären.

§. 24.

Erklärung.

Ein Polygonwinkel (Vieleckswinkel) wird derjenige Winkel genannt, den zwey Seiten eines regulären Vieleckes mit einander bilden.

§. 25.

Lehrsatz.

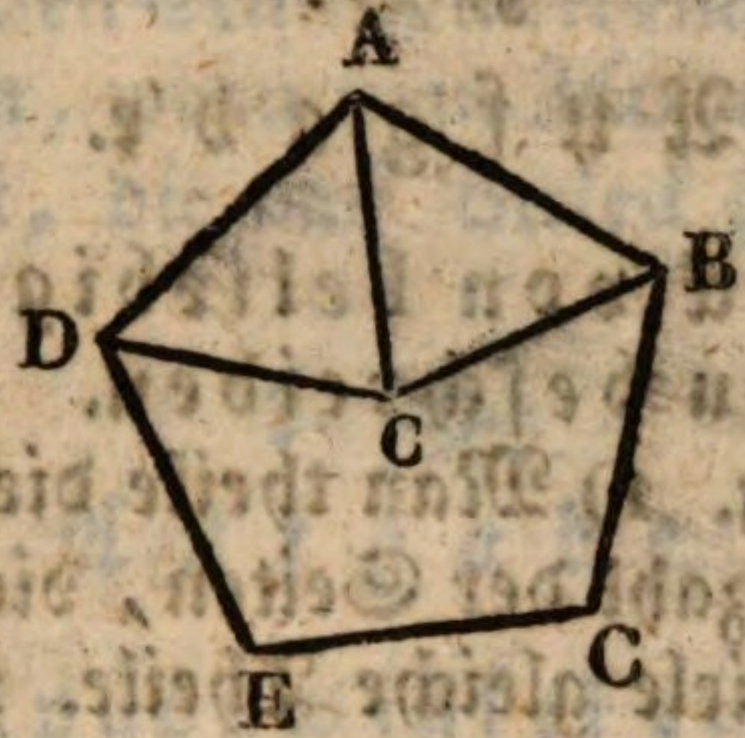
Wenn man vom Mittelpuncte des Kreises, in welchem ein reguläres Vieleck beschrieben worden, nach den Winkeln desselben Halbmesser zieht, so wird das Vieleck dadurch in so viele congruente gleichschenkligte Dreyecke getheilt, als es Seiten hat, und jeder Polygonwinkel wird in zwey gleiche Theile getheilt.

Beweis. Die Dreyecke sind congruent, weil in ihnen alle drey Seiten gleich sind, zwey Paar Seiten sind Radien und die dritten Seiten sind die Seiten des regulären Vieleckes, die ohnehin einander gleich sind. Und da in jedem Dreyecke zwey Radien auf der Seite des Vieleckes stehen, so ist jedes Dreyeck ein gleichschenkligtes. Aus der Gleichheit der Dreyecke ergibt sich, daß die Polygonwinkel durch die Radien halbirt werden.

§. 26.

Lehrsatz.

Es gibt in der Fläche eines jeden regulären Vieleckes einen Punct, der von allen Winkelspitzen gleich weit absteht. Man nennt diesen Punct den Mittelpunct des regulären Vieleckes. Diesen Mittelpunct findet man, wenn man zwey Polygonwinkel halbirt, und die Theilungslinien verlängert, bis sie sich schneiden.



Beweis. Das gegebene reguläre Vieleck sey ABCED. Man halbire zwey an einer Seite liegende Polygonwinkel, z. B. A und B, und verlängere die Linien AC und BC bis sie sich in C schneiden, so wird AC = BC seyn; denn die zwey Winkel an der Grundlinie AB sind in dem Dreyecke ACB einander gleich, weil die Winkel A und B halbirt wurden; folglich ist das △ ACB ein gleichschenkligtes (sechst. Absch. §. 10.); folglich ist AC = BC. Man ziehe eine gerade Linie von C nach dem folgenden Winkel D, so ist das △ ACD $\overline{\sim}$ △ ACB, weil AB = AD, und die anliegenden Winkel gleich sind; folglich ist AC = BC = CD; der Punct C steht also von den Winkelspitzen D, A, B gleichweit ab. Auf die nähmliche Art läßt es sich auch von den übrigen Winkelspitzen C und E beweisen. Also u. s. w.

Zusatz. Man kann also um ein jedes gegebenes reguläres Vieleck einen Kreis beschreiben. Man darf nähmlich nur zwey zunächst liegende Polygonwinkel halbiren, und die Theilungslinien verlängern, bis sie sich schneiden. Von dem Durchschneidungspuncte, welcher von allen Winkelspitzen gleichweit entfernt ist, beschreibe man dann durch Hülfe des Zirkels durch die Winkelspitzen des Vieleckes einen Kreis, so ist geschehen, was verlangt wurde.

§. 27.

Aufgabe.

Ein Vieleck von beliebigen Seiten in einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung. 1) Man theile die Peripherie, d. i. 360° mit der Anzahl der Seiten, die das Vieleck haben soll, in so viele gleiche Theile. 2) Mit den Graden, die im Quotienten heraus kommen, beschreibe man an dem Mittelpuncte durch Hülfe des Transporteurs einen Winkel, der diese Grade zu seinem Maße hat, und die Schenkel dieses Winkels verlängere man bis an die Peripherie. 3) Die Endpuncte derselben verbinde man alsdann durch eine gerade Linie, und diese Linie trage man an der Peripherie so oft herum, als es thunlich ist. Auf diese Art bekommt man ein reguläres Vieleck, das so viele Seiten hat, als verlangt wurde.

Beweis. Die Gleichheit der Seiten erhellet aus dem Herumtragen der gleichen Seite im Zirkel, und die Gleichheit der Winkel erhellet aus der Gleichheit der Bögen, die durch das Herumtragen der gleichen Seite abgeschnitten werden; die Winkel des so entstandenen Vieleckes haben also gleiches Maß (§. 23. 1. Zusatz).

§. 28.

Lehrsatz.

Alle Centriwinkel eines regulären Vieleckes sind einander gleich; denn sie haben gleiches Maß. Und ein reguläres Vieleck hat so viel Centriwinkel, als es Seiten hat, weil jeder Seite ein Centriwinkel gegenüber steht.

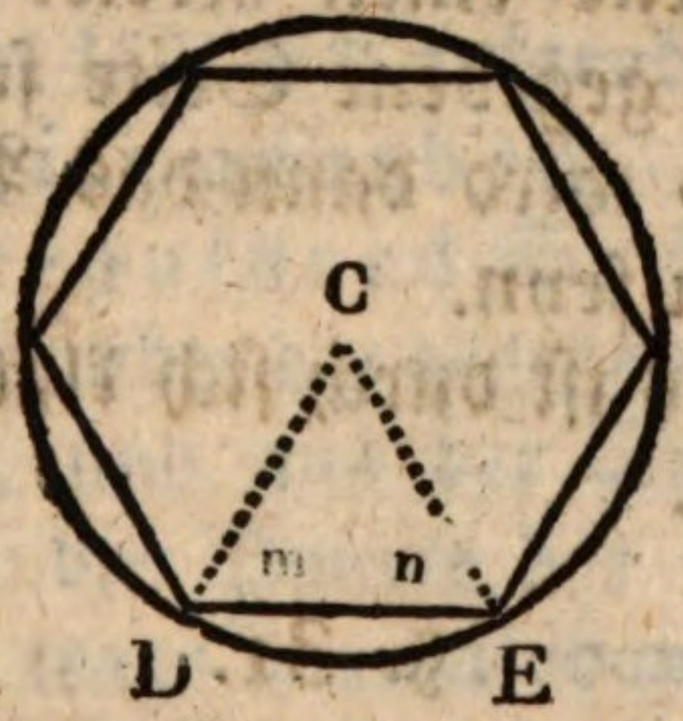
Zusatz. Den Centriwinkel eines regulären Vieleckes findet man, wenn man 360° mit der Anzahl der Seiten dividirt, die das Vieleck hat.

§. 29.

Aufgabe.

Den Polygonwinkel eines regulären Vieleckes zu finden.

Auflösung. Man suche zuerst den Centriwinkel; diesen ziehe man von 180° ab, so gibt der Rest den Polygonwinkel; oder, was eines ist, man dividire die Anzahl der Seiten des regulären Vieleckes mit 360°, und den gefundenen Quotienten ziehe man alsdann von 180° ab, so ist der Polygonwinkel gefunden.



Beweis. Die Winkel m + n machen zusammen den Polygonwinkel aus, weil beyde die Hälften sind von zwey Polygonwinkeln, nähmlich von D und E; folglich machen sie zusammen den ganzen Polygonwinkel aus, nun aber betragen die drey Winkel C + m + n zusammen 180°; wenn man also den Centriwinkel C von 180° abzieht, so gibt der Rest das Maß für die Winkel m + n, d. i. man findet so den Polygonwinkel.

Zusatz. Man kann dem zufolge aus dem gegebenen Polygonwinkel eines regulären Vieleckes auch

den Centriwinkel finden, wenn man nähmlich den Polygonwinkel von 180° abzieht.

§. 30.

Aufgabe.

Aus einer gegebenen Seite sammt der Zahl der Seiten ein reguläres Vieleck zu verfertigen.

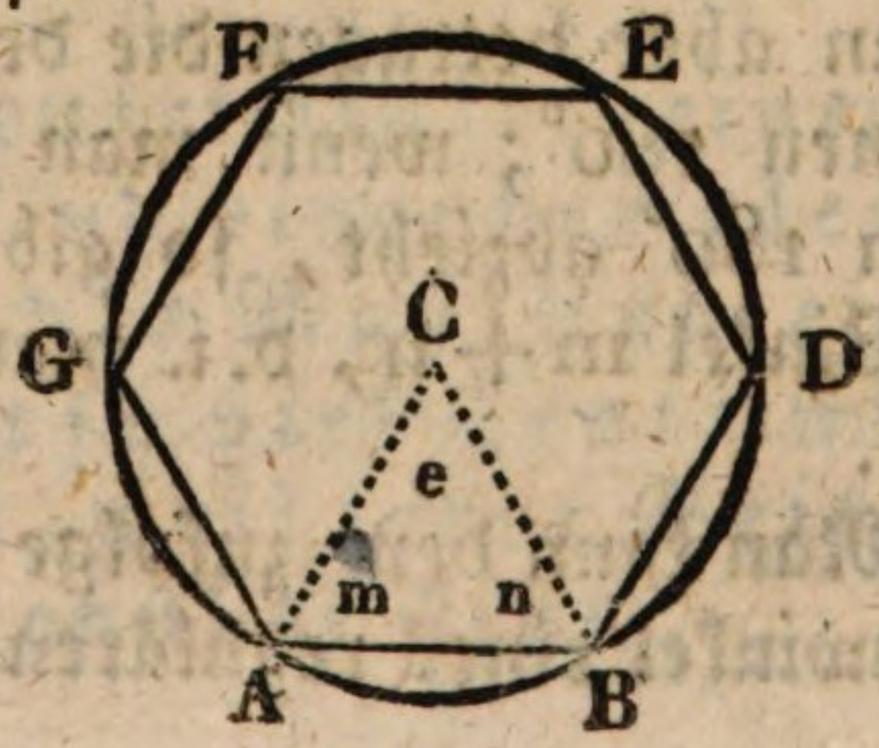
Auflösung. Man suche (nach §. 29.) zuerst den Polygonwinkel; diesen halbire man, und trage die eine Hälfte davon an den einen Endpunct, und die andere Hälfte an den andern Endpunct der gegebenen Seite. Man verlängere die Schenkel bis sie sich in einem Puncte schneiden. Aus diesem, als aus dem Mittelpuncte beschreibe man um die Endpuncte der gegebenen Seite einen Kreis. In diesem trage man alsdann die gegebene Seite so oft herum, als es möglich ist, so wird dann das Vieleck nach Verlangen beschrieben seyn.

Der Beweis ist durch sich klar, und liegt schon in der Auflösung.

§. 31.

Lehrsatz.

Die Seite eines regulären Sechseckes ist gleich dem Radius des darum beschriebenen Kreises.



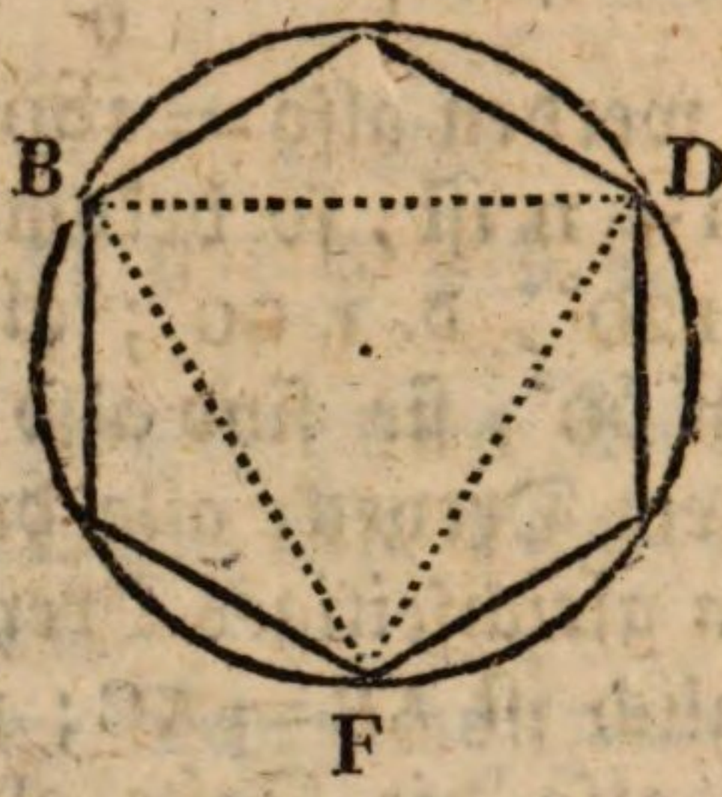
Beweis. Das reguläre Sechseck sey ABDEFG. Der Centriwinkel e ist also $= \frac{360^\circ}{6}$ (§. 38. Zus.), d. i. $e = 60^\circ$; m + n werden also $= 180 - 60^\circ$ seyn, d. i. 120°; da aber m + n ist, so bekommt jeder Winkel die Hälfte von 120°, d. i. 60°; also hat jeder von den drey Winkeln 60°, sie sind also einander gleich; wenn aber in einem Dreyecke alle drey Winkel gleich sind, so ist es ein gleichseitiges Dreyeck (sechst. Absch. §. 10. Zus.); folglich ist AB = AC; in einem regulären Sechsecke ist also die Seite gleich dem Radius des darum beschriebenen Kreises.

1. Zusatz. Nach diesem Lehrsatze läßt sich also die Aufgabe leicht lösen: In einem gegebenen Kreise ein reguläres Sechseck zu beschreiben. Man darf nur in dem gegebenen Kreise den Radius desselben sechs Mahl herumtragen.

Eben so leicht läßt sich folgende Aufgabe lösen: Es ist eine Seite gegeben, und man soll darüber ein reguläres Sechseck beschreiben. Man errichte über die gegebene Seite ein gleichseitiges Dreyeck, und aus der Spitze desselben beschreibe man um die Puncte der Grundlinie einen Kreis, in diesem trage man alsdann die Seite noch fünf Mahl herum, so hat man, was verlangt wurde.

2. Zusatz. Man erhält aus einem regulären Sechsecke ein reguläres Dreyeck, wenn man von der ersten Winkelspitze des Sechseckes nach der dritten, von dieser nach der fünften, und von dieser wieder nach der ersten gerade Linien zieht. Dieses so entstandene Dreyeck (FBD) ist ein reguläres, weil darin alle drey Seiten gleich sind; denn die kleinern Dreyecke, die diese Seiten mit den Seiten des Sechseckes bilden, sind einander gleich; weil in jedem dersel-

ben zwey Seiten sammt dem eingeschlossenen Winkel gleich sind.



3. Zusatz. Durch das Halbiren der Centriwinkel kann man aus dem regulären Sechsecke nach und nach ein reguläres Zwölfeck, Vierundzwanzigeck u. s. w. bilden.

4. Zusatz. Je mehr Ecken das reguläre Vieleck hat, das in einem Kreise beschrieben ist, desto näher kommt das Vieleck der Peripherie. Wenn man z. B. ein in einem Kreise beschriebenes Vierundzwanzigeck in ein Achtundvierzigeck, und dieses wieder in ein Sechsundneunzigeck verwandeln würde, so würde jedes derselben der Kreislinie näher kommen. Allein wenn man auch ein reguläres Vieleck in mehrere Tausendeck verwandeln würde, so wird es doch nie ganz mit dem Kreisumfange (mit der Peripherie) übereinstimmen. Man kann also den Kreis als ein reguläres Vieleck von unendlich viel Seiten betrachten.

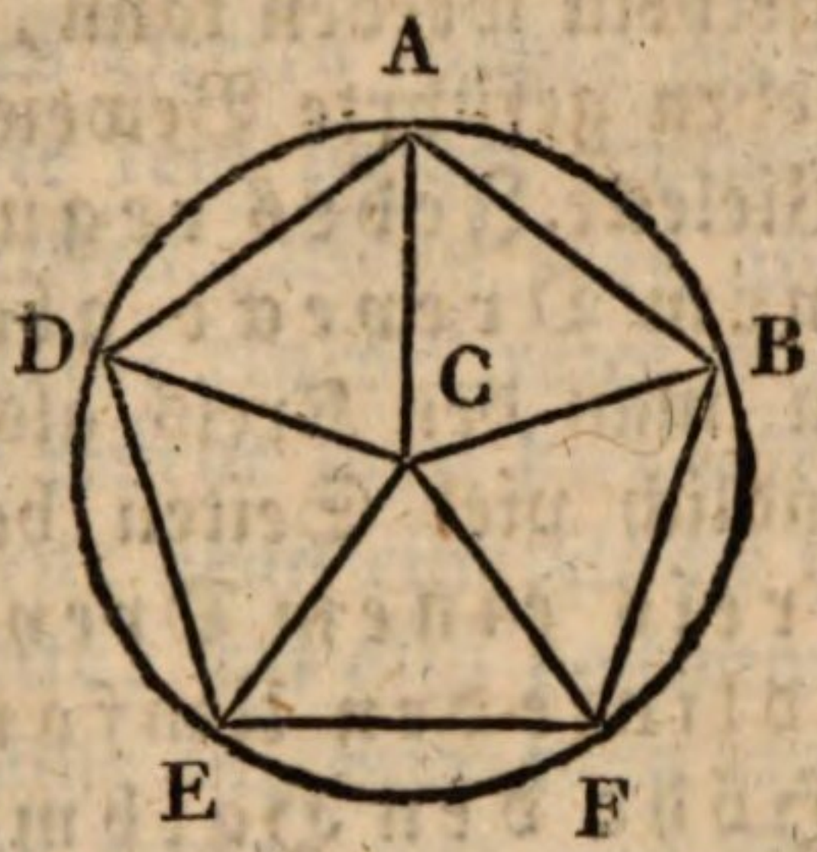
§. 32.

Lehrsatz.

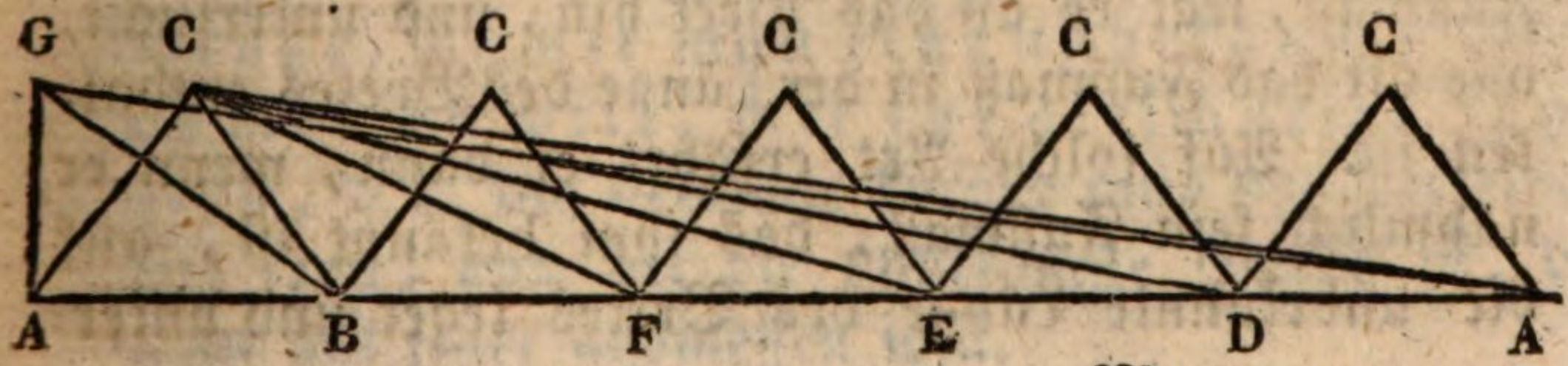
Ein jedes reguläre Vieleck ist einem Dreyecke gleich, dessen Grundlinie dem Umfange des Vieleckes, und dessen Höhe dem aus dem Mittelpuncte auf die Seite

des Vieleckes gezogenen senkrechten Linie gleich ist.

Beweis. Jedes Vieleck kann in so viele congruente Dreyecke getheilt werden, als es Seiten hat, wenn man aus dem Mittelpuncte des Vieleckes gerade Linien nach den Winkelspitzen desselben zieht.



So ist dieses Fünfeck ABFED in fünf congruente Dreyecke getheilt, nähmlich in die Dreyecke ACB, BCF, FCE, ECD und DCA. Man lege alle diese Dreyecke auf einer geraden Linie so neben einander, daß die Seiten der Dreyecke, die vorhin Vielecksseiten waren, an ihren Endpuncten an einander auf dieser geraden Linie zu liegen kommen, und ziehe von der Spitze des ersten Dreyeckes gerade Linien (CF, CE, CD, CA), so werden alle Dreyecke in ein Dreyeck (in das △ GAA) verwandelt, dessen Grundlinie (AA) der Summe der Grundlinie aller Dreyecke, und dessen Höhe (GA) der Höhe jedes einzelnen Dreyeckes gleich ist. Diese Höhe aber findet man, wenn man von dem Mittelpuncte des Vieleckes eine senkrechte Linie auf die Seite des Vieleckes fällt.



Alle die fünf Dreyecke ACB, BCG, FCE, ECD und DCA haben mit dem Dreyecke GAA einerley Grundlinie, nähmlich ABFEDA, und einerley Höhe, nähmlich GA; folglich sind sie zusammen genommen dem großen Dreyecke GAA gleich (siebent. Abschn. §. 14. 2. Zus.). Da nun jedes reguläre Vieleck in so viel gleiche Dreyecke getheilt werden kann, als es Seiten hat; so gilt der eben geführte Beweis für alle möglichen regulären Vielecke. Jedes reguläres Vieleck ist also einem Dreyecke gleich u. s. w.

Zusatz. Da man den Kreis als ein reguläres Vieleck von unendlich viel Seiten betrachten kann, so ist jeder Kreis einem Dreyecke gleich, das zur Grundlinie den Umfang des Kreises und zur Höhe den Halbmesser hat.

Zehnter Abschnitt.

Vom Längen- und Flächenmaße, und vom Ausmessen geradlinigter Figuren.

§. 1.

Begriff des Messens und des Maßstabes.

Wenn der Zimmermann oder der Tischler erfahren will, wie lang ein Bret ist, so nimmt er sein Fußmaß, legt es an das Bret hin, und untersucht, wie oft das Fußmaß in der Länge des Bretes enthalten ist. Auf solche Art erfährt er dann, wenn er nähmlich sein Fußmaß, das ihm bekannt ist, auf die unbekannte Länge des Bretes leget und unter-

sucht, wie oft die bekannte Länge in der unbekannten enthalten ist, wie lang das Bret ist. Dieses Geschäft nun, wobey man untersucht, wie oft eine bekannte Länge in einer unbekannten enthalten sey, heißt messen. Um eine Länge auszumessen, muß man wieder eine, aber bekannte Länge nehmen; denn die Länge eines Bretes könnte man z. B. nicht durch eine Kugel, die kein langer sondern ein runder Körper ist, ausmessen. Wenn man aber eine Fläche, z. B. die Oberfläche eines Bretes oder Tisches ausmessen wollte, so würde man hier mit dem Längenmaße nicht auslangen; denn eine Fläche hat nebst der Länge auch eine Breite; um also bestimmen zu können, wie groß eine Fläche ist, muß man ein solches Maß nehmen, das eine Länge und eine Breite hat, d. i. das selbst eine Fläche ist, also ein Flächenmaß. Wollte man die Größe eines Raumes, wo neben der Länge und Breite auch Höhe oder Tiefe vorkommt, ausmessen; wollte man z. B. bestimmen, wie viel Verschläge sich in ein Zimmer bringen lassen, oder wie viel Maß in ein Faß gehen, oder wie viel Ziegelsteine zu einer Mauer erforderlich sind u. dgl.; so würde man dieses durch das Längen- und Flächenmaß nicht bestimmen können; denn man will hier nicht die Größe einer Länge oder Fläche, sondern die Größe eines Raumes, d. i. eines Körpers wissen; folglich muß man zur Bestimmung seiner Größe wieder einen, aber bekannten Körper nehmen, und untersuchen, wie oft dieser in dem unbekannten enthalten ist.

Aus dem Gesagten folgt, daß die bekannte Größe, womit man eine unbekannte Größe messen will, mit ihr gleichartig seyn muß, d. h. die bekannte Größe muß von derselben Art seyn, von der die unbekannte Größe ist, die man mit jener ausmessen will.

Messen überhaupt genommen heißt also nichts anders, als bestimmen, wie oft eine bekannte Größe in einer unbekannten von derselben Art enthalten ist.

Die bekannte Größe, womit man eine andere ausmißt, heißt das Maß, der Maßstab, und die auszumessende Größe heißt das zu Messende.

Das Maß wird als eine Einheit betrachtet, und beym Messen gibt man also das Verhältniß des Maßes zu dem Messenden an, und dieses geschieht jederzeit durch eine Zahl, welche also anzeigt, wie oft das Maß in der zu messenden Größe enthalten ist.

§. 2.

Längenmaß. Zehentheiliges und zwölftheiliges Maß.

Da das Maß mit dem zu Messenden gleichartig seyn muß, so ist demnach das Maß der geraden Linie wieder eine gerade Linie. Eine gerade Linie hat aber nur eine Ausdehnung, nähmlich in die Länge; es kann also bey einer geraden Linie nur die Länge ausgemessen werden; das Maß der geraden Linie ist also das Maß der Länge, welches man das Längenmaß nennt; das Längenmaß dient also zur Ausmessung gerader Linien.

An und für sich betrachtet ist es gleichgültig, was man für eine Länge zum Längenmaße annehmen wollte. Die Meßkünstler sind aber schon darin mit einander überein gekommen, daß sie den sogenannten Schuh oder Fuß, welcher mit der Fußsohlenlänge eines erwachsenen Menschen so ziemlich übereinkommt, als das Grundmaß des Längenmaßes annehmen wollen. Seit dieser Uebereinkunft ist nun in jedem Lande der Schuh als das Grundmaß des Längenmaßes eingeführt.

Da aber bey großen Längen die Zahl zu groß

werden würde, wenn man den Fuß als eine Einheit betrachtete, so hat man nach dem Fuße größere Maße bestimmt; und da er bey Messung der kleinern Längen zu Brüchen führen würde, so hat man nach dem Fuße noch kleinere Maße festgesetzt. Man hat nähmlich zur Messung von größern Längen mehrere Füße zusammen genommen und in ein Maß verwandelt. Es gibt zweyerley gewöhnliche Maße, das zehentheilige und zwölftheilige; das erste enthält 10', das zweyte 12 Schuh. Das zehentheilige heißt auch das geometrische oder Decimalmaß, das zwölftheilige heißt das rheinländische oder Duodecimalmaß.

Ein Fuß zehen Mahl genommen, gibt eine geometrische Ruthe; ein Fuß in zehen gleiche Theile getheilt, gibt einen geometrischen Zoll; diesen in zehen gleiche Theile getheilt, gibt eine geometrische Linie; und diese in zehen gleiche Theile getheilt, einen geometrischen Scrupel.

Ein Fuß zwölf Mahl genommen, gibt eine rheinländische Ruthe; den Fuß in zwölf gleiche Theile getheilt, einen rheinländischen Zoll; diesen in zwölf gleiche Theile getheilt, eine rheinländische Linie u. s. w. Demzufolge ist eine rheinländische Ruthe größer, als eine geometrische; denn jene besteht aus zwölf, diese aber nur aus zehn Schuhen. Ein rheinländischer Zoll hingegen ist kleiner, als ein geometrischer; denn jener ist der zwölfte, dieser aber der zehnte Theil eines Schuhes.

Man bezeichnet die Ruthe mit °, den Fuß mit ', den Zoll mit '', die Linie mit ''', die Scrupel mit ^{IV}, und zwar so, daß diese Zeichen oben zur rechten Hand, also hinter jene Zahl gesetzt werden, zu deren Benennung sie dienen. So heißt z. B. 6° 7' 8'' 5''' 3^{IV}, 6 Ruthen, 7 Schuh, 8 Zoll, 5 Linien und 3 Scrupel.

Anmerkung. Das zehentheilige oder geometrische Maß ist offenbar das bequemste, weil es sich am leichtesten berechnen läßt; es stimmt mit der allgemeinen Art zu zählen, und Zahlen anzuschreiben, ganz überein. Man kann also die geometrischen Maße bequem und ohne weitere Rechnung durch die gewöhnlichen Ziffern ausdrücken und in einander verwandeln. So ist z. B. $6^{\circ}\,7'\,8''\,5''' = 6785'''$; denn 8 geometrische Zoll geben 80 Linien, 7 Schuh geben 700 Linien, und 6 Ruthen geben 6000 Linien; folglich sind $6^{\circ}\,7'\,8''\,5''' = 6785'''$. Eben so sind z. B. $4564^{IV} = 4'\,5''\,6'''\,5^{IV}$. Ganz anders verhält sich die Sache bey dem zwölftheiligen Maße, wo die Ruthe in 12 Fuß, der Fuß in 12 Zoll u. s. w. eingetheilt wird. Diese Eintheilung ist in der Ausübung mehrern Unbequemlichkeiten unterworfen. Wenn nähmlich 1 Fuß = 12 Zoll = 144 Linien = $144 \times 12 =$ 1728 Scrupel ist, so muß man mit den Zahlen 12, 144, 1728 multipliciren, wenn man Schuh auf Zoll, Linien oder Scrupel bringen will; und umgekehrt muß man mit diesen Zahlen dividiren, wenn man die niedrigen Einheiten auf die höhern bringen will. Ueberhaupt muß man bey der Reduction der höhern Einheiten auf die nächst niedrigen, oder umgekehrt alle Mahl mit 12 multipliciren oder dividiren, und dieses ist beschwerlich.

Ein Körper, worauf das Längenmaß verzeichnet ist, heißt ein Maßstab.

Anmerkung. Um Linien auf dem Felde auszumessen, bedient man sich langer Stäbe, die man Ruthen nennt, oder der Meßkette.

Die Ruthe, meistens aus Holz verfertiget, ist in 6, oder welches zur Berechnung bequemer ist, in 10 Schuh abgetheilt. Der letzte Schuh wird wieder in 12, oder besser in 10 gleiche Theile oder Zolle

abgetheilt. Damit sie bey ihrem öftern Gebrauche nicht abgenützt und kürzer werde, ist sie an beyden Enden mit einer eisernen oder messingen Zwinge beschlagen.

Die Meßkette besteht aus eisernen Stäben, die mit Ringen verbunden sind. Sie ist gemeiniglich 5 Ruthen, d. i. 50 Schuh lang. An beyden Enden hat sie große, anderthalb bis zwey Zoll weite Ringe. Jede Ruthe wird in 10 Schuh abgetheilt. Jede Ruthe wird durch Ringe, die etwas kleiner als jene am Anfange und Ende sind, bemerkt; jeder Schuh aber durch andere noch kleinere Ringe.

§. 3.

Wie man das rheinländische Längenmäß in das geometrische, und umgekehrt, das geometrische in das rheinländische verwandeln kann.

Das geometrische Längenmaß verhaltet sich zu dem rheinländischen, wie 10: 12. g. heißt geometrisches Maß, rh. rheinländisches. Demnach sind folgende Proportionen die Grundproportionen:

$\frac{1^{\circ}}{12}$ rh. = $\frac{1^{\circ}}{10}$ g. = 1 Fuß.

$12''$ rh. = $10''$ g. = 1 Fuß.

$144'''$ rh. = $100'''$ g. = 1 Fuß.

1728^{iv} rh. = 1000^{iv} g. = 1 Fuß.

Da man nun das Verhältniß weiß, in dem das geometrische Maß zu dem rheinländischen, und umgekehrt das rheinländische zu dem geometrischen steht, so kann man leicht durch Hülfe einer Proportion, die man anstellt, ein Maß in das andere verwandeln.

Aufgaben.

1. Aufgabe. Ein junger Mensch mißt nach rheinländischem Maße 7 Schuh 2 Zoll, was wird er nach dem geometrischen Maße für eine Höhe haben?

Auflösung. Man mache die 7 gegebenen Schuh rheinländischen Maßes zu Zollen, welches dadurch geschieht, wenn man, da in diesem Maße 12 Zoll auf einen Schuh gehen, die 7 Schuh mit 12 vervielfältiget, d. i. $12 \times 7 = 84$; dazu addire man noch die 2 gegebenen Zoll, man erhält 86''. Da nun 12'' rh. = 10'' g.; so ist

$$12'' \text{ rh.} : 84'' \text{ rh.} = 10'' \text{ g.} : x$$

$$x = \frac{84 \times 10}{12} = 70'' = 7' 0'', \text{ d. i. } 7 \text{ Schuh}$$

und kein Zoll; er mißt also nach dem geometrischen Maße 7 Schuh.

2. Aufgabe. Ein Thor ist nach dem rheinländischen Maße 15° hoch; wie hoch ist dasselbe nach dem geometrischen?

Auflösung. Da $\frac{1^\circ}{12}$ rh $= \frac{1^\circ}{10}$ g; so ist

$$\frac{1^\circ}{12} : 15 = \frac{1^\circ}{10} : x$$

$$10 : 15 = 12 : x$$

$$x = \frac{15 \times 12}{10} = 18^\circ \text{ g.}; \text{ folglich ist}$$

besagtes Thor nach dem geometrischen Maße 18° hoch.

3. Aufgabe. Wenn ein Feld 24° g. M. lang ist, wie lang ist es im rh. Maße?

Auflösung. Da $\frac{1^\circ}{12}$ rh. $= \frac{1^\circ}{10}$ g.; so ist

$\frac{1}{10} : 24 = \frac{1}{12} : x$, d. i. nach Wegschaffung der

Brüche 12 : 24 = 10 : x;

$x = \frac{240}{12} = 20°$ rh. M.; es ist also im rheinländischen Maße 20° lang.

4. Aufgabe. Man soll $9° 8' 7'' 3''' 9^{IV}$ g. Maß in rheinländisches verwandeln.

Auflösung. $9° 8' 7'' 3''' 9^{IV}$ g. M. ist = 98739^{IV}. Nun ist 1000^{IV} g. M. = 1728^{IV} rh. M. Man setze nun die Proportion an, und verfahre auf die bekannte Art. Man muß, wenn man richtig gerechnet hat x = 170620^{IV} rh. M. heraus bringen, sammt dem Decimalbruch $\frac{992}{1000}$; den man aber seiner Geringfügigkeit wegen weglassen kann. Dividirt man nun die erhaltenen Scrupel durch 12, so erhält man rh. Linien, diese wieder durch 12 dividirt u. s. w. Nach vollbrachter Operation erhält man $x = 8° 2' 8'' 10''' 4^{IV}$ rheinl. Maß.

§. 4.

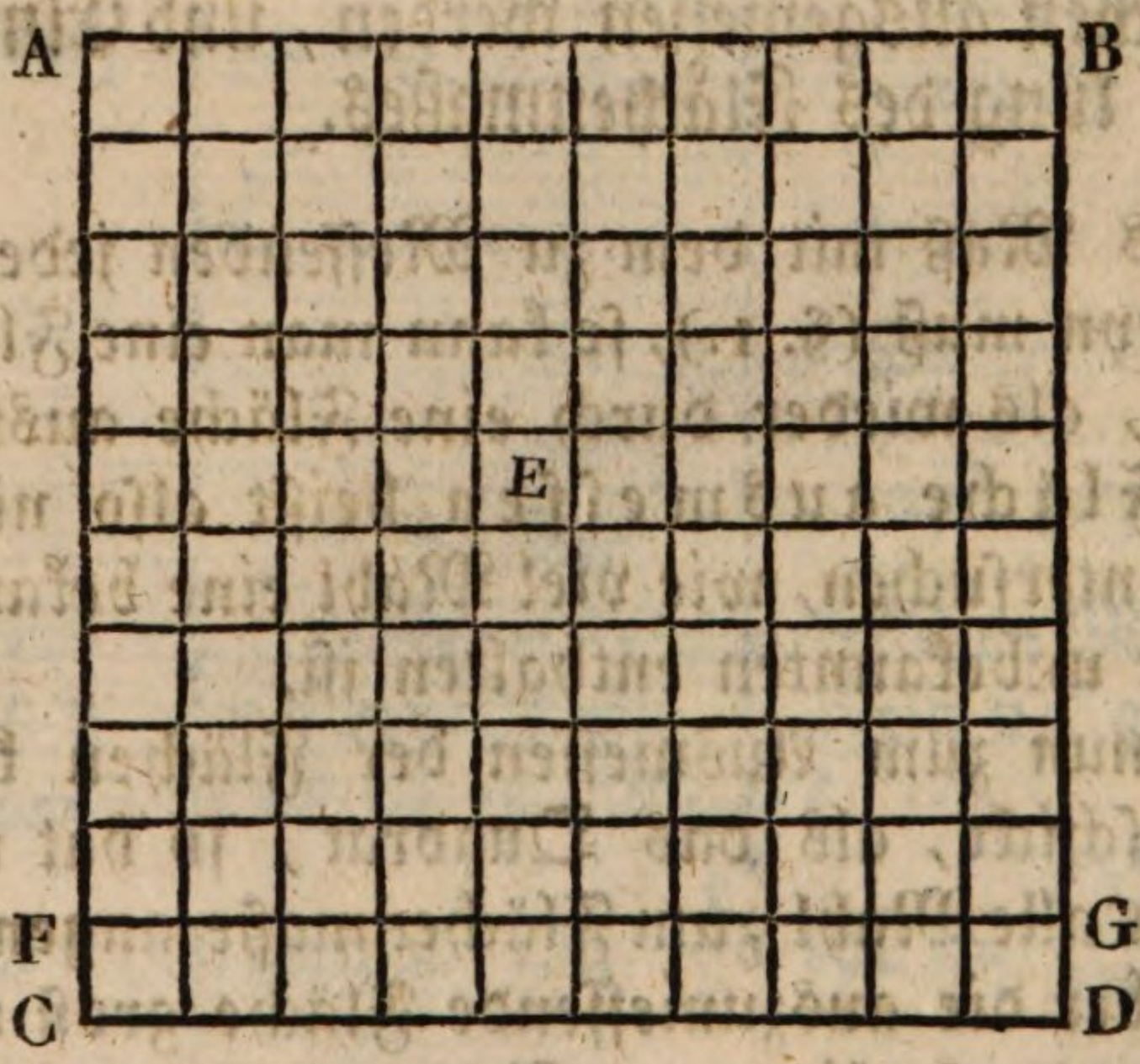
Wie die Flächen ausgemessen werden, und Eintheilung des Flächenmaßes.

Weil das Maß mit dem zu Messenden jederzeit gleichartig seyn muß (§. 1.), so kann man eine Fläche nicht anders, als wieder durch eine Fläche ausmessen. Eine Fläche ausmessen heißt also nichts anders, als untersuchen, wie viel Mahl eine bekannte Fläche in der unbekannten enthalten ist.

Da sich nun zum Ausmessen der Flächen keine Figur besser schickt, als das Quadrat, so hat man dieses ein für alle Mahl zum Flächenmaße angenommen. Weil aber die auszumessende Fläche groß oder klein seyn kann, so liegt am Tage, daß auch das Quadrat, das man zum Maße annimmt, in Ansehung

seiner Größe sich nach der Größe der auszumessenden Fläche richten muß. Das Quadratmaß wird demnach wie das Längenmaß in Ruthen, Schuh, Zoll, Linien und Scrupel eingetheilt, damit man so im Stande ist, jede Fläche genau auszumessen. Zum Grundmaße für das Ausmessen der Flächen wird der Quadratfuß angenommen, der ein solches Quadrat ist, dessen jede Seite einen Fuß mißt. Zehen solche Quadratfüße geben eine geometrische Quadratruthe. Wie viel Quadratschuh enthält wohl eine geometrische Quadratruthe? Wir wollen, um dieses augenscheinlich zu erfahren, die zwey Quadrate E und B zu Hülfe nehmen.

Das Quadrat B wollen wir als einen Quadratschuh gelten lassen, und das Quadrat E sey ein solches Quadrat, dessen Flächeninhalt gemessen werden soll. Um nun bestimmen zu können, wie groß das Quadrat E ist, dürfen wir nur die bekannte Figur B auf der unbekannten nach und nach so viel Mahl legen, bis letztere bedeckt ist. Dieß wollen wir nun thun, und wollen bey der Linie CD anfangen.



An dieser Linie können wir unser Maß B zehen Mahl anlegen, wodurch die Schichte oder Reihe FCGD

entsteht, welche, wenn sie hinauf erhoben wird, 10 Mahl über einander gelegt werden kann, so, daß also in der ganzen Figur E 10 solcher Reihen oder Schichten Raum haben. Da nun in jeder Reihe 10 kleine Flächen sind, und da 10 Reihen in der Figur Raum haben, so müssen in der ganzen Figur 10 Mahl 10, d. i. 100 solche Flächen enthalten seyn. Lassen wir nun das Maß B für einen Quadratschuh gelten, so enthält also das Quadrat E zu seinem Flächenmaße 100 Quadratschuh. Eine solche Fläche nun, die 100 Quadratfuß in sich faßt, ist eine geometrische Quadratruthe; eine geometrische Quadratruthe enthält also 100 Quadratschuh, und ein geometrischer Quadratfuß enthält 100 Quadratzoll u. s. w.

Man sieht, daß beym zehentheiligen Quadratmaße die niedrige Abtheilung zur höhern jeder um das Hundertfache steiget; denn 100 Quadratscrupel geben eine Quadratlinie, 100 Quadratlinien geben einen Quadratzoll, 100 Quadratzoll geben einen Quadratfuß u. s. w. Wenn man also im zehentheiligen Quadratmaße die höhern Abtheilungen in niedrige verwandeln soll, z. B. man soll 25 Quadratruthen in Quadratfuß verwandeln, so darf man nur die Zahl der höhern Abtheilung um das Hundertfache vermehren, welches dadurch geschieht, wenn man ihr zur Rechten zwey Nullen anhängt; so machen z. B. 25 Quadratruthen 2500 Quadratschuh. Wie viel geben 37 Quadratzoll Quadratlinien? Antw. 37 Quadratzoll geben 3700 Quadratlinien. Und umgekehrt, wenn man im zehentheiligen Quadratmaße eine niedrige Abtheilung in eine höhere bringen soll, z. B. 2645 Quadratzoll sollen in Quadratfuß verwandelt werden, so darf man nur zur Rechten zwey Ziffern abschneiden, indem es dann so viel ist, als wenn man mit 100 hinein dividirt hätte; 2645 Quadratzoll

geben 26□ Fuß und 45□ Zoll. Wie viel Ruthen, Fuß und Zoll geben 486572□ Zoll? Antw. 48°65′72″ im Quadratmaße.

Da 12 Fuß eine rheinländische Ruthe machen, so faßt also eine rheinländische Quadratruthe 12 Mahl 12, d. i. 144 Quadratfuß in sich. Ein rheinländischer Quadratfuß betragt 12 Mahl 12, d. i. 144 Quadratzoll, jeder derselben 144 Quadratlinien, und jede von diesen 144 Quadratscrupel. Beym zwölftheiligen Quadratmaße kann also, wie man leicht einsehen wird, eine niedrige Abtheilung auf eine höhere, und eine höhere auf eine niedrige nicht anders gebracht werden, als wenn man im ersten Falle die niedrige Abtheilung mit 144 vervielfältiget, und im zweyten, wenn man die höhere durch eben diese Zahl dividirt, welches schon etwas schwer ist. Hieraus erhellet, daß das zehentheilige Quadratmaß, wie das zehentheilige Längenmaß das bequemste ist; darum hat man es in der Geometrie angenommen.

§. 5.

Wie das geometrische Quadratmaß in das rheinländische Quadratmaß, und umgekehrt, wie dieses in jenes verwandelt werden kann.

Um das geometrische Quadratmaß in das rheinländische, und dieses in jenes verwandeln zu können, muß man die Grundproportionen beyder Maße wissen. Diese sind, wie man aus dem vorigen §. abnehmen kann, folgende:

$\frac{1}{144}$ rh. □. R. = $\frac{1}{100}$ g. □. R. = 1 □. Fuß.

144 rh. □. Z. = 100 g. □. Z. = 1 □. Fuß.

20736 rh. □. L. = 10000 g. □. Z. = 1 □. Fuß.

2985984 rh. □. Sc. = 1000000 g. □. Sc. = 1 □. F.

Aufgaben.

1. Aufgabe. Man soll 9 Q. Ruthen geometrisches Maß im rheinländischen ausdrücken.

Auflösung. Da $\frac{1}{144}$ rh. M. Q. R. $= \frac{1}{100}$ g. Q. R., so ist $\frac{1}{100} : 9 = \frac{1}{144} : x$ (nach Wegschaff. der Brüche) $144 : 9 = 100 : x = \frac{900}{144} = 6$ Q. R. 36 Q. F. rh. M.; 9 Quadratruthen geometrisch. Maß geben also im rheinländischen 6. Q. R. 36. Q. F.

2. Aufgabe. Wie viel sind 25 Q. Ruthen rh. M. nach geomet. Maße?

Auflösung. $\frac{1}{144} : 25 = \frac{1}{100} : x$ (nach Wegschaff. der Brüche) $100 : 25 = 144 : x$; $x = \frac{25 \times 144}{100}$ $= 36$ Q. R. g. M.; 25 R. rh. M. geben also 36. Q. R. im geomet. Maße.

3. Aufgabe. Wie viel sind 8 Q. R., 86 Q. F. rh. M. nach geomet. Maße?

Auflösung. Man mache die 8 Q. R. 86 Q. F. rh. M. zu lauter Fuß, welches dadurch geschieht, wenn man, da im rh. M. 144 Fuß auf eine Ruthe gehen, die 8. Q. Ruthen mit 144 multiplicirt, und dazu die 86 Q. F. addirt, man erhält 1238 Q. F., und da 100 Q. F. eine geom. Quadratruthe ausmachen $=$ $\frac{1238}{100} =$ 12 Q. R. 38 Q. F. g. M.

Anmerkung. Daß bey der Verwandlung des zehentheiligen Maßes in das zwölftheilige, und umgekehrt des zwölftheiligen in das zehentheilige oft große und beschwerliche Multiplicationen und Divi-

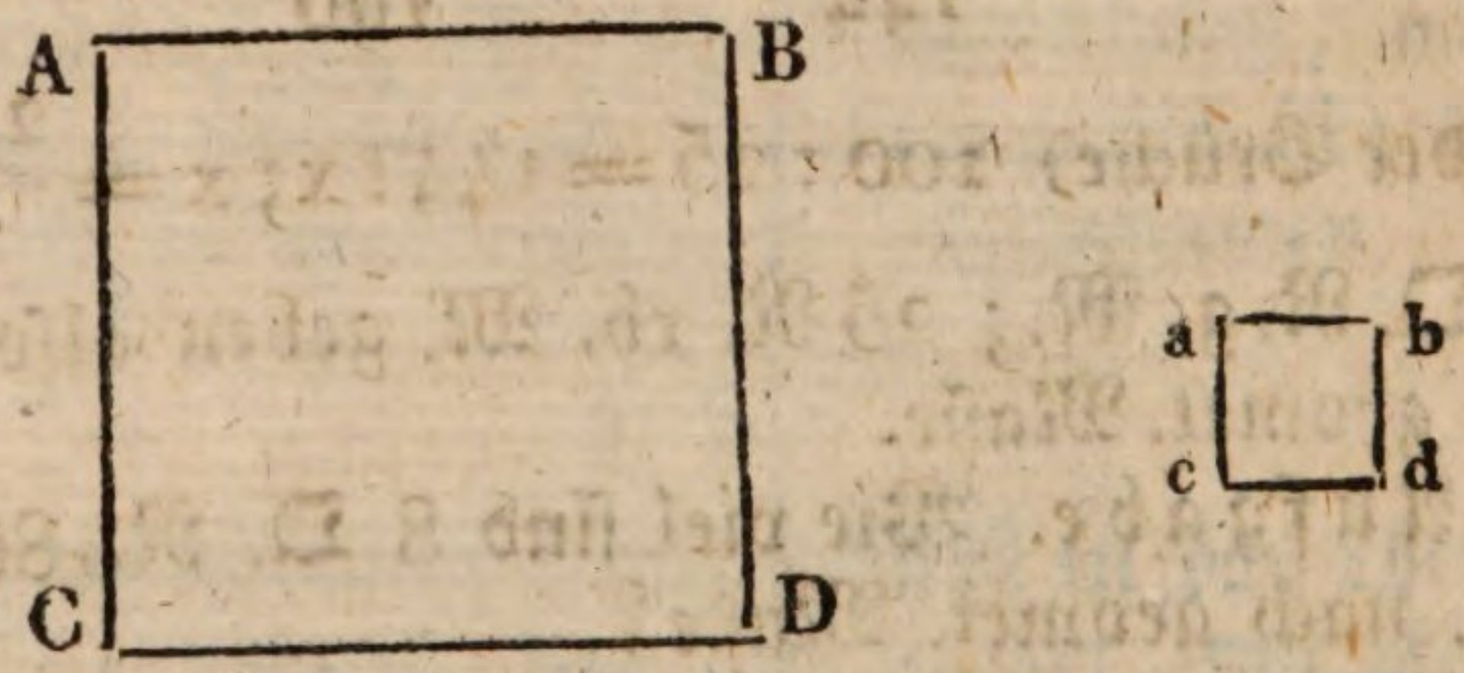
sionen vorkommen, sieht jeder ein. Um sich nun hier seine Arbeit zu erleichtern, kann man zu den Logarithmen seine Zuflucht nehmen. Man sehe die Anwendung der Logarithmen auf verschiedene Rechnungen im achten Abschnitte des ersten Theiles unsers Lehrbuches.

§. 6.

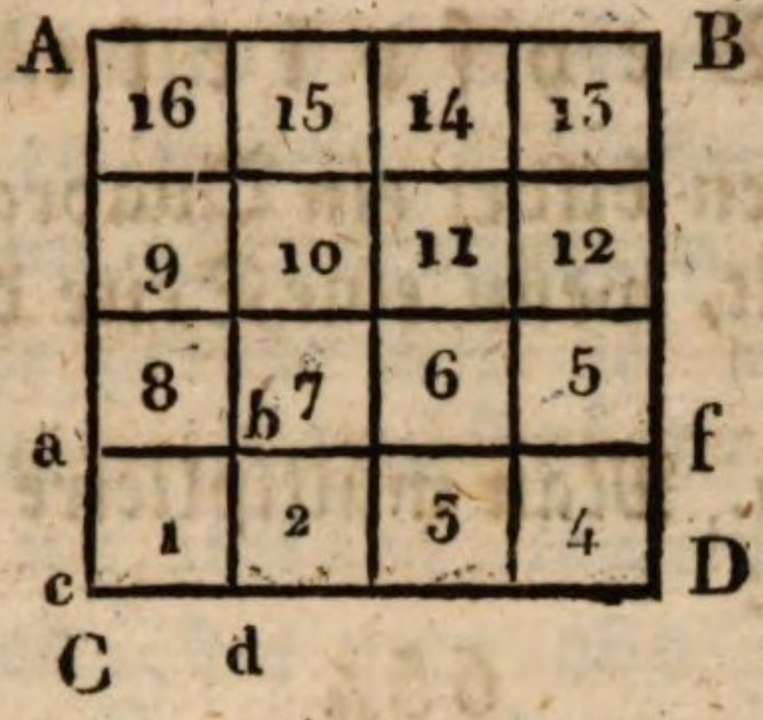
Aufgabe.

Den Inhalt, oder die Größe der Fläche eines Quadrates zu finden.

Auflösung und Beweis. Es sey das Quadrat ACBD gegeben, dessen Flächeninhalt man finden soll.



Den Flächeninhalt von dem Quadrate ABCD finden, heißt nichts anders, als untersuchen, wie oft ein kleineres, schon bekanntes Quadrat darin enthalten ist; so oft dieses darin enthalten ist, so groß, sagt man, sey das Quadrat. Wir wollen das Quadrat abcd, welches ein Quadratzoll ist, zum Maße annehmen. Um nun erfahren zu können, wie oft das Quadrat abcd in dem Quadrate ABDC enthalten ist, müssen wir jenes auf diesem so oft herumtragen, als es thunlich ist. Wenn wir dieß wirklich thun, so erhalten wir



das kleine Quadrat, der angenommene Quadratzoll ist also in dem großen Quadrate 16 Mahl enthalten; folglich beträgt der Flächeninhalt von ABDC 16 Quadratzoll. Es wäre aber nicht nöthig gewesen, daß wir das Maß abdc in dem ganzen Quadrate haben herumgelegt, sondern um zu finden, wie oft abdc in ABDC enthalten ist, darf man nur abdc an eine Seite, es ist gleich viel, an welche, weil alle Seiten eines Quadrates gleich groß sind, anlegen. Wird nun abdc z. B. an die Seite CD gelegt, so ergibt sich, daß es 4 Mahl daran angelegt werden kann; folglich können in dem ganzen Quadrate vier solche Schichten, wie a C f D ist, über einander gelegt werden. Da nun jede Schichte 4 kleine Quadrate in sich faßt, so faßt also das ganze Quadrat 4 Mahl 4, d. i. 16 Quadratzoll in sich. Um also den Flächeninhalt von ABDC zu finden, so darf man nur eine Seite, z. B. CD messen, und dann dieses gefundene Maß (4 Zoll) mit sich selbst multipliciren, so enthält das Product (16″) im Quadratmaße, d. i. 16 Quadratzoll den Flächeninhalt. Aus dem Gesagten ergibt sich eine leichte Methode, den Inhalt eines jeden Quadrates durch Rechnung zu finden, die darin besteht: Man messe eine beliebige Seite des Quadrates, und multiplicire dieses Maß mit sich selbst; so ist das Product (im Quadratmaße genommen) der Flächeninhalt des Quadrates.

Beyspiele.

1) Ein Garten bildet ein Quadrat. Wie groß ist sein Flächeninhalt, wenn eine Seite desselben 6°5′4″ mißt?

Auflösung. Man multiplicire 6°5′4″ mit sich selbst, wie folgt:

654
654
2616
3270
3924
427716□″

Man erhält 427716″ zum Producte; dieses sind aber Quadratzoll, darum pflegt man dem Producte das Quadratzeichen □ beyzusetzen. Um nun bestimmen zu können, wie viel Quadratruthen und Quadratschuh die 427716□″ machen, so darf man nur von der Rechten nach der linken Seite die Ziffern paarweise abtheilen. Man erhält 42□° 77□′ 16□″; der Flächeninhalt des obigen Gartens enthält also 42 Quadratruthen, 77 Quadratschuh und 16 Quadratzoll.

2) Man will eine Speis, die ein Quadrat bildet, mit Quadratsteinen belegen, deren jeder einen Schuh mißt. Wie viel wird man solche Steine brauchen, wenn eine Seite der Speis 26 Schuh lang ist?

Auflösung.

26′
26
156
52
676□′

Man braucht also 676 Steine, deren jeder einen Quadratschuh zu seinem Flächeninhalte hat; denn diese Anzahl von Quadratsteinen bedeckt die ganze Speis, weil sie gerade eine so große Anzahl von Quadratschuhen zu ihrem Inhalte hat.

Anmerkung. Um den Flächeninhalt eines Quadrates zu finden, hat man also nicht nöthig, das Quadratmaß, z. B. einen Quadratschuh, oder Quadratruthe wirklich in dem zu messenden Quadrate herumzulegen, was sehr beschwerlich und in vielen Fällen unthunlich seyn würde. Man bewerkstelliget dieses durch das Längenmaß, indem man aus diesem die Größe des Quadrates durch das bloße Rechnen herleitet. Auf eine ähnliche Art verfährt man bey der Bestimmung des Flächeninhaltes der übrigen geradlinigten Figuren, wie wir in der Folge sehen werden.

§. 7.

Aufgabe.

Den Inhalt eines Rechteckes zu finden.

Auflösung und Beweis. Da in einem Rechtecke nur die zwey gegenüber stehenden Seiten einander gleich sind, und also in dieser Figur zwey ungleiche Seiten vorkommen, so muß man, um den Inhalt eines Rechteckes finden zu können, das Längenmaß von den zwey ungleichen Seiten haben. Man messe also die Grundlinie und Höhe des Rechteckes, dessen Inhalt man finden soll, und alsdann multiplicire man beyde mit einander, so gibt das erhaltene Product im Quadratmaße den verlangten Flächeninhalt; denn die Länge der Grundlinie zeigt an, wie viel Quadratzoll, oder Quadrat-

schuh, oder Quadratruthen, je nachdem die Grundlinie groß oder klein ist, der Reihe nach auf derselben liegen können; und die Höhe oder Breite thut dar, wie viel solche Reihen von Quadratzollen, oder Quadratschuhen, oder Quadratruthen über einander gelegt werden können; wenn also beyde, das Quadratmaß der Grundlinie und Höhe eines Rechteckes, mit einander vervielfältiget werden, so bekommt man auf solche Art seinen Flächeninhalt. Z. B. ein viereckiger Tisch sey 9 Fuß lang und 5 breit. Diesen Tisch will man mit Papier überziehen, wo jeder Bogen genau einen Quadratschuh hält. Wie viel Bögen wird man nun zum Ueberzuge dieses Tisches brauchen? Da die Länge des Tisches, oder dessen Grundlinie 9 Fuß mißt, so wird man an die Länge oder Grundlinie desselben 9 Bögen brauchen, und da der Tisch 5 Schuh breit ist; so wird man, um den ganzen Tisch mit Papier belegen zu können, 5 Mahl 9 Bögen nehmen müssen, d. i. $5 \times 9 = 45$; man braucht also 45 Bögen Papier zum Ueberzuge des besagten Tisches. An diesem Beyspiele sieht man augenscheinlich, daß man den Flächeninhalt eines Rechteckes dadurch erhalte, wenn man die Länge der Grundlinie mit der Länge der Höhe multiplicirt, und das dadurch entstandene Product als Quadratmaß gelten läßt.

Ein Beyspiel. Die Grundlinie eines Rechteckes sey 12′6″, seine Höhe 9′3″; welches ist sein Inhalt im rheinländischen und geometrischen Maße?

Auflösung. 1) Für das rheinländische Maß. Man verwandle zuerst die 12′6″, und die 9′3″ in lauter Zolle. Da nun im rheinländischen Maße 12 Zoll auf einen Schuh gehen, so multiplicire man die 12 Schuh der Grundlinie und die 9 Schuh der Höhe mit 12, und addire dann die noch dabey ste-

henden Zolle dazu, d. i. 12'6" = 150", und 9, 3" = 111". Der Inhalt des Rechteckes im rheinländischen Maße ist also = 150 × 111 Q. Z. = 16650 rh. Q. Z. Diese 16650□" mache man zu Schuhen, indem man dieselben mit 144 dividirt, weil 144□" auf einen Quadratschuh im rh. Maße geben; man erhält 115□" und 90□"; folglich beträgt der Inhalt des obigen Rechteckes im rh. Maße 115 Quadratschuh und 90 Quadratzoll.

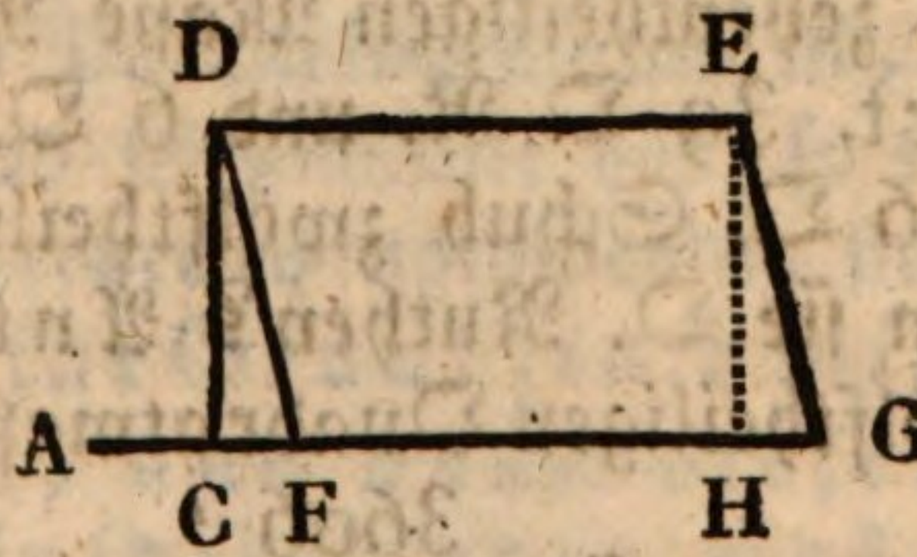
2) Für das geom. M. 12'6" g. M. sind = 126", und 9' 3" g. M. = 93; der Inhalt des Rechteckes im geomet. M. ist also = 126 × 93 = 11718□" = 1 Q. R., 17 Q. F., 18 Q. Z.

§. 8.

Aufgabe.

Den Inhalt eines jeden Parallelogramms zu finden.

Auflösung. Man messe die Grundlinie sammt der Höhe des gegebenen Parallelogramms, und multiplicire beyde mit einander, so gibt das gefundene Product (im Quadratmaße genommen) den Inhalt des Parallelogramms. Es sey das gegebene Parallelogramm EF.



Um nun seinen Inhalt zu finden, suche man die Größe der Grundlinie FG; alsdann messe man seine Höhe, diese ist eine senkrechte Linie, die aus der Spitze eines Winkels auf die Grundlinie gezogen ist.

In dem gegebenen Parallelogramm ist die Höhe nicht da, man suche sie also, man verlängere nähmlich GF, und ziehe dann aus der Spitze D auf die verlängerte Grundlinie AG eine senkrechte DC, die ist nun die Höhe. Man multiplicire nun FG mit DC, so erhält man eigentlich den Inhalt von dem Rechtecke DCEG, weil aber dieses mit dem gegebenen Parallelogramm EF gleiche Grundlinie und Höhe hat, so ist es ihm gleich (siebent. Abschn. §. 14.); folglich ist der Inhalt von DH auch zugleich der Inhalt von EF. Man findet also den Inhalt eines jeden Parallelogramms dadurch, wenn man seine Höhe mit der Grundlinie multiplicirt.

Beyspiele.

1) Eine Landstraße, die 18′ breit ist, soll durch einen Acker geführt werden. Wie viel Quadratschuh müssen dem Eigenthümer dieses Ackers vergütet werden, wenn die Länge der Straße durch diesen seinen Acker 217′ beträgt?

Auflösung. $18 \times 217 = 3906$; folglich müssen ihm 3906 Q. Schuh vergütet werden; denn so viel verliert er von seinem Acker. Wie viel geben 3906 Q. Schuh im zehentheiligen Maße Ruthen?

Antwort. 39 Q. R. und 6 Q. Schuh. Wenn aber die 3906 Q. Schuh zwölftheiliges Maß sind; wie viel geben sie Q. Ruthen? Antw. da 144 Q. Schuh im zwölftheiligen Quadratmaße auf eine Quadratruthe gehen, so sind $\frac{3606'}{144} = 25$ Q. R. und 6 Q. Schuh.

Ein Blumenbeet stellt ein Rhomboides vor; seine Grundlinie ist 136′ lang und die darauf gefällte senk-

rechte, also die Höhe beträgt $23\frac{2'}{3}$; wie groß ist dessen Fläche?

Auflösung. $136 \times 23\frac{2}{3} = 3230$; der Flächeninhalt des Blumenbeetes beträgt also 3230 Q. Schuh, d. i. 32 Q. R. und 30 Q. Schuh. Wie viel Ruthen betragen 3230 Quadratschuh zehentheiligen Maßes im rheinländischen Maße?

Zusatz. Wenn der Flächeninhalt sammt der Grundlinie eines Parallelogramms gegeben ist, so läßt sich aus diesen zwey gegebenen Stücken leicht die Höhe finden. Man darf nähmlich nur mit der Grundlinie in den Flächeninhalt des Parallelogramms dividiren, so gibt der Quotient (im Längenmaße genommen) die Höhe. Und umgekehrt, ist nebst dem Flächeninhalte eines Parallelogramms die Höhe desselben gegeben, so findet man die Grundlinie durch Division seines Flächeninhaltes mit der Höhe.

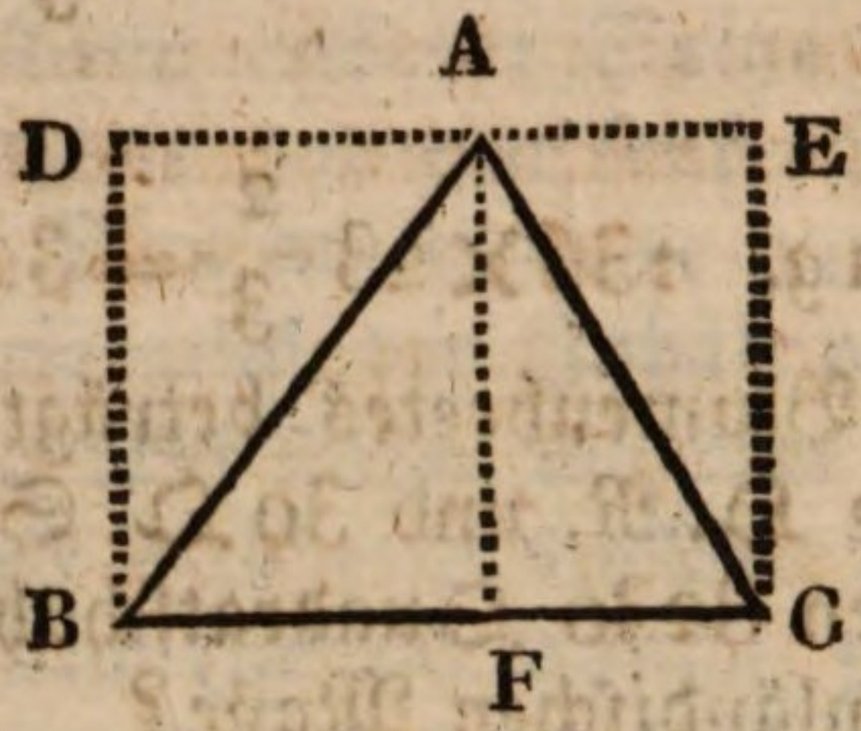
§. 9.

Aufgabe.

Den Inhalt eines Dreyeckes zu finden.

Auflösung und Beweis. Da ein Dreyeck die Hälfte eines Parallelogramms ist, das mit ihm gleiche Höhe und Grundlinie hat; so wird man den Inhalt eines Dreyeckes nothwendig finden müssen, wenn man seine Grundlinie mit der Höhe multiplicirt, und dann dieses Product mit zwey dividirt, oder was eines ist, wenn man die ganze Höhe mit der halben Grundlinie, oder umgekehrt, die ganze Grundlinie mit der halben Höhe multiplicirt.

Z. B. man soll den Flächeninhalt des Dreyeckes BAC finden.



Man errichte aus der Winkelspitze A auf die Grundlinie BC eine senkrechte, nähmlich AF, welche die Höhe des Dreyeckes ist. Setzen wir nun, die Höhe AF betrage 148″, und die Grundlinie BC sey 420″ groß, so ist der Flächeninhalt des Dreyeckes $= \frac{148 \times 420}{2}$, oder da man nur die Hälfte der Höhe nimmt $= 74 \times 420$, oder da man nur die Hälfte der Grundlinie nimmt $= 148 \times 210 = 23980$; folglich beträgt der Flächeninhalt des Dreyeckes ABC $23980^{\square''} = 2^{\circ}\ 39'\ 80''$ im zehentheiligen Quadrat-Maße.

Anmerkung. Beygezeichnete Figur stellt auch zugleich den Beweis augenscheinlich dar, daß, wenn die ganze Grundlinie mit der ganzen Höhe multiplicirt wird, man dadurch den Flächeninhalt des Parallelogramms DC bekommt, wovon das Dreyeck ABC nur die Hälfte ist; folglich muß man das Product aus der ganzen Höhe und ganzen Grundlinie durch zwey theilen, oder man muß nur die halbe Höhe mit der ganzen Grundlinie, oder die halbe Grundlinie mit der ganzen Höhe multipliciren.

Zusatz. Wenn der Flächeninhalt und die halbe Höhe eines Dreyeckes gegeben sind, und man soll die Grundlinie finden; so darf man nur den Flächenin-

halt durch die halbe Höhe dividiren; der Quotient gibt alsdann die Grundlinie. Eben so findet man die halbe Höhe, wenn man den Flächeninhalt durch die Grundlinie dividirt (Arithmet. §. 29. Folgesatz).

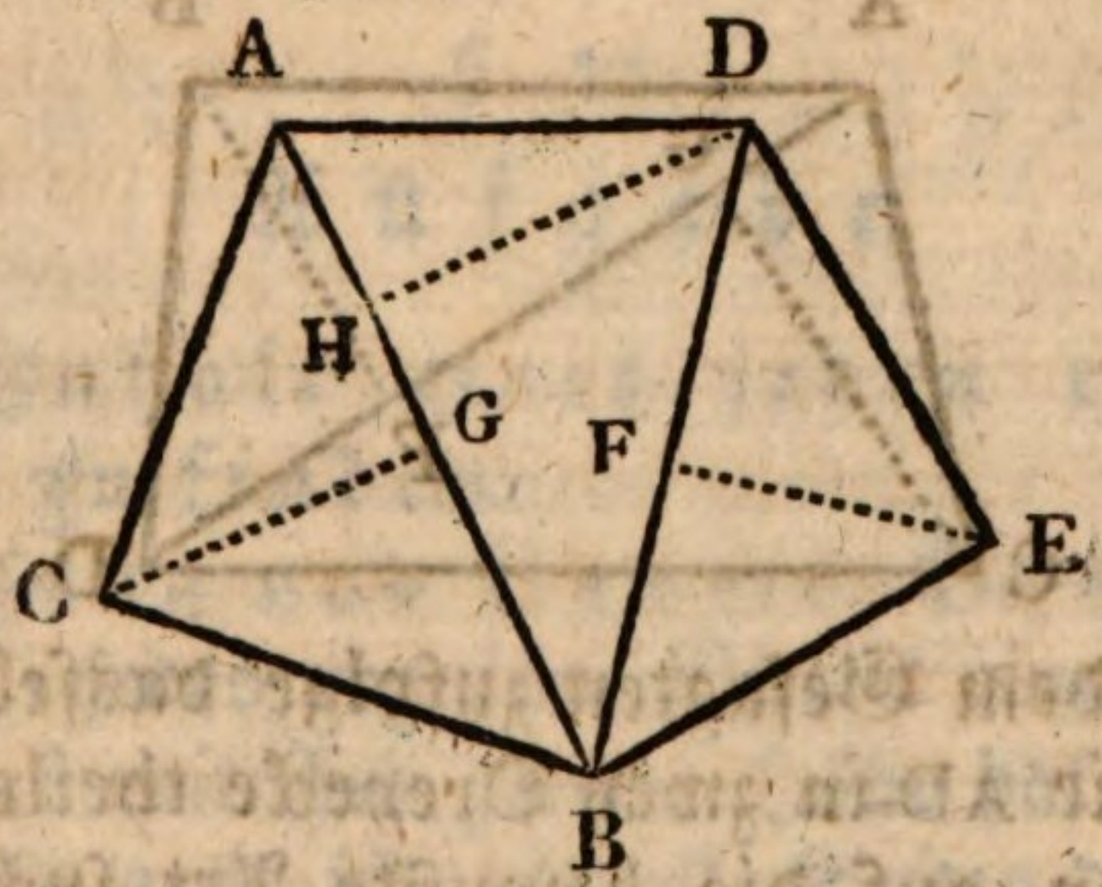
§. 10.

Aufgabe.

Den Inhalt jeder geradlinigten Figur zu finden.

Auflösung. Man theile die geradlinigte Figur durch beliebige Diagonallinien in lauter Dreyecke (jede geradlinigte Figur läßt sich durch Diagonallinien in so viele Dreyecke theilen, als sie Seiten hat, weniger zwey); suche dann den Inhalt aller dieser Dreyecke, und bringe ihn in eine Summe, so ist diese der Flächeninhalt der ganzen geradlinigten Figur.

Es soll z. B. der Flächeninhalt von folgender Figur gefunden werden:



Nachdem man sie durch die Diagonallinien BA und BD in die Dreyecke ACA, ABD und DBE getheilt hat, so suche man den Inhalt derselben, und um diesen finden zu können, ziehe man die senkrechten CG, DH und EF, welche die Höhen der zu berechnenden Dreyecke sind. Setzen wir BA = 36′, CG = 15′, DH = 17′, DB = 32′, FE = 12′, so ist der In-

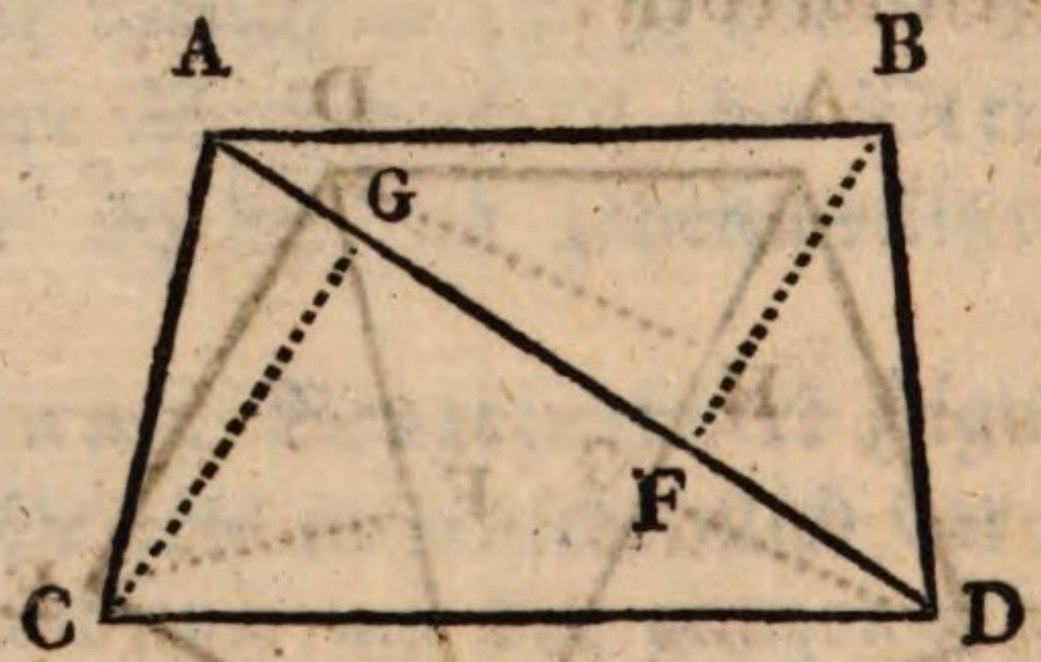
halt des Dreyeckes CAB $= \frac{36 \times 15}{2}$ oder $18 \times 15 =$ $270^{\square/}$, der Inhalt des Dreyeckes ABD $= \frac{36 \times 17}{2} =$ $306^{\square/}$, der Inhalt des Dreyeckes DBE $= \frac{32 \times 12}{2}$ oder 16×12 oder $32 \times 6 = 192^{\square/}$, die Summe dieser Dreyecke ist:

270
306
192

$769^{\square/}$

Der Flächeninhalt obiger Figur beträgt also im geomet. M. 7 Quadratruthen und 68 Quadratschuh.

Zusatz. Um den Inhalt eines solchen Trapezes zu finden, in dem zwey parallele Seiten vorkommen, wie im BC,



müßte man dem Gesagten zufolge dasselbe durch die Diagonallinie AD in zwey Dreyecke theilen, und den Inhalt davon auf die bewußte Art suchen, indem man die ganze Grundlinie AD mit der halben Summe der Höhen BG und GC multiplicirte. Allein man kann den Inhalt eines solchen Trapezes auf einem kürzern Wege so finden: Man nehme die beyden parallelen Seiten AB und CD als Grundlinien der Dreyecke ADB und ACD an, so haben dann beyde Dreycke eine gleiche Höhe, nähmlich die Entfernung

beyder parallelen Seiten von einander; folglich darf man nur, um den Inhalt des Trapez zu finden, die Parallelseiten addiren, und die Summe davon mit der halben Höhe, oder die ganze Höhe mit der halben Summe der Parallelseiten multipliciren, oder man kann auch die ganze Höhe mit der ganzen Summe der Parallelseiten multipliciren, und das dadurch entstandene Product durch zwey dividiren.

Setzen wir die parallelen Seiten in der obigen Figur (CD und AB) betragen 24′ und 18′, ihre Entfernung aber von einander sey 8′; so wird der Flächeninhalt derselben betragen $24 + 18 \times 4$, oder $\frac{24 + 18 \times 8}{2}$, oder $\frac{24 + 18 \times 8}{2} = 168$ Quatratschuh, d. i. im zehentheiligen Quadratmaße 1°68′.

§. 11.

Aufgabe.

Den Inhalt eines jeden regulären Vieleckes zu finden.

Auflösung und Beweis. Da (nach neunt. Absch. §. 32.) jedes reguläre Vieleck einem Dreyecke gleich ist, das mit ihm gleiche Höhe hat, und dessen Grundlinie so groß ist, als alle Seiten des Vieleckes zusammen genommen; so erhält man den Flächeninhalt eines jeden regulären Vieleckes dadurch, wenn man die Summe der Seiten desselben mit der halben Höhe multiplicirt, oder wenn man die ganze Höhe mit der Anzahl der Seiten multiplicirt, und dann dieses Product mit zwey dividirt.

Zusatz. Man könnte den Inhalt eines regulären Vieleckes auch so finden, wenn man den Inhalt eines einzigen Dreyeckes desselben berechnete, und dann diesen mit der Anzahl der Seiten des Vieleckes multiplicirte; das auf solche Art entstandene Product ist der Inhalt des ganzen regulären Vieleckes; denn es besteht aus so viel Dreyecken, als es Seiten hat.

Eilfter Abschnitt.

Vom Messen des Kreises und der dazu gehörigen Figuren.

Vorerinnerung.

Ein Kreis kann als ein reguläres Vieleck von unendlich viel Seiten, oder was eines ist, als ein Unendlicheck betrachtet werden; denn je mehr Seiten ein reguläres Vieleck hat, desto näher kommen dieselben zu der Peripherie; wenn also ein Vieleck unendlich viel Seiten hat, so fallen dieselben mit der Peripherie zusammen. Da aber kein Unendlicheck in den Kreis beschrieben werden kann; denn jedes reguläre Vieleck, das in denselben beschrieben wird, hat allezeit eine bestimmte Anzahl von Seiten, und wenn auch deren mehrere tausend wären, so kann man also niemahls ein bestimmtes reguläres Vieleck ausfindig machen, das ganz mit dem Kreisumfange übereinstimmte, und eben darum läßt sich nie mit

Genauigkeit das Verhältniß des Kreisumfanges (der Peripherie) zum Durchmesser finden.

Dieses Verhältniß läßt sich bloß durch Annäherung finden. Wie man nun zu Werke gegangen ist, und was man für verschiedene Methoden angewendet hat, um das Verhältniß der Peripherie zum Durchmesser des Kreises zu finden, übergehe ich hier mit Stillschweigen, und begnüge mich bloß mit der Angabe dieses Verhältnisses in Zahlen, in so fern man dasselbe beynahe gefunden hat. Ich führe zwey dieser Zahlenverhältnisse an, die für die Ausübung hinlänglich sind. Das einfachste, und eben darum zum Gebrauche bequemste ist jenes, kraft dessen sich der Durchmesser zur Peripherie verhält, wie 1 zu 3 *) (oder wie es Archimedes etwas genauer bestimmt hat, wie 7 zu 22). Doch dieses Verhältniß ist gar nicht genau und kann also in solchen Fällen nicht gebraucht werden, wo Genauigkeit erfordert wird. Weit genauer ist das sogenannte Ludolphische Verhältniß; nach diesem verhält sich der Durchmesser zur Peripherie, wie 100:314. Dieses ist seiner Bequemlichkeit wegen im Rechnen besonders zu merken, und kann in allen Fällen, ohne einen beträchtlichen Fehler befürchten zu dürfen, gebraucht werden.

§. 1.

Aufgabe.

Aus dem Durchmesser eines Kreises seinen Umfang, und aus dem Umfange seinen Durchmesser zu finden.

---

*) Wenn man den Umfang eines wirklichen Kreises, z. B. eines runden Tellers mit einem Faden mißt, und dann diesen gemessenen Umfang auf drey gleiche Theile zusammen legt, so erhält man so den Durchmesser dieses Kreises. Dieß zur Versinnlichung.

Auflösung. Wenn der Durchmesser eines Kreises gegeben ist, so findet man den Umfang desselben durch Hülfe des Ludolphischen Verhältnisses, indem man diese Proportion ansetzt: Wie sich 100 : 314 verhaltet, so verhaltet sich der gegebene Durchmesser zu x. z. B. der Durchmesser eines Kreises beträgt 32 Schuh, wie groß ist die Peripherie?

$100 : 314 = 32 : x;\ x = \frac{314 \times 32}{100} = 100\frac{48}{100} =$

$100\frac{12}{25}$; die Peripherie beträgt also $100\frac{12}{25}$ Schuh.

2) Der Durchmesser eines Kreises sey 6′, wie groß ist der Umkreis desselben?

Auflösung. $100 : 314 = 6 : x;\ x = \frac{314 \times 6}{100} =$

18, 84 = 1° 8′ 8″ 4‴ geomet. Maß.

3) Der Halbmesser eines Kreises sey 5′ 4″, wie groß ist seine Peripherie?

Auflösung. Ist der Halbmesser 5′ 4″, so ist der Durchmesser 10′ 8‴; folglich

$100 : 314 = 10'\ 8'' : x = \frac{314 \times 108}{100} = \frac{33912}{100} =$

339, 12 g. Zoll = 3° 3, 9″ 1‴ 2^{IV} geomet. M.

Ist die Peripherie eines Kreises gegeben, so findet man aus dieser den Durchmesser dadurch, wenn man das Ludolphische Verhältniß umkehrt; indem dann die verkehrte Regel de Tri eintritt. Z. B. die Peripherie ist 10′, wie groß ist der Durchmesser?

Auflös. $314 : 100 = 10' : x;\ x = \frac{100 \times 10}{314} =$

3, 186 g. F. = 3′ 1″ 8‴ 6^{IV}.

§. 2.

Aufgabe.

Den Inhalt eines Kreises zu finden, wenn der Radius gegeben ist.

Auflösung und Beweis. Jeder Kreis ist einem Dreyecke gleich, dessen Grundlinie so groß, als die Peripherie ist, und dessen Höhe dem Radius gleich kommt (neunt. Abschn. §. 32. Zus.); folglich ergibt sich der Inhalt eines Kreises dadurch, daß man die Peripherie desselben mit dem Radius multiplicirt, und das Product mit zwey dividirt; der auf solche Art entstandene Quotient zeigt dann im Quadratmaße den Inhalt des Kreises an. Ist also der Radius eines Kreises gegeben, und man soll aus demselben den Inhalt der Zirkelfläche finden, so muß man zuerst aus diesem, indem man ihn verdoppelt, die Peripherie des zu berechnenden Kreises (nach §. 1.) suchen.

Zusatz. Daß man bey der Berechnung der Kreisfläche, je nachdem es die Umstände erfordern, auch so zu Werke gehen kann, daß man mit dem halben Radius die ganze Peripherie, oder die halbe Peripherie mit dem ganzen Radius multiplicirt, leuchtet von selbst in die Augen.

Z. B. wenn der Radius eines Kreises 3′ groß ist, und die Peripherie desselben 1884‴ beträgt, und man soll den Inhalt dieses Kreises finden, so nehme man die Hälfte der Peripherie 1884 (da sich diese Zahl, ohne daß ein Rest bleibt, halbiren läßt),

und multiplicire $\frac{1884}{2}$ mit 3, d. i. $942 \times 3 = 2826^{\square'''}$

d. i. 28 □. F., 26 □. Z. g. M. Der Flächeninhalt des Kreises, der einen 3′ langen Durchmesser hat,

beträgt also 28 Quadratschuh und 26 Quadratzoll im geometrischen Maße.

§. 3.

Aufgabe.

Den Inhalt eines Ausschnittes zu berechnen, wenn der Halbmesser des Kreises bekannt, und der Bogen des Ausschnittes in Graden gegeben ist.

Auflösung. Man berechne zuerst aus dem gegebenen Radius den Inhalt des ganzen Kreises, und dann setze man diese Proportion an: Wie sich verhält die Peripherie des Kreises (360°) zum Bogen des Ausschnittes (die Zahl seiner Grade, Minuten u. s. w.), so verhält sich der Inhalt des Kreises zum Inhalte des Ausschnittes.

§. 4.

Aufgabe.

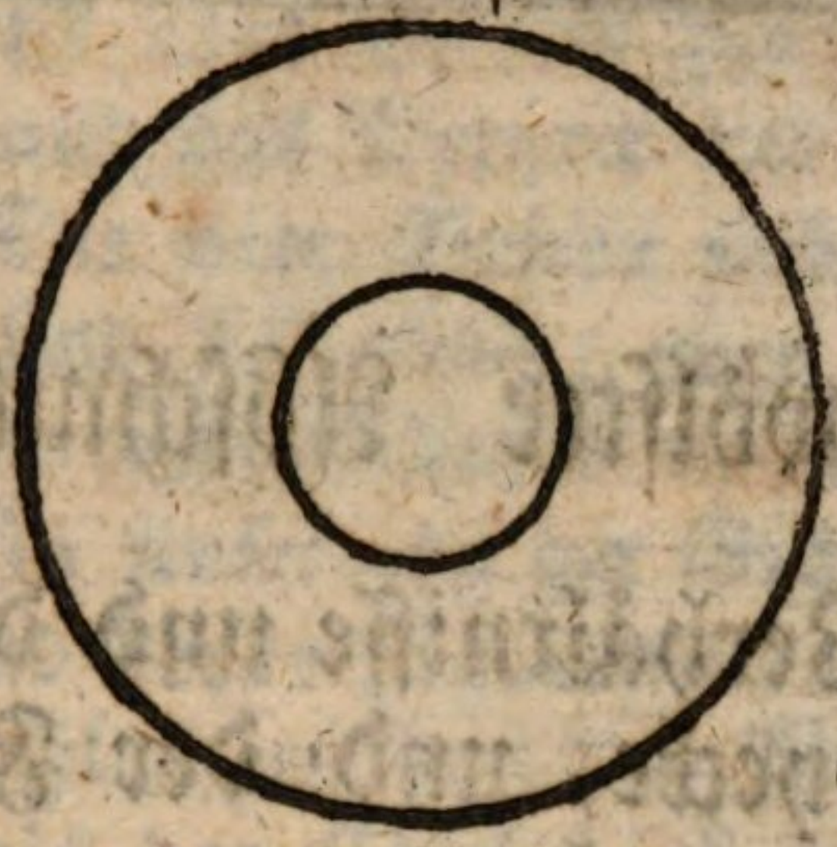
Den Inhalt eines Abschnittes zu finden.

Auflösung. Man berechne zuerst nach dem vorigen Paragraph den Ausschnitt, der zu demselben Bogen gehört; dann ziehe man den Inhalt des Dreyeckes, das die beyden Radien, und die Sehne des Abschnittes zu Seiten hat, davon ab, so gibt der Rest, im Quadratmaße genommen, den Inhalt des Abschnittes.

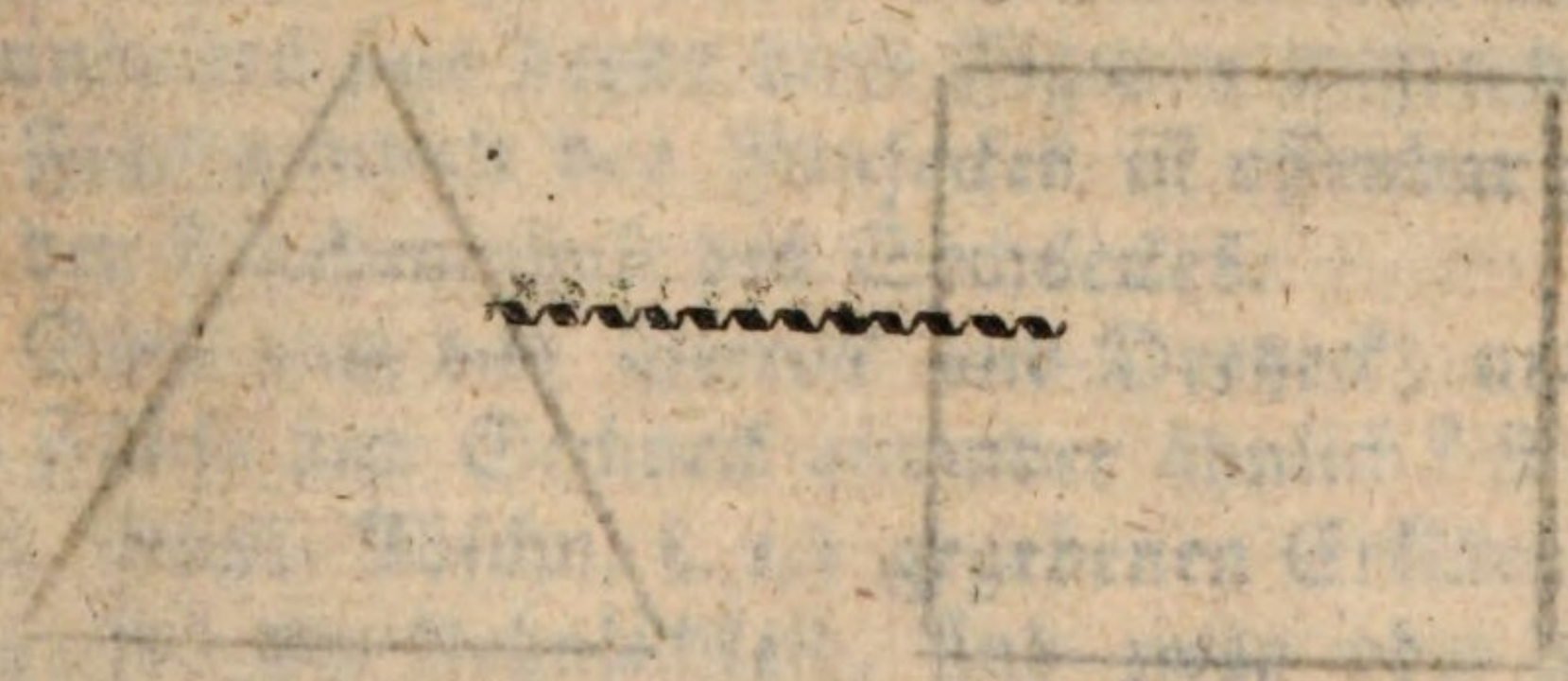
§. 5.

Aufgabe.

Den Inhalt des Ringes zwischen zwey concentrischen Kreisen zu finden.



Erläuterung und Auflösung. Der Raum zwischen den hier beygezeichneten concentrischen Kreislinien heißt der Ring, oder die Krone. Beyde diese Kreise sind in der Größe unterschieden, und müssen es auch seyn, sonst könnten sie nicht concentrisch seyn. Sie sind gerade um das Stück, das wir den Ring oder die Krone nennen, in Absicht der Größe von einander unterschieden. Hieraus folgt nun ganz leicht, wie man den Inhalt des Ringes finden kann, da er der Unterschied der Größe von beyden Kreisen ist. Man darf nähmlich nur den Inhalt des größern und kleinern Kreises berechnen, und den letztern von dem erstern abziehen, so enthält der Rest den Inhalt des Ringes.



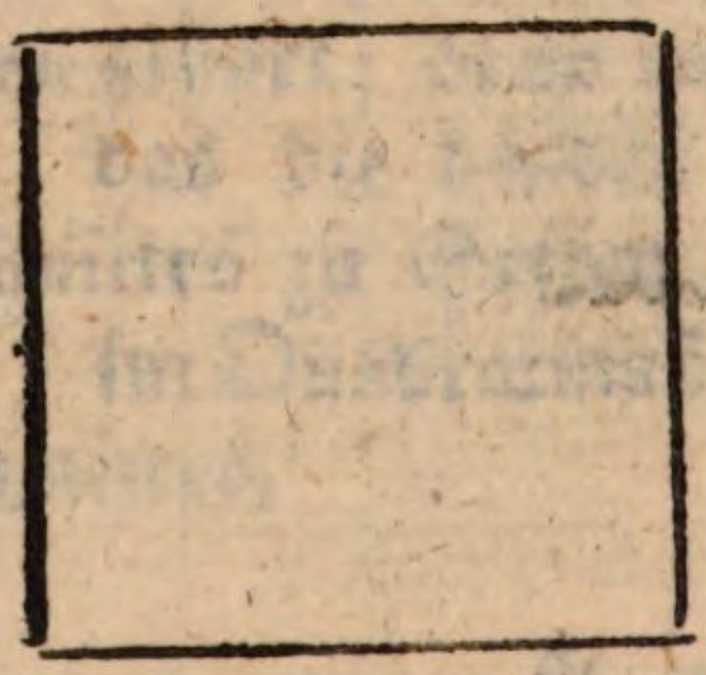
Zwölfter Abschnitt.

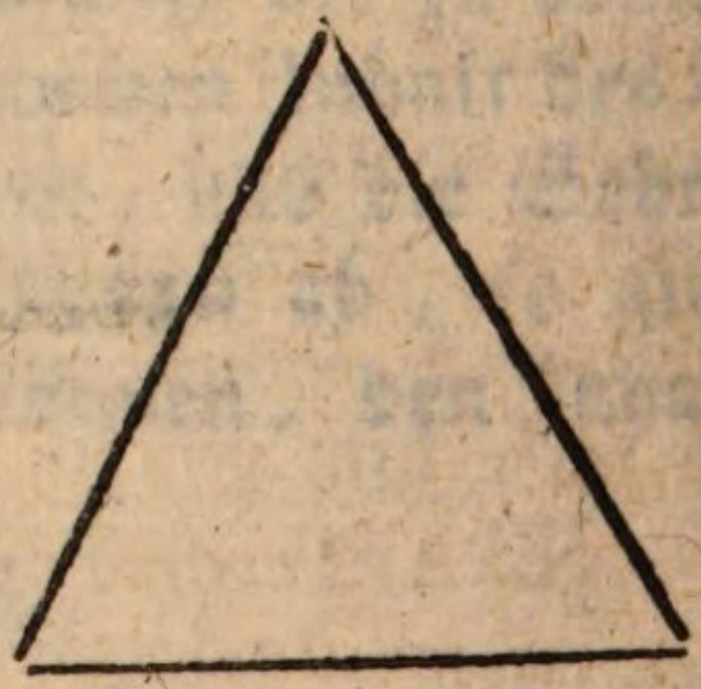
Von dem Verhältnisse und der Aehnlichkeit der Dreyecke, und der Figuren überhaupt.

§. 1.

Was man an ebenen, und in geraden Linien eingeschlossenen Figuren bemerken und unterscheiden kann, und wann sie einander ähnlich sind.

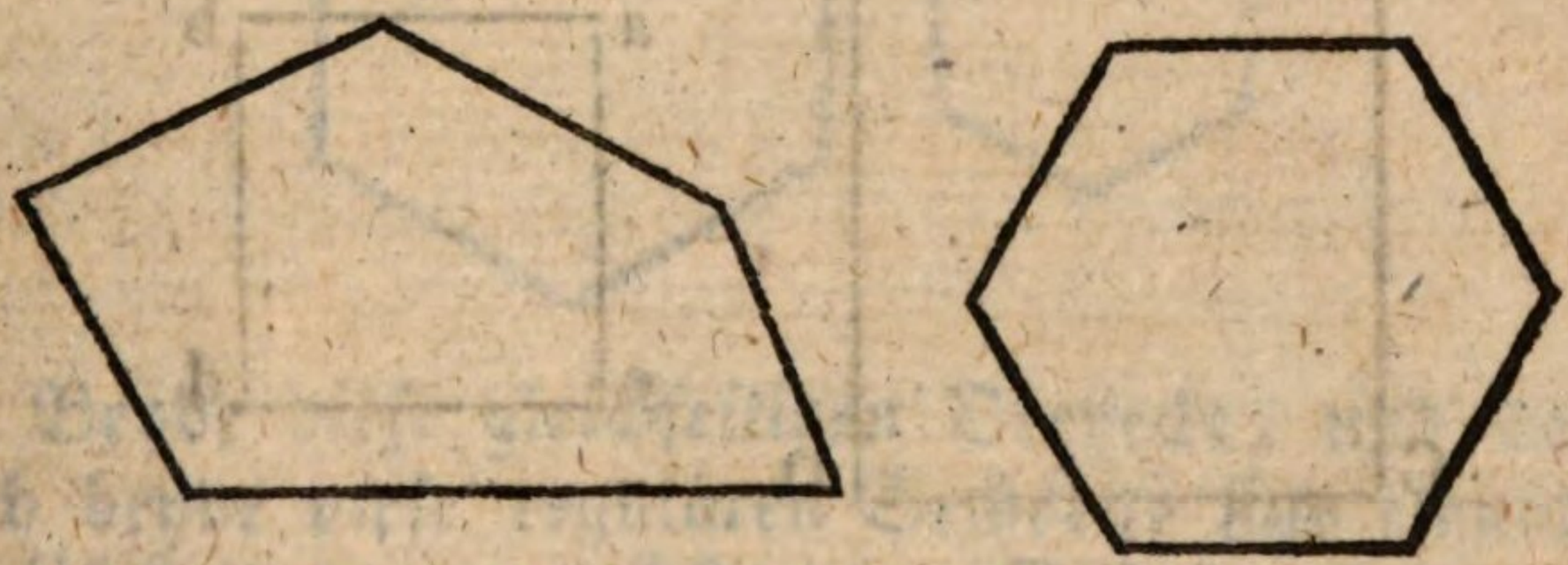
An zwey (oder auch mehrern) ebenen, und in geraden Linien eingeschlossenen Figuren können, wenn man sie mit einander vergleicht, folgende Stücke bemerkt, und unterschieden werden: 1) Wie viel Seiten und Winkel jede Figur hat. 2) Wie die Seiten und Winkel der Figuren der Größe nach sich gegen einander verhalten. 3) Welche Größe, oder welchen Flächeninhalt die Figuren haben.





Hier sind zwey ebene, in geraden Linien eingeschlossene Figuren, beygezeichnet; ein Viereck und ein Dreyeck. Wie verhalten sich nun diese zwey Figu-

ren zu einander? Das Viereck hat vier Seiten und vier Winkel, und das Dreyeck hat drey Seiten und drey Winkel. Die vier Seiten und vier Winkel in dem Vierecke sind sich gleich; eben so sind auch die drey Seiten und drey Winkel in dem Dreyecke einander gleich. In Ansehung der Größe oder des Flächeninhaltes sind beyde Figuren von einander unterschieden. Der Flächeninhalt des Viereckes ist offenbar größer, als der Flächeninhalt des Dreyeckes. Hier folgen noch zwey ebene, in geraden Linien eingeschlossene Figuren, ein Fünf- und Sechseck.



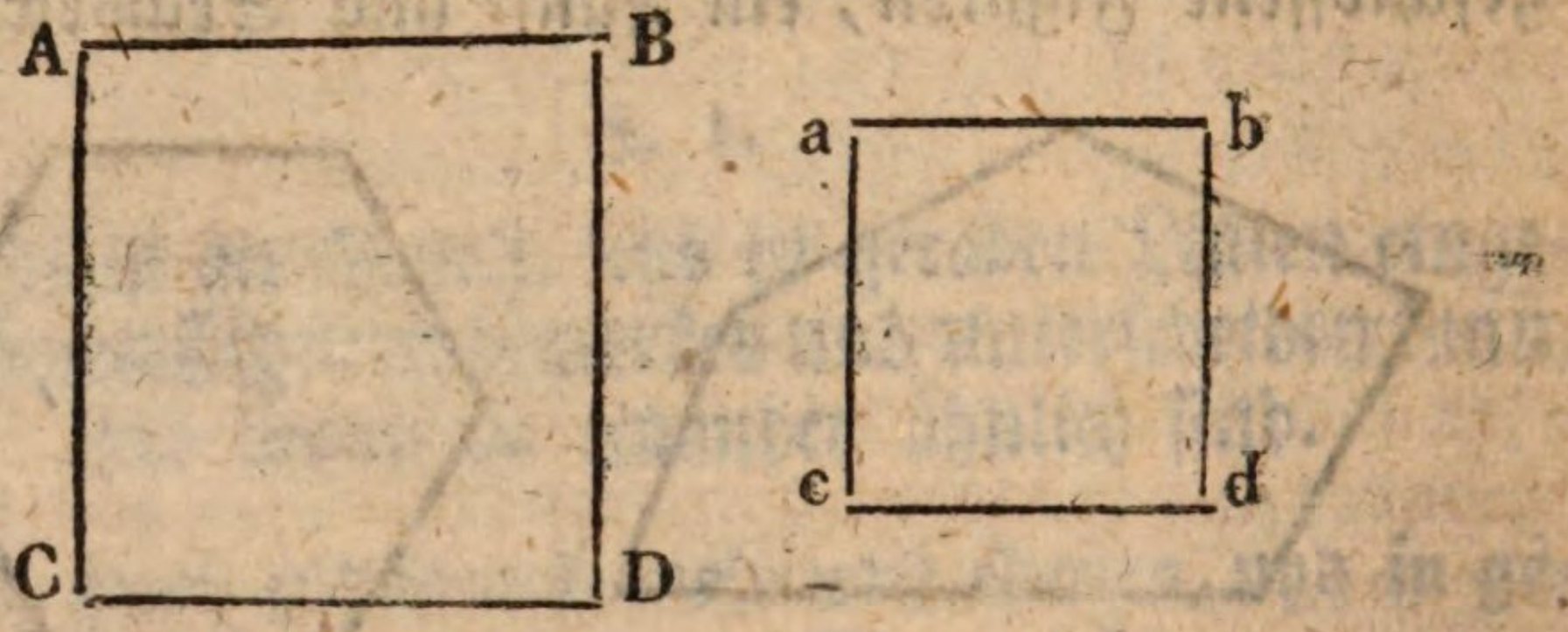
Wie verhalten sich beyde diese Figuren zu einander? Das Fünfeck hat fünf Seiten und fünf Winkel, und das Sechseck hat sechs Seiten und sechs Winkel. Die fünf Seiten und fünf Winkel in dem Fünfecke sind ungleich; die sechs Seiten und sechs Winkel im Sechsecke aber sind sich gleich. In Absicht des Flächeninhaltes sind beyde diese Figuren ungleich; denn der Flächeninhalt des Fünfeckes ist offenbar größer, als der Flächeninhalt des Sechseckes.

Sind nun das Viereck und Dreyeck, und dann das Fünf- und Sechseck einander ähnlich? Nach der oben (viert. Abschn. §. 1.) gegebenen Erklärung des Begriffes der Aehnlichkeit, sind zwey oder mehrere Figuren einander ähnlich, wenn sie in allen Stücken mit einander übereinstimmen, nur nicht in ihrer Größe. Da nun das Viereck und Dreyeck, und dann das

Fünf- und Sechseck nicht gleich viel Seiten und Winkel haben, und also in den Winkeln und Seiten mit einander nicht übereinstimmen, so sind sie einander unähnlich.

Wenn also zwey ebene und geradlinigte Figuren einander ähnlich seyn sollen, so müssen sie 1) gleich viel Seiten und Winkel haben.

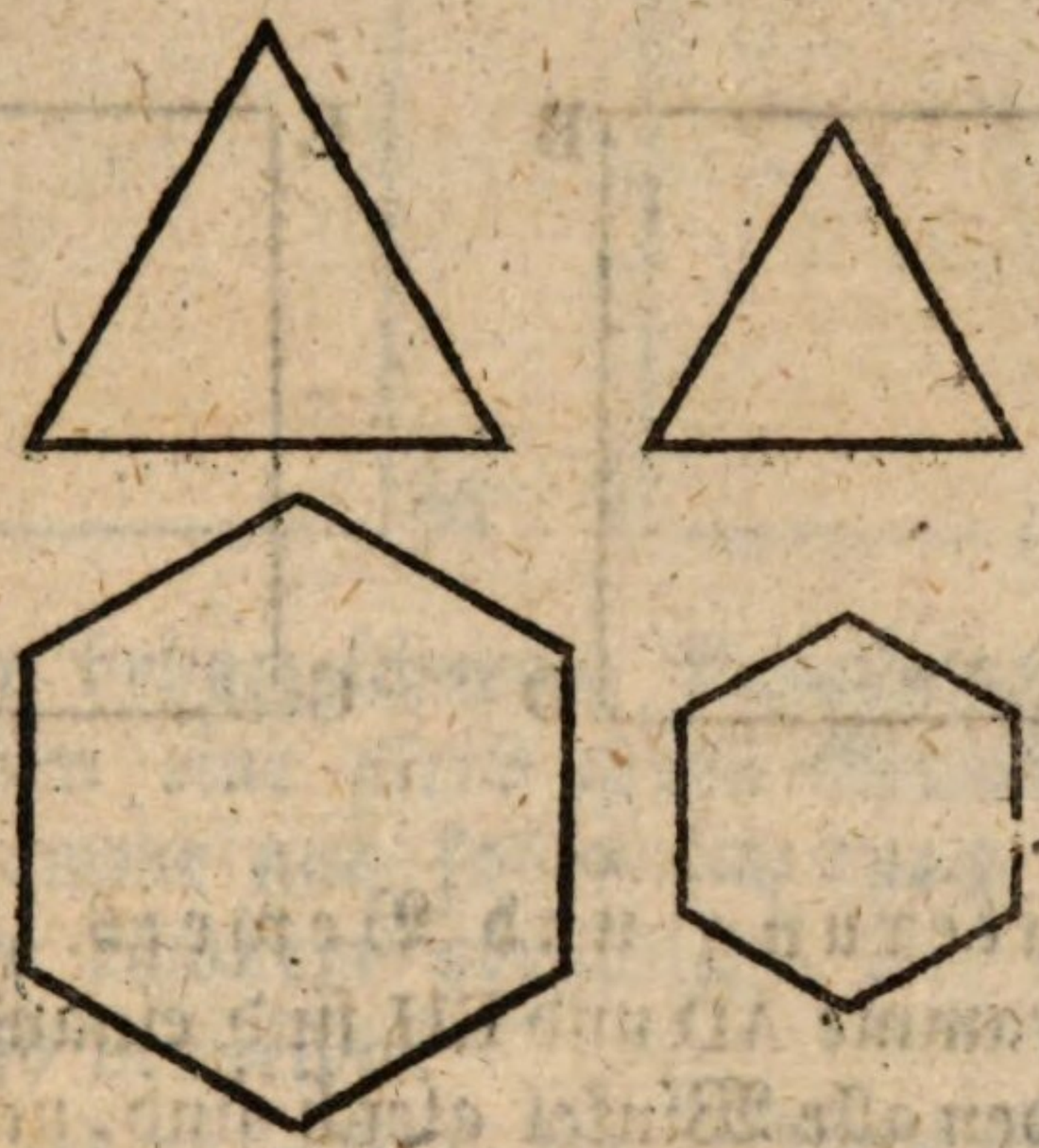
Hier folgen zwey Vierecke. Sind diese nun einander ähnlich?



Offenbar sind diese zwey Vierecke einander ähnlich; denn jedes dieser Vierecke hat vier Seiten und vier Winkel, und die gleichnahmigen Seiten in dem größern Vierecke haben in Absicht ihrer Größe dasselbe Verhältniß zu einander, wie die Seiten in dem kleinern Vierecke, oder kurz, sie sind einander proportional. Auch sind in beyden Vierecken die gleichnahmigen Winkel einander gleich.

Wenn also zwey ebene und geradlinigte Figuren einander ähnlich seyn sollen, so müssen sie nicht nur gleich viel Seiten und Winkel haben, sondern es müssen auch 2) die gleichnahmigen (die gleichliegenden) Seiten in beyden Figuren mit einander in Proportion stehen, und die gleichnahmigen (gleichliegenden) Winkel beyder Figuren müssen sich gleich seyn.

Zur Erläuterung und mehrern Deutlichkeit folgen hier noch einige Figuren.



Beyde diese gleichseitigen Dreyecke, und dann auch beyde diese regulären Sechsecke sind einander ähnlich? Und warum? Aus dem Gesagten folgt, daß alle jene ebenen, geradlinigten Figuren sich ähnlich sind, bey denen alle gleichliegenden Winkel gleich sind, und die gleichliegenden Seiten in Proportion stehen.

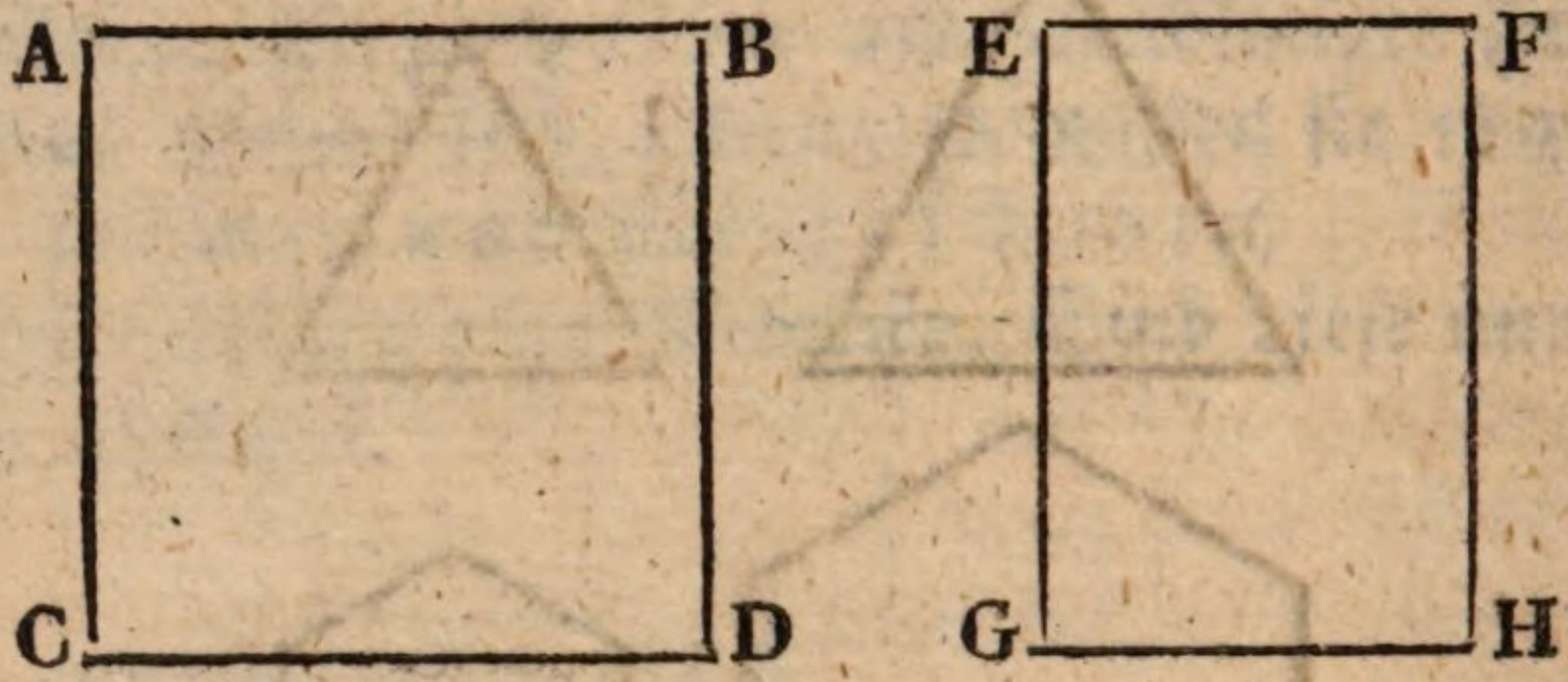
Zusatz. Alle regulären Figuren von gleich viel Seiten sind einander ähnlich; denn alle Winkel derselben sind einander gleich, und alle ihre Seiten sind einander proportional. Da nun alle Kreise als reguläre Vielecke von unendlich viel Seiten betrachtet werden können, so sind alle Kreise einander ähnlich.

§. 2.

Lehrsatz.

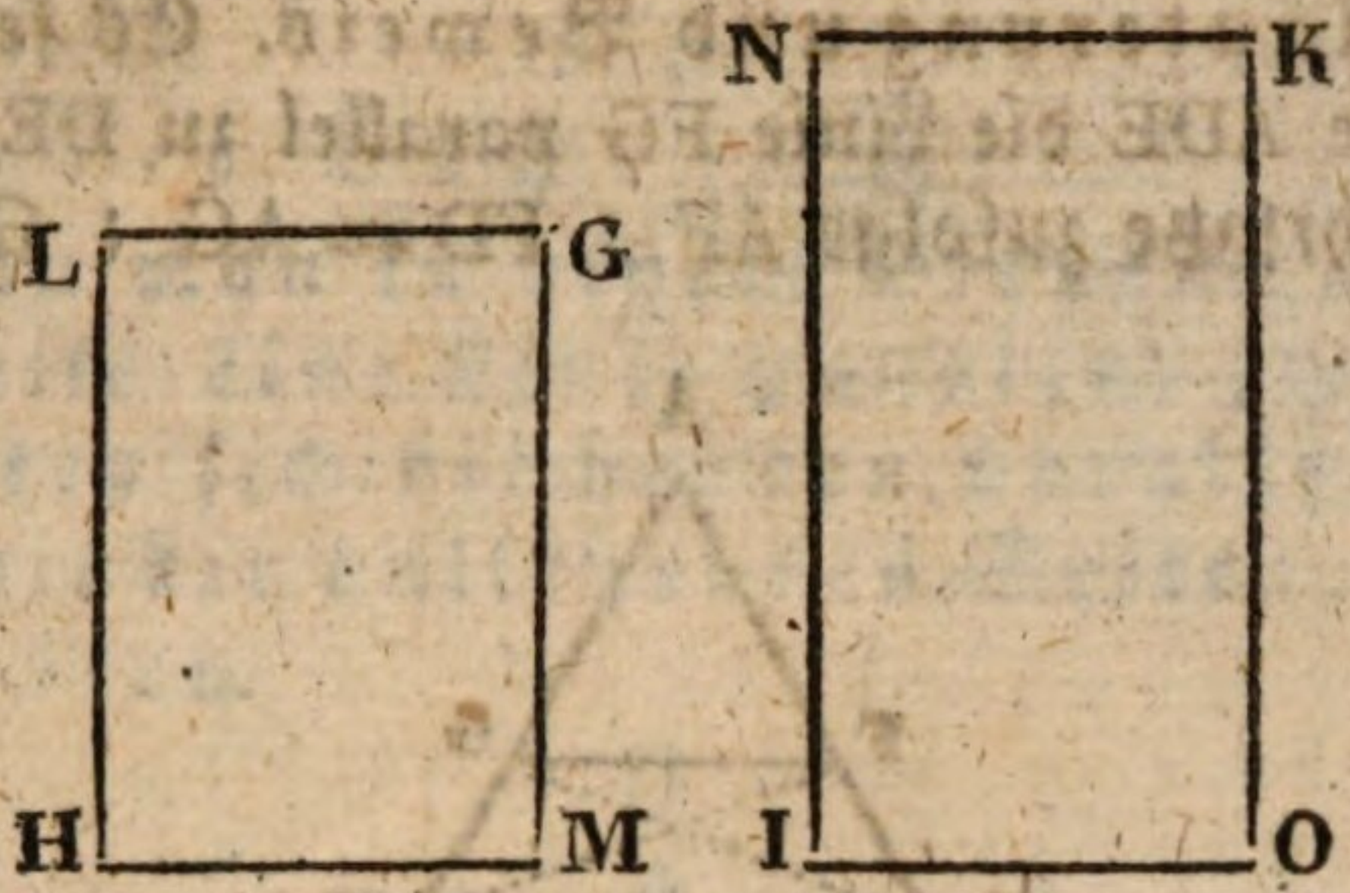
Parallelogramme von gleicher Höhe, verhalten sich gegen einander, wie ihre

Grundlinien, und Parallelogramme von gleichen Grundlinien verhalten sich gegen einander, wie ihre Höhen.



Erläuterung und Beweis. Die beyden Parallelogramme AD und EH sind einander ähnlich; weil in beyden alle Winkel gleich sind, und die gleichnahmigen Seiten in Proportion stehen. Sie haben noch überdieß eine gleiche Höhe, d. i. EG = AC. Nun soll bewiesen werden, daß beyde Parallelogramme, da sie gleiche Höhe haben, sich zu einander (ihrem Inhalte nach) so verhalten, wie ihre Grundlinien, wie CD : GH. Dieß wird so bewiesen:

Der Flächeninhalt von ABCD = CD × AC, und der Flächeninhalt von EFGH = GH × EG. Da nun die Höhen sich gleich sind, so kann man statt EG auch AC nehmen; folglich verhalten sich beyde Parallelogramme AD und EH zu einander, wie die Producte aus CE × AC und GH × AC, d. i. wie CD : GH; denn die Proportion bleibt richtig, wenn man die Größen CD und GH durch die beyden gleichen Größen AC und AC dividirt; beyde Parallelogramme verhalten sich also zu einander, wie ihre Grundlinien. Parallelogramme von gleicher Höhe, verhalten sich also zu einander, wie ihre Grundlinien.



Die hier beygezeichneten Parallelogramme LM und NO haben eine gleich große Grundlinie. Diese Parallelogramme nun sollen sich (nach dem obigen Lehrsatze) zu einander verhalten, wie ihre Höhen. Dieß wird so bewiesen:

LM : NO = HM × MG : IO × OK. Da nun HM = IO, so ist also LM : NO = IO × MG : IO × OK, d. i. LM : NO = MG : OK; sie verhalten sich also wie ihre Höhen. Parallelogramme, die eine gleiche Grundlinie haben, verhalten sich also wie ihre Höhen.

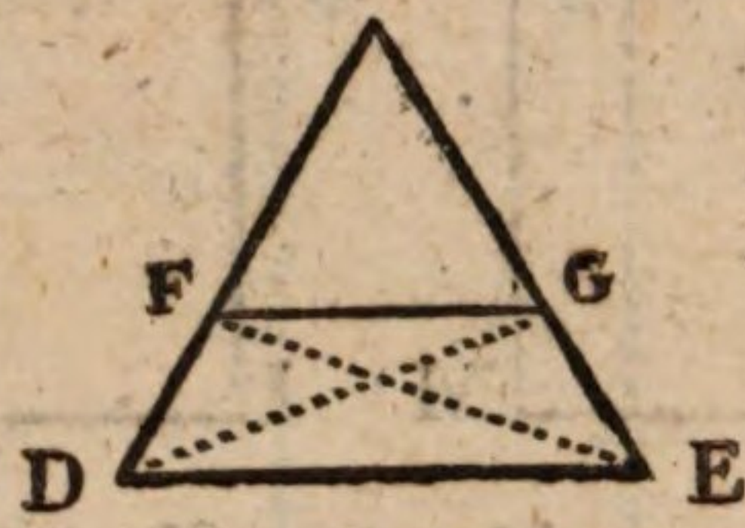
Zusatz. Da jedes Dreyeck die Hälfte von dem Parallelogramm ist, das mit ihm einerley Grundlinie und Höhe hat, so müssen also auch Dreyecke von gleicher Höhe sich wie ihre Grundlinien gegen einander verhalten, und Dreyecke von gleichen Grundlinien müssen sich wie ihre Höhen gegen einander verhalten.

§. 3.

Lehrsatz.

Wenn man in einem Dreyecke mit einer Seite eine Parallellinie zieht, so stehen die dadurch entstandenen Stücke der beyden andern Seiten in Proportion.

Erläuterung und Beweis. Es sey in dem Dreyecke ADE die Linie FG parallel zu DE, so muß dem Lehrsatze zufolge AF : FD = AG : GE.



Man ziehe DG, so haben die Dreyecke FDG und AFG gleiche Höhe, nähmlich FG; folglich (§. 2. Zus.) AFG : FGD = AF : FD. Man ziehe FE, so ist aus dem nähmlichen Grunde FAG : FGE = AG : GE; nun ist aber das △ FGD = FGE; weil sie auf der nähmlichen Grundlinie FG liegen, und zwischen den nähmlichen Parallellinien FG und DE sich befinden, also kann eines für das andere gesetzt werden; folglich können die vorigen zwey Proportionen so geschrieben werden:

AFG : FGD = AF : FD
AFG : FGD = AG : GE

folglich AF : FD = AG : GE (Arith. §. 185.).

Aus dieser Proportion kann man nun nach dem, was in der Arithmetik von den geometrischen Proportionen gesagt wurde, andere herleiten, wie folgt:

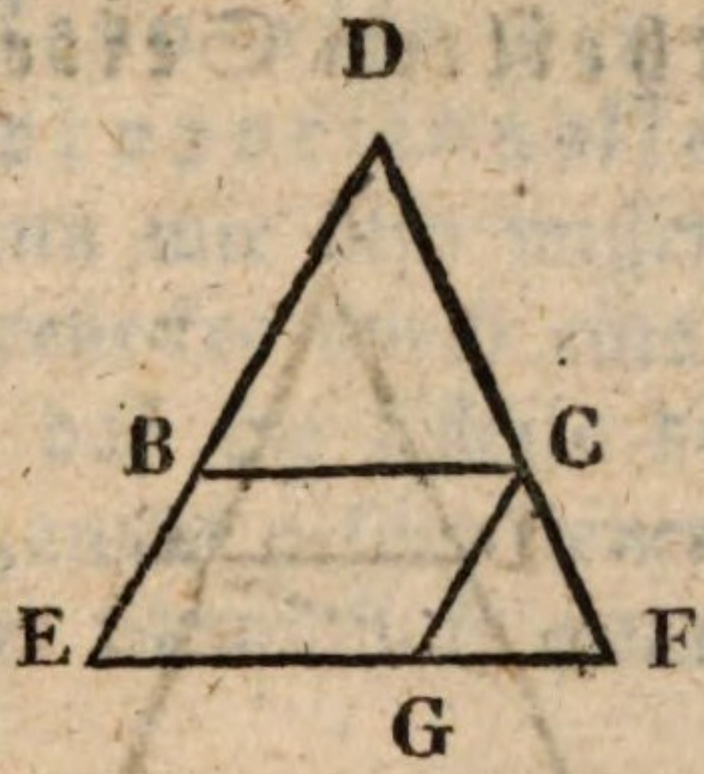
AF : AG = FD : GE (Arith. §. 184. I. 2.).
AD : FD = AE : GE (Arith. §. 184. III. 3.).
AD : AF = AE : AG (Ebendaselbst).

Zusatz. Aus dem Gesagten folgt, daß, wenn man in einem Dreyecke mit einer Seite mehrere Parallellinien zieht, die abgeschnittenen Stücke der Seiten in Proportion stehen.

§. 4.

Lehrsatz.

Wenn man in einem Dreyecke mit einer Seite eine Linie parallel zieht, so verhalten sich die beyden parallelen Linien, wie die anliegenden Seiten, wozu sie gehören.



Beweis. In dem △DEF sey BC ∥ EF, so muß nach unserm Lehrsatze BC : EF = DB : DE oder DC : DF. Um dieses beweisen zu können, ziehe man CG ∥ DF.

GF : GE = FC : DC (nach §. 3).

GF + GE : GE = FC + DC : DC

d. i. EF : GF = DF : DC

Nun ist EG = BC, weil sie die gegenüber stehenden Seiten eines und des nähmlichen Parallelogramms sind, also kann man BC für EG setzen; folglich EF : BC = DF : DC, und durch Verwechslung der Glieder (Arith. §. 184. I. 2.) erhält man:

BC : EF = DC : DF. Nach §. 3. ist

DC : DF = DB : DE. Die zwey Verhältnisse BC : EF und DB : DE sind einem dritten gleich, nähmlich DC : DF; folglich

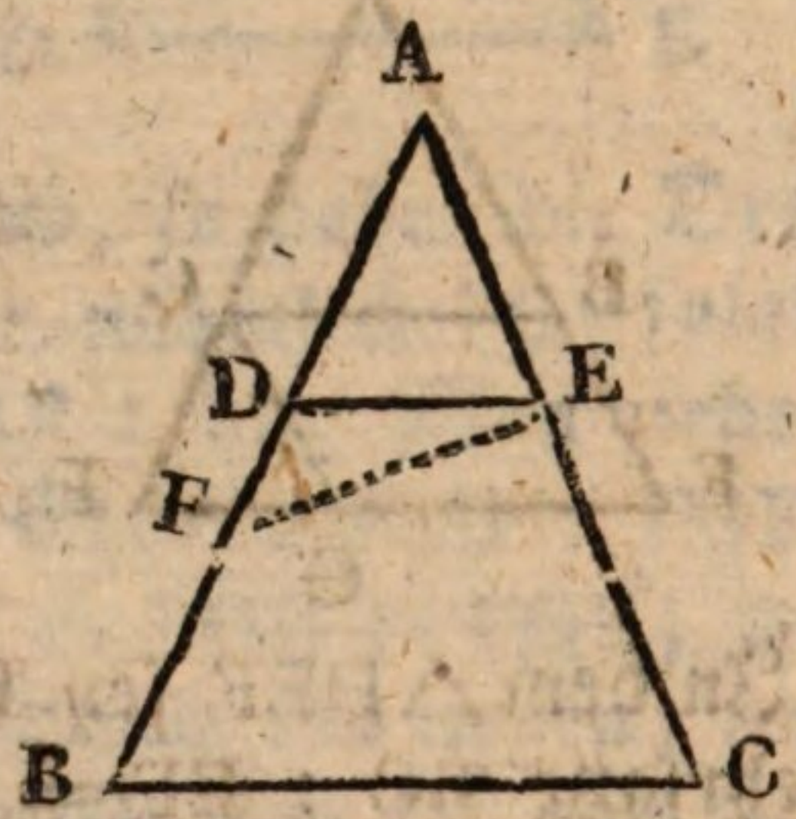
BC : EF = DB : DE, und weil DC : CF und DB : BE im nähmlichen Verhältnisse zu einander stehen, so ist auch BC : EF = DC : CF.

Also ist BC : EF = DB : DE = DC : CF.

§. 5.

Lehrsatz.

Wenn die Seiten eines Dreyeckes in proportionelle Stücke getheilt werden, und man verbindet die Theilungspuncte durch eine gerade Linie, so ist diese Linie mit der ungetheilten Seite parallel.



Beweis. Der Lehrsatz sagt, wenn in dem Dreyecke ABC die Seiten AB und AC durch die Linie DE so geschnitten werden, daß AD zu AE sich verhält, wie AB zu AC, so muß DE zu BC parallel laufen.

Wir wollen annehmen, daß nicht die Linie DE, sondern eine andere z. B. EF mit der Grundlinie BC parallel laufe. In diesem Falle müßte

AB : AC = AF : AE. Nach der angenommenen Bedingung aber sind die Seiten so geschnitten, daß

AB : AC = AD : AE, Aus diesen beyden Proportionen folgt nun, daß

AF : AE = AD : AE (Arith. 185. 1.) Und durch Verwechslung erhält man

AF : AD = AE : AE. Da nun AE = AE ist, so folgt, daß auch AF = AD ist. Dieß kann aber unmöglich seyn; denn AF ist das Ganze, und AD nur ein Theil desselben, der nothwendig kleiner seyn muß,

als das Ganze, dessen Theil er ist. EF kann also nicht parallel laufen zu BC. Eben so kann auch eine andere gerade von dem Puncte E über D gezogene Linie mit BC parallel laufen, weil sonst die Ungereimtheit angenommen werden müßte, daß das Ganze gleich einem seiner Theile sey. Hieraus folgt also, daß keine andere Linie mit BC parallel laufen kann, als nur DE. Wenn also die Seiten eines Dreyeckes in proportionelle Stücke u.s.w.

Zusatz. Wenn wir also wissen, daß die zwey Seiten eines Dreyeckes durch eine gerade Linie so geschnitten sind, daß die Theile derselben sich verhalten, wie die ganzen geschnittenen Seiten: so muß diese Linie mit der Grundlinie parallel gehen.

§. 6.

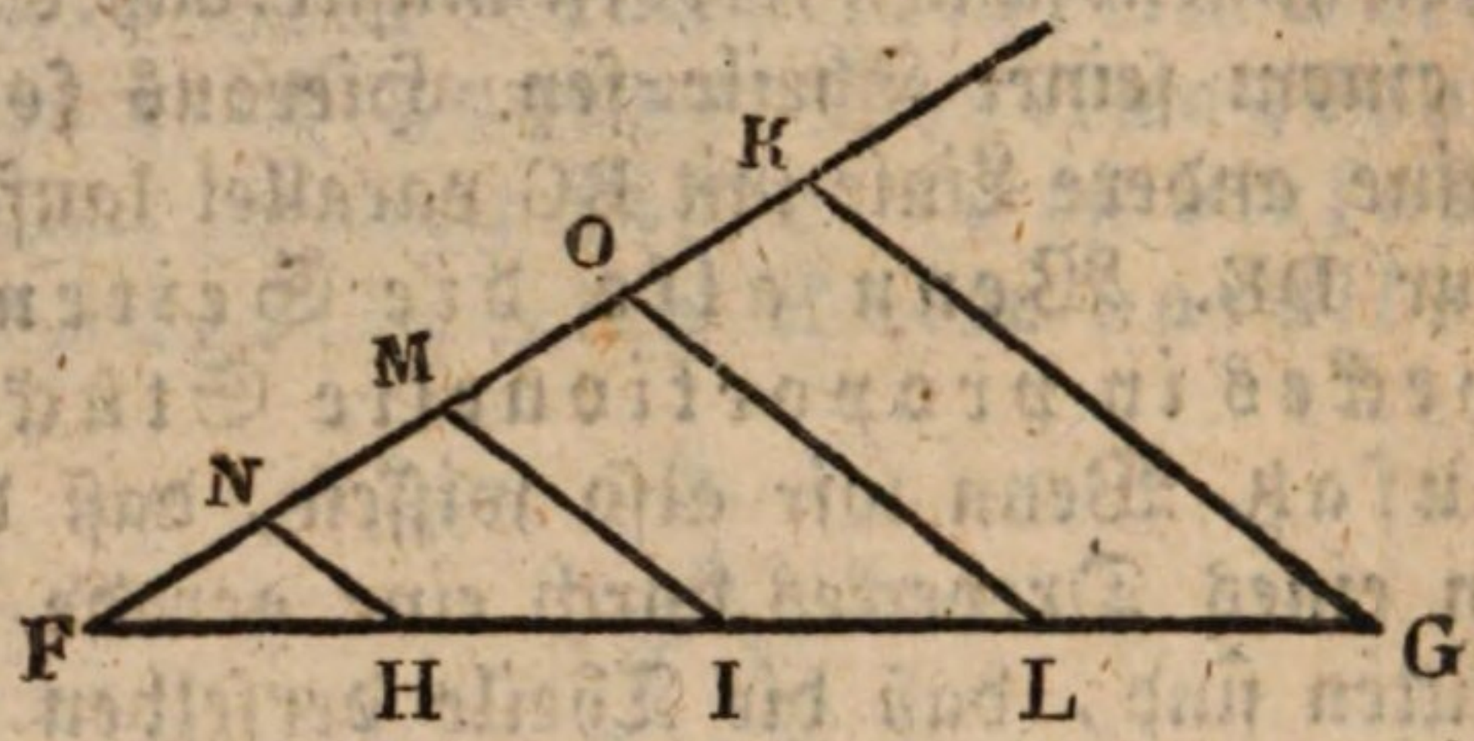
Aufgabe.

Eine gegebene Linie in eine Anzahl Theile zu theilen, deren Verhältniß gegen einander gegeben ist.

A_____B
C____
D_____
E_____

Auflösung. Die zu theilende Linie sey AB, und die Linien, nach deren Verhältniß sie getheilt werden soll, seyen, C, D und E. 1) Man ziehe nun eine gerade Linie von unbestimmter Länge, nähmlich FG. Auf diese trage man C, D und E auf, so, daß FH = C, HI = D, und IL = E ist. 2) An den Punct F bilde man einen Winkel von beliebiger Größe, nähmlich den $<$ KFG. 3) Man mache FK = AB,

und verbinde den Punct K mit G durch eine gerade Linie, durch KG. 4) Aus den Puncten L, I und H ziehe man zu KG Parallellinien LO, MI und NH, so sind FN, MO und OK die verlangten Stücke.



Beweis. NH, MI und OL laufen zu KG parallel; nun aber wenn man in einem Dreyecke zu einer Seite mehrere Parallellinien zieht, so stehen die dadurch abgeschnittenen Stücke der beyden andern Seiten in Proportion; folglich stehen FN und FH, NM und HI, MO und IL, OK und LG in Proportion. Da ferner FK = AB ist, so ist demnach nach diesem Verfahren AB in eine solche Anzahl von Theilen getheilt worden, deren Verhältniß gegeben wurde.

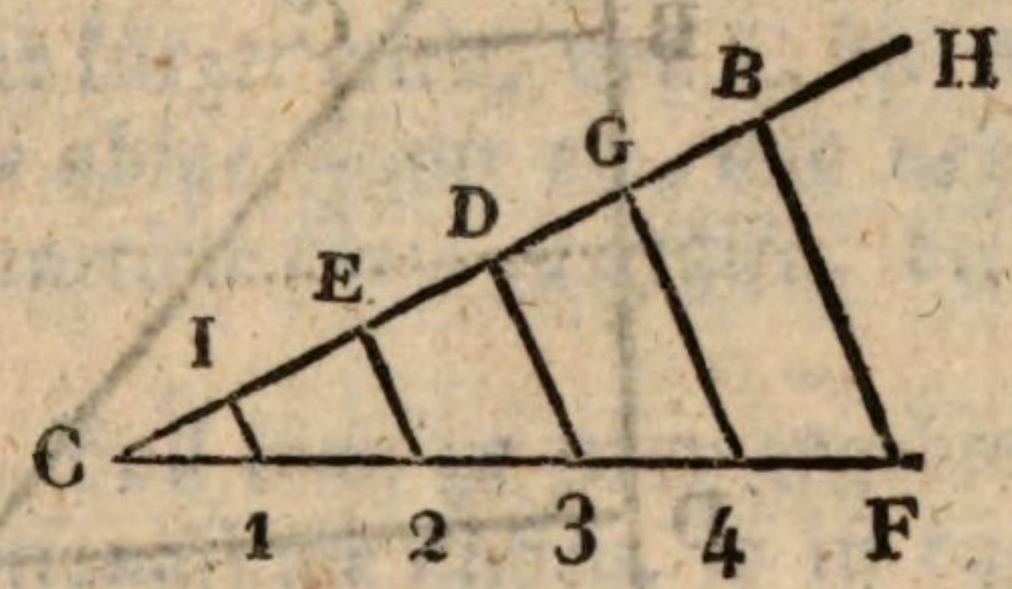
§. 7.

Aufgabe.

Eine gegebene gerade Linie in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Auflösung. Man ziehe eine gerade Linie von beliebiger Größe, und trage darauf so viele gleiche Theile, als die gegebene Linie haben soll. An dem einen Endpuncte der getheilten Linie errichte man einen Winkel von beliebiger Größe. Den obern Schenkel dieses Winkels mache man der gegebenen Linie gleich, und man verfahre übrigens, wie bey der

vorigen Aufgabe. Z. B. Es sey die gerade Linie A——————B gegeben, und man soll sie in fünf gleiche Theile theilen. Man ziehe die Linie CF, und theile sie in fünf gleiche beliebige Theile. An den Punct C errichte man den Winkel HCF. Auf den Schenkel CH trage man die gegebene Linie AB auf. Den Punct B als den Endpunct der aufgetragenen Linie AB verbinde man mit dem Puncte F durch eine gerade Linie, durch BF. Letztens ziehe man aus den Puncten 4, 3, 2 und 1 zu BF die Parallellinien 4G, 3D, 2E und 1I, so theilen diese die gegebene Linie AB in fünf gleiche Theile.



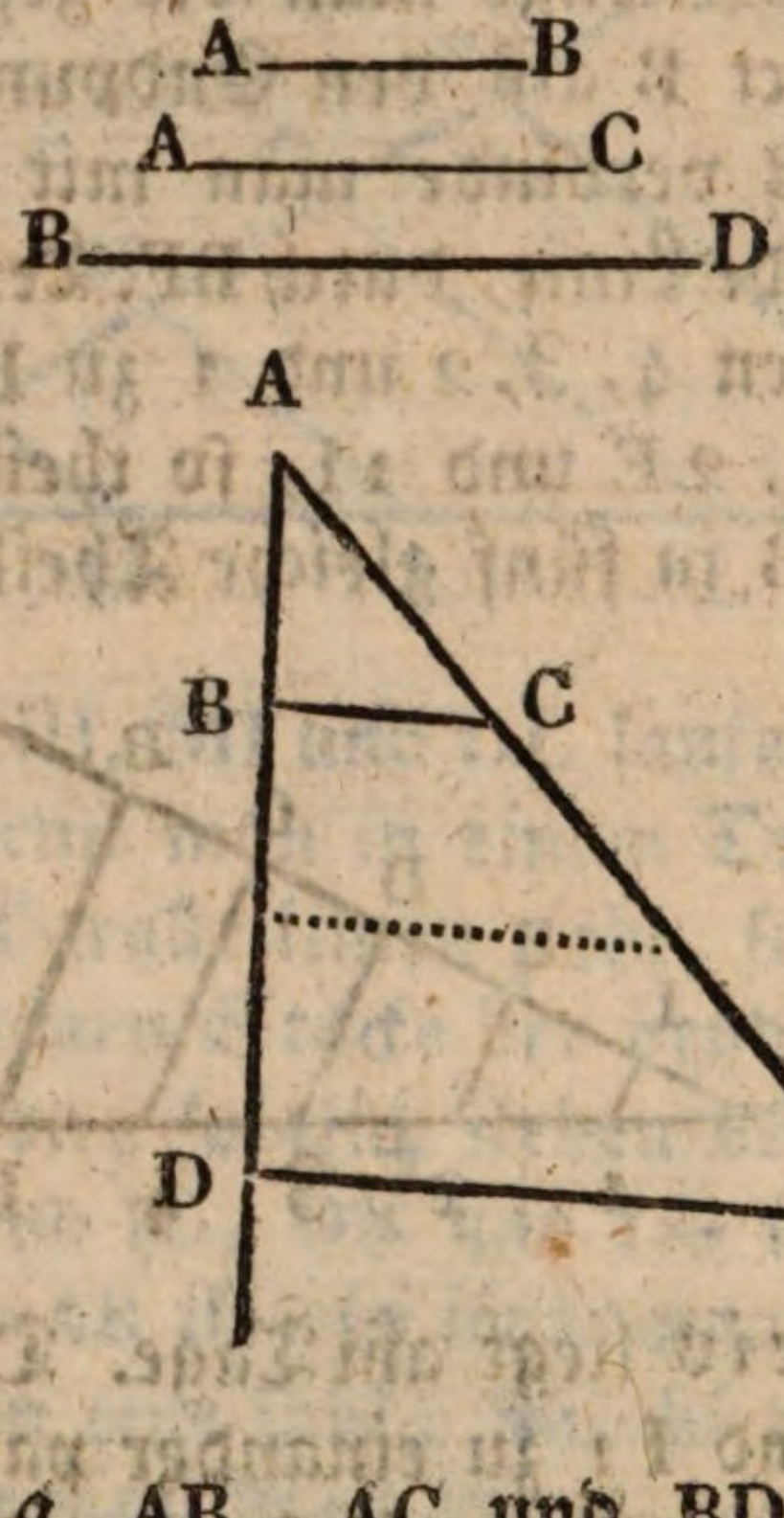
Der Beweis liegt am Tage. Da die Linien BF, G4, D3, E2 und I1 zu einander parallel laufen, so verhält sich CI zu CB, wie C1 zu CF; C1 ist aber der fünfte Theil von der Linie CF; also ist auch CI der fünfte Theil von der Linie CB u. s. w.

Zusatz. Wäre schon eine bereits eingetheilte Linie und eine ungetheilte gegeben, und man sollte die letztere nach eben derselben Proportion eintheilen, nach welcher die erstere eingetheilt worden ist; so müßte man an die schon eingetheilte Linie die ungetheilte unter einem beliebigen Winkel setzen, und übrigens, wie oben, verfahren.

§. 8.

Aufgabe.

Zu drey gegebenen Linien die vierte Proportionallinie zu suchen.



Auflösung. AB, AC und BD seyen die drey Linien, zu denen man die vierte Proportionallinie finden soll. Um dieses bewerkstelligen zu können, mache man einen beliebigen Winkel, dessen Schenkel von unbestimmter Länge sind. Auf diese (auf AD und AE) trage man von der Spitze des Winkels (A) die gegebenen Linien (AC und AC). Die zwey Endpuncte der aufgetragenen Linien (B und C) verbinde man durch eine Gerade (BC). Eben so trage man die dritte gegebene Linie (BD) von dem Endpuncte der einen schon aufgetragenen Linie auf den einen Schenkel des vorher gebildeten Winkels (von B bis D). Alsdann ziehe man aus dem Endpuncte der zuletzt aufgetragenen Linie (von D) zwischen den beyden

Schenkeln des Winkels zu der oben schon gezogenen Linie (BC) eine Parallellinie (DE), so wird die auf dem andern Schenkel des Winkels, auf dem nur eine gegebene Linie aufgetragen wurde, befindliche Linie (CE) die vierte Proportionallinie zu den drey gegebenen seyn.

Der Beweis beruht auf §. 3. Weil DE ∥ BC, so verhält sich AB : AC = BD : CE; folglich ist CE die vierte Proportionallinie zu AB, AC und BD.

Anmerkung. Man kann auch die dritte Linie BD aus dem Puncte A auf AD auftragen, wodurch man ein kleineres Dreyeck erhält und die Linie CE wird deßwegen nicht kleiner, weil sie dann, um was sie von C herab kürzer wird, von C bis A länger wird.

Man sehe obige Figur an, und nehme die darin befindliche punctirte Linie zu Hülfe, die das Gesagte aufkläret.

Zusatz. Soll man zu zwey gegebenen Linien die dritte Proportionallinie finden, so ist das Verfahren, wie oben, nur mit dem Unterschiede, daß man die zweyte Linie zwey Mahl auf die zwey Schenkel des nach Belieben gebildeten Winkels auftragt.

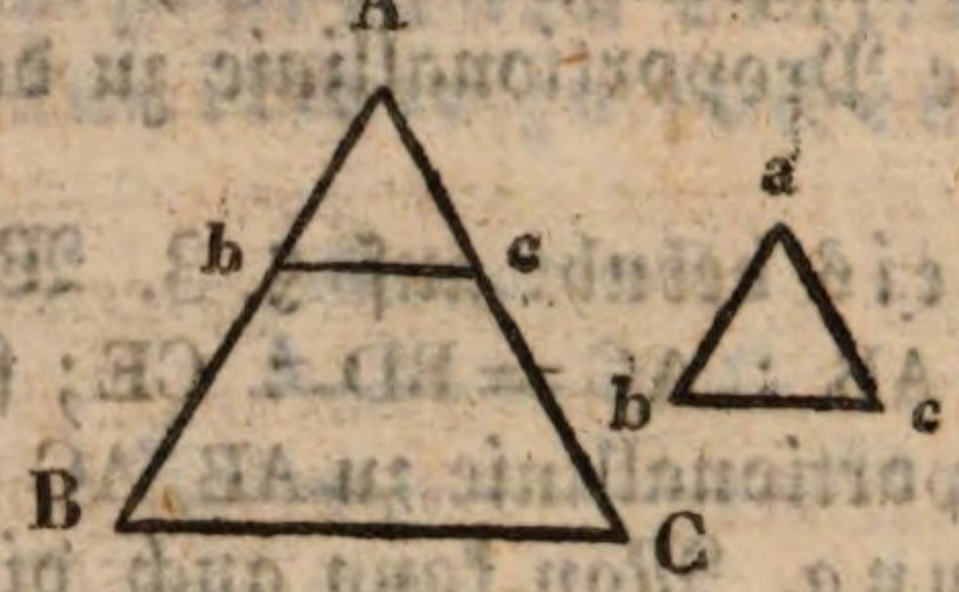
§. 9.

Lehrsatz.

Zwey Dreyecke, in denen zwey Winkel gleich sind, sind einander ähnlich.

Beweis. Wenn in zwey Dreyecken zwey Winkel gleich sind, so muß auch der dritte Winkel dem dritten gleich seyn; weil alle drey Winkel eines jeden Dreyeckes 180° betragen (sechst. Absch. §. 7. 4. Zus.). Es muß aber noch gezeigt werden, daß unter diesen Umständen auch die gleichliegenden Seiten mit ein-

ander in Proportion stehen, alsdann folgt, daß die Dreyecke ähnlich sind.



Dieß wird so bewiesen: Wenn wir das kleinere Dreyeck abc, das dem größern ABC ähnlich seyn soll, und in dem der Winkel a = A, der Winkel c = C, und folglich auch b = B ist, so auf das andere ABC lege, daß zwey gleiche Winkel, z. B. a und A zusammen fallen, so ist die Seite bc zu BC parallel, weil der ∠ b = ∠ B ist (sechst. Absch. §. 3. 3. Lehrs.); folglich ab : ac = AB : BC (§. 3.), und ab : bc = AB : BC, und bc : ac = BC : AC; folglich stehen die gleichliegenden Seiten in Proportion; wenn also in zwey Dreyecken zwey Winkel gleich sind, so u. s. w.

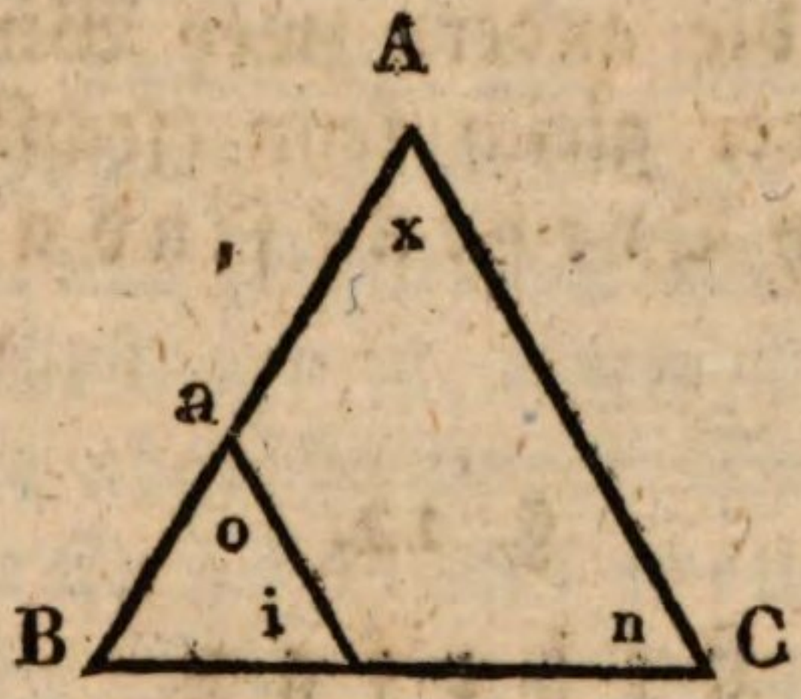
1. Zusatz. Aus dem Gesagten folgt, daß in zwey ähnlichen Dreyecken gleichen Winkeln proportionirte Seiten, und diesen gleiche Winkel gegenüber stehen.

2. Zusatz. Wenn also in einem Dreyecke eine Linie zu der andern gegenüber stehenden parallel gezogen wird, so entstehen (man sehe obige Figur ABC an) zwey Dreyecke, die einander ähnlich sind; weil alsdann alle drey Winkel von beyden Dreyecken einander gleich sind; folglich stehen auch die Seiten mit einander in Proportion.

§. 10.
Lehrsatz.

Wenn in zwey Dreyecken alle gleichliegenden Seiten in Proportion sind, so sind die Dreyecke ähnlich.

Beweis. Man hat bloß zu zeigen, daß unter diesen Umständen, wenn alle Seiten zweyer Dreyecke in Proportion stehen, alle drey Winkel gleich seyn müssen; alsdann folgt unmittelbar, daß die beyden Dreyecke ähnlich sind.



c

Dieß wird so bewiesen: Wenn wir das kleinere Dreyeck Bac so auf das größere BAC legen, daß ein Scheitelpunct des einen mit dem Scheitelpuncte B des andern zusammen fällt, so wird die dritte Seite des kleinern Dreyeckes ac mit der dritten AC des größern parallel laufen (nach §. 5.); folglich muß o = x und i = n seyn (sechst. Absch. §. 3. 3. Lehrs.); wenn aber in zwey Dreyecken zwey Winkel gleich sind, so sind sie einander ähnlich (§. 9.); folglich wenn in zwey Dreyecken alle gleichliegenden Seiten in Proportion sind, so u.s.w.

§. 11.
Lehrsatz.

Zwey Dreyecke sind ähnlich, wenn in

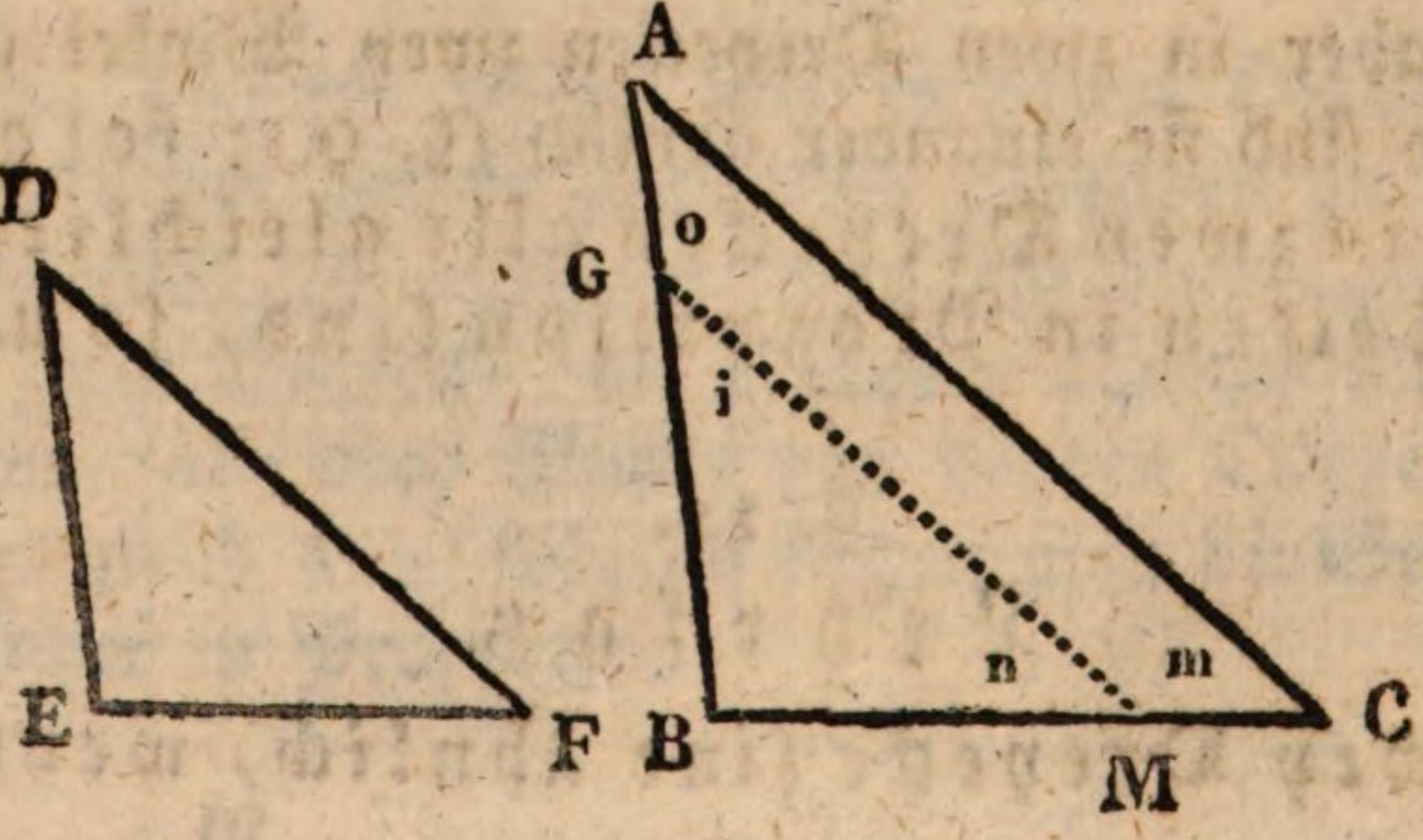
ihnen zwey Seiten in Proportion, und die von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel gleich sind.

Beweis. Wenn wir das kleinere Dreyeck so in das größere legen, daß die zwey Seiten, die den gleichen Winkel einschließen, auf einander zu liegen kommen, so muß die dritte Seite des kleinern Dreyecks mit der dritten des größern parallel laufen, weil die anliegenden Stücke in Proportion stehen (§. 5.); folglich muß auch die dritte Seite des einen mit der dritten des andern Dreyeckes im Verhältnisse stehen, und überdieß müssen die andern zwey Winkel in beyden Dreyecken einander gleich seyn (sechst. Abschn. §. 3. 3. Lehrs.). Zwey Dreyecke sind also ähnlich, wenn u. s. w.

§. 12.

Lehrsatz.

Zwey Dreyecke sind ähnlich, wenn sie einen gleichen Winkel haben, und zwey und zwey Seiten von beyden Dreyecken, welche den gleichen Winkel nicht einschließen, in Proportion stehen, die den gleichen Winkeln gegenüber stehende Seiten aber größer, als die anliegenden sind.



Beweis. Es sey der Winkel B = E, und BA : AC = ED : DF, aber AC > AB, und DF > ED. Man mache BG = DE, und ziehe GM ∦ AC, so wird das Dreyeck GBM = DEF seyn; denn der Winkel B = E, und GB = DE, und weil ED : DF = BA : AC; folglich muß DF zu AC parallel laufen, wenn man das △ DEF in ABC hineinconstruirt; nun lauft GM ∦ AC; folglich muß auch GM = DF seyn; lege ich nun beyde, nähmlich DEF und GBM auf einander, so werden sie sich decken; also ist GBM = DEF. Jetzt läßt sich leicht beweisen, daß GBM ∽ ABC, weil GM ∦ AC, so muß der ∠ i = ∠ o, und n = m seyn (sechster Absch. §. 3. 3. Lehrs.); folglich sind alle drey Winkel einander gleich, und ferner muß BM : MG = BC : CA, weil die Parallellinien in einem Dreyecke sich verhalten, wie die abgeschnittenen Stücke. Also sind zwey Dreyecke ähnlich, wenn u. s. w.

1. Zusatz. Zwey rechtwinkligte Dreyecke sind ähnlich, wenn in ihnen die Hypothenusen und ein Paar Catheten in Proportion stehen.

2. Zusatz. Zwey stumpfwinkligte Dreyecke sind ähnlich, wenn in ihnen die stumpfen Winkel gleich sind, und eine an den stumpfen Winkel liegende, und eine ihm gegenüber stehende Seite in Proportion stehen.

Anmerkung. Die §. 9., 10., 11. und 12. vorgetragenen Sätze bestimmen vier Fälle, in welchen wir auf die Aehnlichkeit der Dreyecke schließen können, nähmlich:

1) Wenn die Dreyecke zwey oder drey gleiche Winkel haben.

2) Wenn sie lauter verhältnißmäßige Seiten haben.

3) Wenn in ihnen ein gleicher Winkel, und zwey proportionirte Seiten vorkommen.

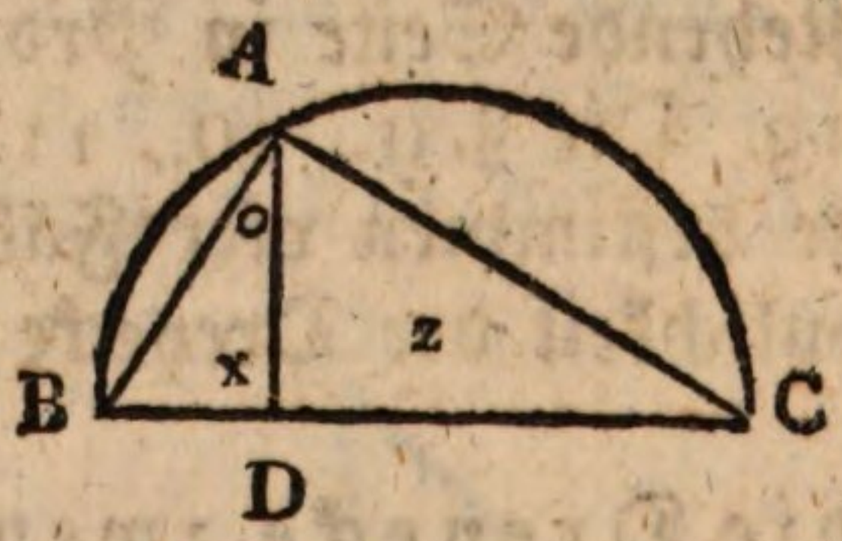
4) Wenn sie einen gleichen Winkel haben, und zwey und zwey Seiten von beyden Dreyecken, welche den gleichen Winkel nicht einschließen, in Proportion stehen, die den gleichen Winkeln gegenüber stehende Seiten aber größer, als die anliegenden sind.

Dieß sind die vier Kennzeichen von der Aehnlichkeit der Dreyecke.

§. 13.

Lehrsatz.

Wenn man in einem rechtwinkligten Dreyecke aus der Spitze des rechten Winkels eine senkrechte Linie auf die Hypothenuse fällt, so wird das Dreyeck in zwey andere getheilt, die unter sich und dem ganzen Dreyecke ähnlich sind; auch ist die senkrechte Linie die mittlere Proportionallinie zwischen den beyden Theilen der Hypothenuse.



Erläuterung und Beweis. Aus der Spitze des rechten Winkels A ist auf die Hypothenuse die senkrechte Linie AD gefällt worden, welche das Dreyeck BAC in die zwey Dreyecke x und z theilt. Beyde diese Dreyecke sollen nach Aussage des Lehrsatzes unter sich

und dem ganzen Dreyecke ähnlich seyn. Dieß wird so bewiesen:

Das Dreyeck x und das ganze Dreyeck BAC haben mit einander den Winkel B gemein, der sich selbst gleich ist; überdieß kommt im Dreyecke x bey D, da AD senkrecht gezogen ist, ein rechter Winkel vor, und im ganzen Dreyecke BAC ist bey A ein rechter Winkel; folglich haben beyde diese Dreyecke x und BAC zwey gleiche Winkel; also sind sie einander ähnlich (§. 9.). Auf gleiche Weise erhellet, daß das Dreyeck z dem ganzen Dreyecke BAC ähnlich ist, weil der Winkel C beyden Dreyecken gemeinschaftlich ist, und weil in beyden zwey rechte bey D und A vorkommen. Da nun die beyden Dreyecke x und z dem ganzen Dreyecke BAC, also dem nähmlichen dritten ähnlich sind, so sind sie also auch unter einander ähnlich.

Nun soll aber nach AD die mittlere Proportionallinie zwischen BD und DC seyn. Dieses folgt unmittelbar aus der Aehnlichkeit der zwey Dreyecke x und z; denn BD : AD = AD : DC; folglich u. s. w.

§. 14.

Lehrsatz.

Eine senkrechte Linie auf den Durchmesser eines Kreises errichtet, und bis an die Peripherie verlängert, ist die mittlere Proportionallinie zwischen den beyden Stücken des Durchmessers.

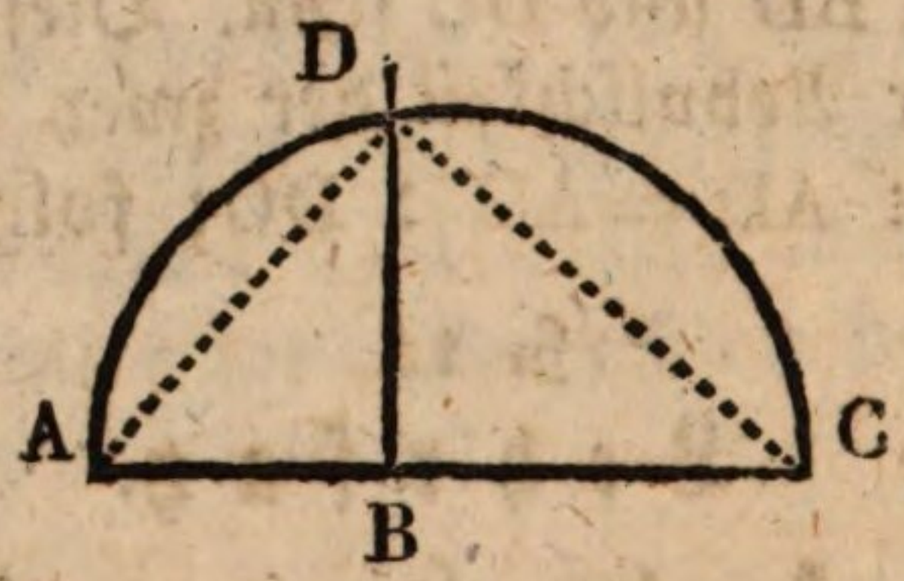
Beweis. Man ziehe von dem Puncte der Peripherie, wo die senkrechte sie trifft, Sehnen an die Endpuncte des Durchmessers, so erhält man ein rechtwinkligtes Dreyeck, in dem der Durchmesser die Hypothenuse ist; folglich ist (nach §. 13.) die senkrechte Linie die mittlere Proportionallinie zwischen den beyden Stücken des Durchmessers. Also u. s. w.

§. 15.

Aufgabe.

Zwischen zwey gegebenen Linien die mittlere Proportionallinie zu finden.

Auflösung. Es seyen die zwey Linien A——B B——C gegeben, zu denen man die mittlere Proportionallinie finden soll. Um dieses bewerkstelligen zu können, so verbinde man beyde diese Linien in eine, doch so, daß man sich den Trennungspunct merkt. Auf diesen Punct errichte man eine senkrechte Linie von beliebiger Größe. Alsdann halbire man die gerade Linie, auf der die senkrechte steht, und beschreibe darum einen halben Kreis, so ist die abgeschnittene senkrechte Linie (nach §. 14.) BD die mittlere Proportionallinie zu den zwey gegebenen Linien AB und BC.



Beweis. Man ziehe die Hülfslinien AD und DC (nach §. 14.). Die zwey Dreyecke ADB und DBC sind einander ähnlich (nach §. 13.); folglich

AB : BD = BD : BC.

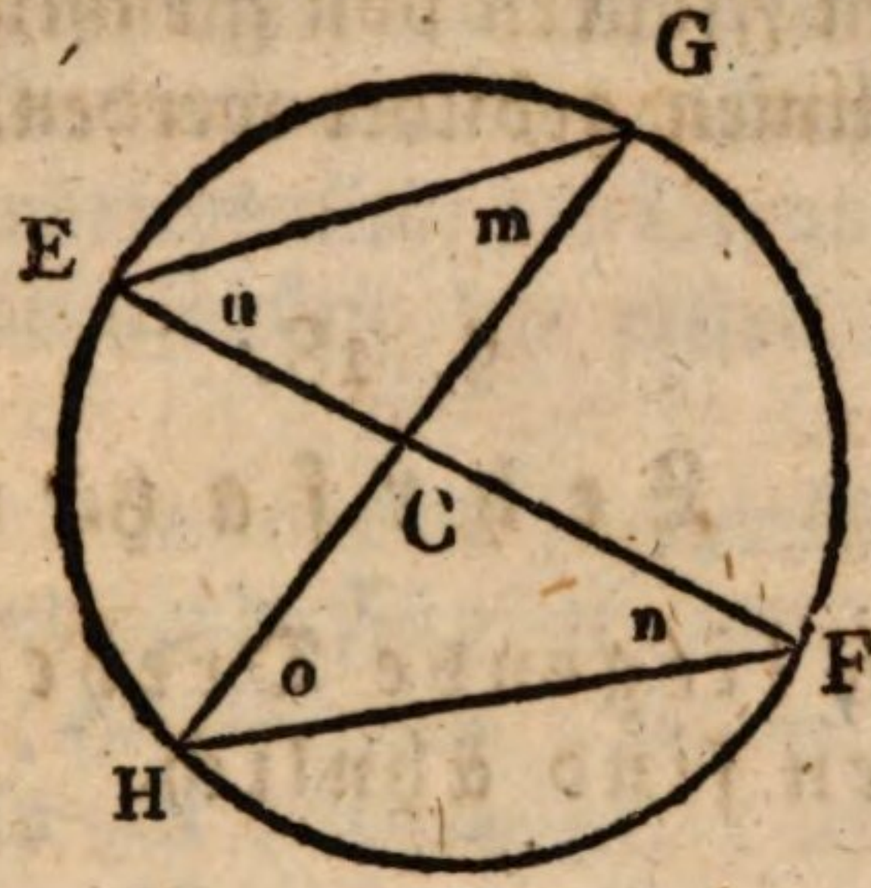
BD ist also die mittlere Proportionallinie zu AB und BC.

§. 16.

Lehrsatz.

Wenn zwey Sehnen eines Kreises einander schneiden, so sind die Stücke der

einen geschnittenen Seite die äußern, und die Stücke der andern Seite die mittlern Glieder in einer geometrischen Proportion.



Beweis. Die zwey Sehnen EF und GH befinden sich in einem Kreise, und schneiden sich in dem Puncte C. Es sollen nun dem Lehrsatze zufolge zwey Theile der einen Sehne, z. B. GC und CH die äußern, und die andern zwey Stücke EC, und CF die innern Glieder einer geometrischen Proportion ausmachen. Um dieß beweisen zu können, verbinde man die Endpuncte der Sehnen, nähmlich die Puncte E und G, und dann H und F. Auf diese Art erhält man zwey Dreyecke EGC und HCF, die einander ähnlich sind; denn es finden sich in beyden Dreyecken zwey gleiche Winkel, nähmlich $\angle o = \angle u$, und $\angle n = \angle m$, weil sie auf gleichen Bögen stehen, o und u haben den Bogen GF, und m und n den Bogen EH zu ihrem Maße; also HC : CE = CF : CG; nun sind HC und CG die Stücke der einen Sehne, und machen die äußern Glieder der Proportion aus, und CE und CF sind die Stücke der andern Sehne, und machen die mittlern Glieder der Proportion aus; folglich u. s. w.

§. 17.

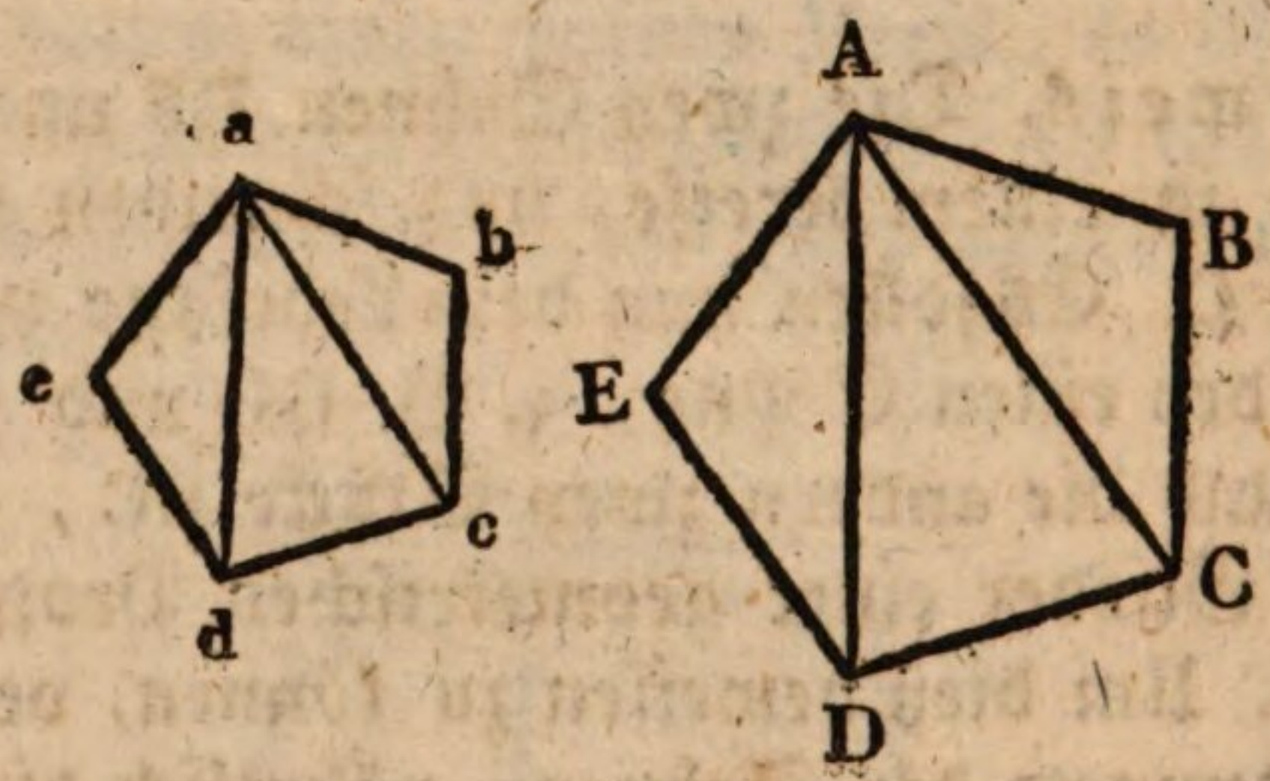
Erklärung.

Aehnlich liegende Dreyecke sind solche, die in ähnlichen Figuren von gleichliegenden Seiten, und Diagonallinien gebildet werden.

§. 18.

Lehrsatz.

Aehnlich liegende Dreyecke in ähnlichen Figuren sind ähnlich.



Erläuterung und Beweis. Wenn man ähnliche Figuren durch Diagonallinien theilt, so bekömmt man so viele Dreyecke, als die Figuren Seiten haben, weniger zwey. So sind die beygezeichneten zwey ähnliche Fünfecke in drey Dreyecke getheilt. Man erhält durch die Theilung ähnlicher Figuren vermittelst der Diagonallinien zweyerley Arten Dreyecke; eine Art hat zwey Seiten der Figur und eine Diagonale, wie ABC, AED, und abc und aed; ihre Aehnlichkeit ergibt sich aus dem Lehrsatze: Wenn in zwey Dreyecken zwey Seiten des einen mit den zwey Seiten des andern in Proportion stehen, und überdieß der beyderseitige eingeschlossene Winkel gleich ist, so sind

sie einander ähnlich, und eine andere Art von Dreyecken entsteht, bey denen entweder zwey Seiten oder gar drey Seiten Diagonallinien sind, wie ADC und abc; ihre Aehnlichkeit ergibt sich aus dem Lehrsatze: Wenn in zwey Dreyecken alle gleichliegenden Seiten in Proportion sind, so sind die Dreyecke einander ähnlich; die Proportionalität der Diagonallinien aber wird aus der Aehnlichkeit der ersten Art Dreyecke geschlossen.

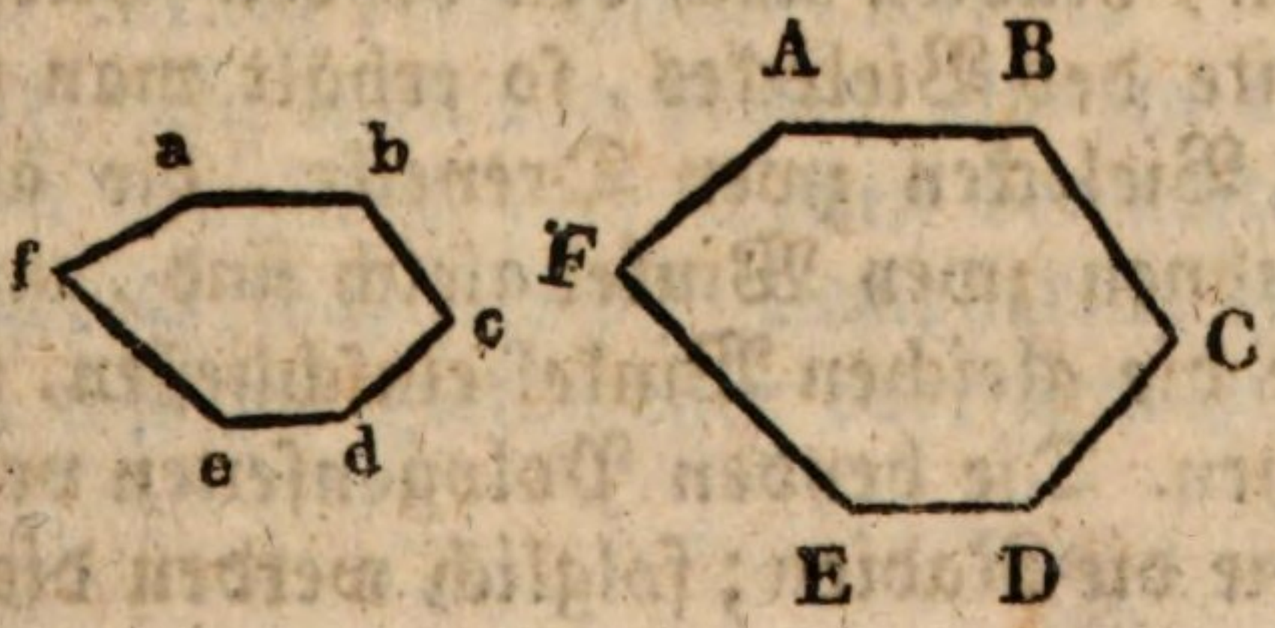
Das △ ABC ∽ abc wird so bewiesen: Nach der Voraussetzung sind beyde Fünfecke ABCDE und abcde einander ähnlich; folglich AB : BC = ab : bc, und ∠B = ∠b; also AB : ab = AC : ac (§. 11.). Aus ähnlichen Gründen ist auch △ AED ∽ aed; folglich AE : ae = AD : ad. Nun ist AF : ae = AB : ab, also AC : ac = AD : ad; da ferner AE : ae = DC : dc, so ist AD : ad = DC : dc; also auch AC : ac = DE : de; d.h. △ ADC ∽ △ acd.

Zusatz. Gleichliegende Diagonallinien in ähnlichen Figuren verhalten sich also, wie gleichliegende Seiten.

§. 19.

Lehrsatz.

Die ganzen Peripherien (Umfange) ähnlicher Figuren verhalten sich zu einander, wie was immer für ähnlich liegende Seiten, oder Diagonalen.



Es seyen ABCDEF und abcdef zwey ähnliche Figuren. Dieß vorausgesetzt ist AB : ab = BC : bc = CD : cd = DE : de = EF : ef = FA : fa. Dieß ist eine Reihe von lauter gleichen Verhältnissen. Nun aber ist in was immer für einer Reihe gleicher Verhältnisse, die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder, wie was immer für ein Vorderglied zu seinem Hintergliede; es ist also AB + BC + CD + DE + EF + FA (d. i. der Umfang der 1. Figur) zu ab + bc + cd + de + ef + fa (d. i. zum Umfange der 2. Figur), wie AB zu ab, oder wie BC zu bc, oder wie CD zu cd u. s. w.; folglich verhalten sich die ganzen Peripherien ähnlicher Figuren, wie was immer für ähnlich liegende Seiten.

Daß sich die Peripherien ähnlicher Figuren auch wie die gleichliegenden Diagonalen verhalten, ergibt sich aus §. 18. Zusatz.

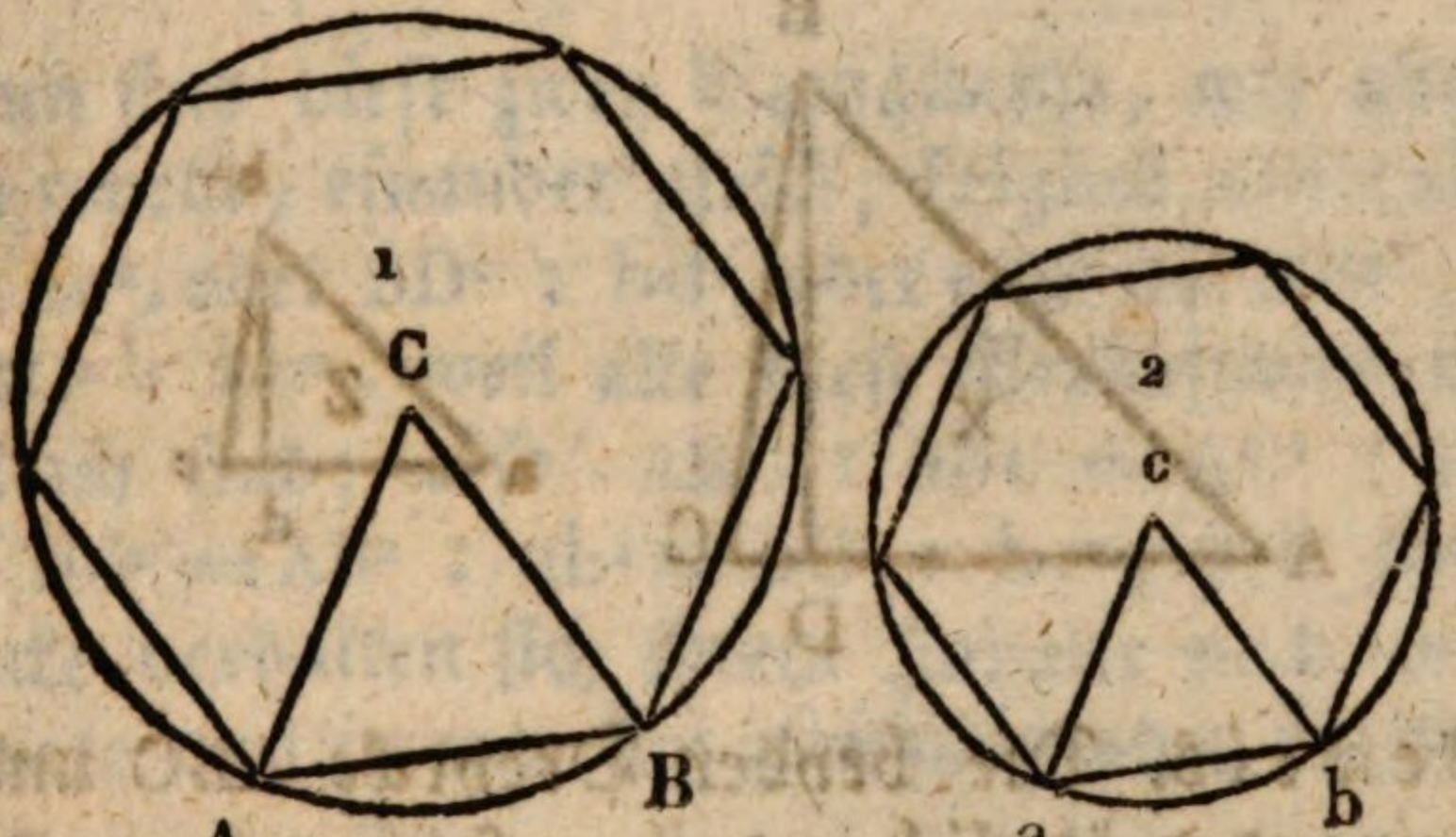
§. 20.

Lehrsatz.

Die Seiten und auch die Peripherien regulärer Vielecke verhalten sich, wie die Halbmesser oder Durchmesser der darum beschriebenen Kreise.

Beweis. Man ziehe aus dem Mittelpuncte des Kreises, der um jedes Vieleck beschrieben werden kann, Radien nach den beyden Endpuncten einer Seite des Vieleckes, so erhält man in zwey regulären Vielecken zwey Dreyecke, die ähnlich sind, weil in ihnen zwey Winkel gleich sind, und die Seiten, die die gleichen Winkel einschließen, in Proportion stehen. Die beyden Polygonseiten verhalten sich also, wie die Radien; folglich werden die Polygon-

seiten so viel Mahl genommen, als das Vieleck Seiten hat, sich auch verhalten, wie die Radien, d. h. die Peripherien regulärer Vielecke verhalten sich wie die Radien, und also auch wie die Durchmesser der darum beschriebenen Kreise; indem die Radien die Hälften der Durchmesser sind.



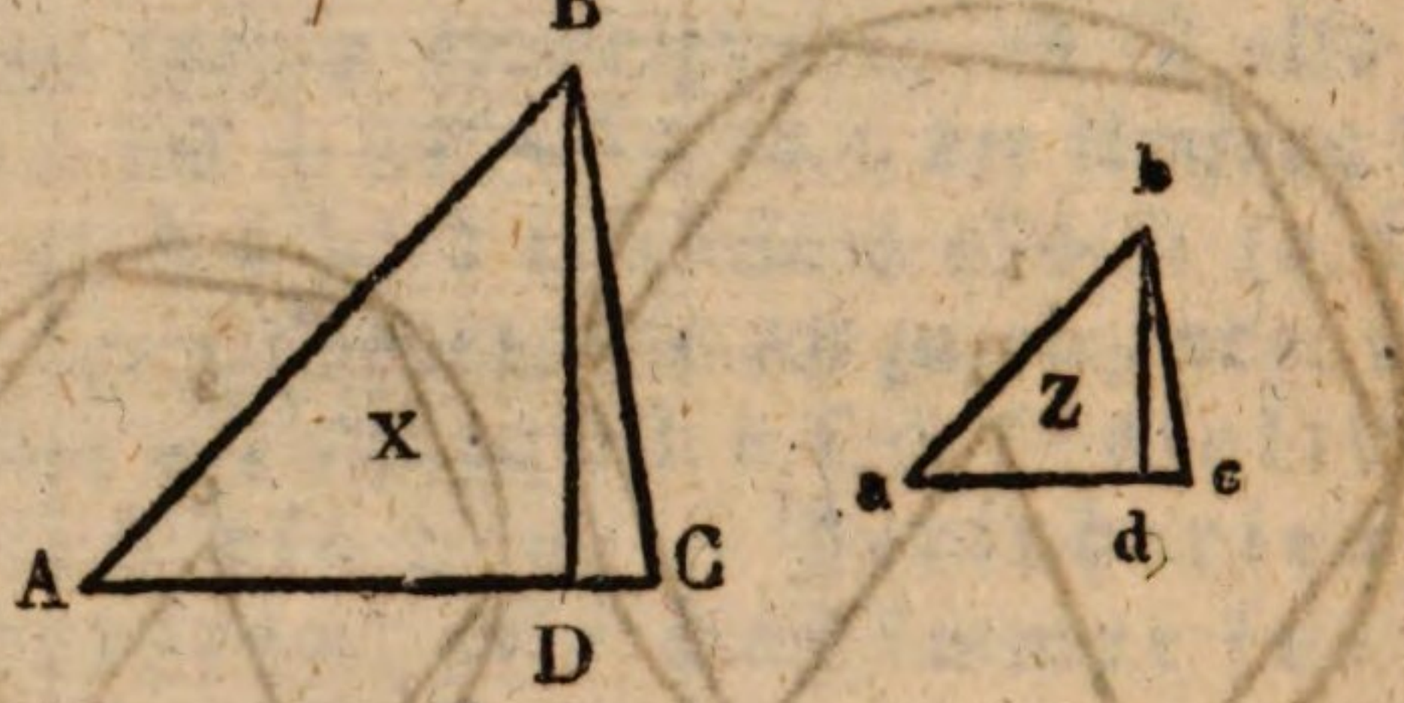
Wenn die zwey hier beygezeichneten, im Kreise beschriebenen Vielecke ähnlich sind, wie vorausgesetzt wird, so muß △ABC ∽ △abc seyn; denn ACB = acb als Centriwinkel von gleichnahmigen Polygonen, und da AC = BC als Radien von 1, und ac = cb als Radien von 2, also AC : BC = ac : bc; folglich ist AB : ab = BC : bc. Beyde ähnlichen Figuren seyen n Ecke; so ergibt sich aus der vorigen Proportion n. AB : n. ab = BC : bc; d. h. die Peripherien der ähnlichen Figuren verhalten sich wie die Radien der darum beschriebenen Kreise.

Zusatz. Da man den Kreis als ein reguläres Vieleck von unendlich viel Seiten betrachten kann, so folgt daraus, daß sich die Peripherien der Kreise verhalten, wie die Halbmesser oder Durchmesser.

§. 21.

Lehrsatz.

Aehnliche Dreyecke verhalten sich ihrem Inhalte nach, wie die Quadrate was immer für gleichliegender Seiten.



Beweis. Die beyden Dreyecke ABC und abc seyen einander ähnlich und ihre Höhen seyen BD und bd. Nun soll bewiesen werden, daß sie sich zu einander verhalten, wie die Quadrate zweyer gleichliegender Seiten. Dieß wird so bewiesen:

Die Dreyecke ABD und abd sind einander ähnlich; denn in beyden Dreyecken finden sich zwey gleiche Winkel, der $< A = < a$, und bey D und d sind zwey rechte Winkel, die auch einander gleich sind (§. 9.); also

AB : ab = BD : bd, nun aber ist

AB : ab = AC : ac; folglich

BD : bd = AC : ac (Arith. sechst. Absch. 168. 3. Zusatz).

Der Inhalt des Dreyeckes ABC ist gleich $\frac{AC \times BD}{2}$;

der Inhalt des Dreyeckes abc ist gleich $\frac{ac \times bd}{2}$; also

$$ABC : abc = \frac{AC \times BD}{2} : \frac{ac \times bd}{2}, \text{ oder}$$

BBC : abc = AC × BD : ac × bd (Arithm. §. 184. VII.); es hat also das Dreyeck ABC zum Dreyecke abc ein zusammengesetztes Verhältniß, das aus folgenden Verhältnissen besteht:

AC : ac
BD : bd

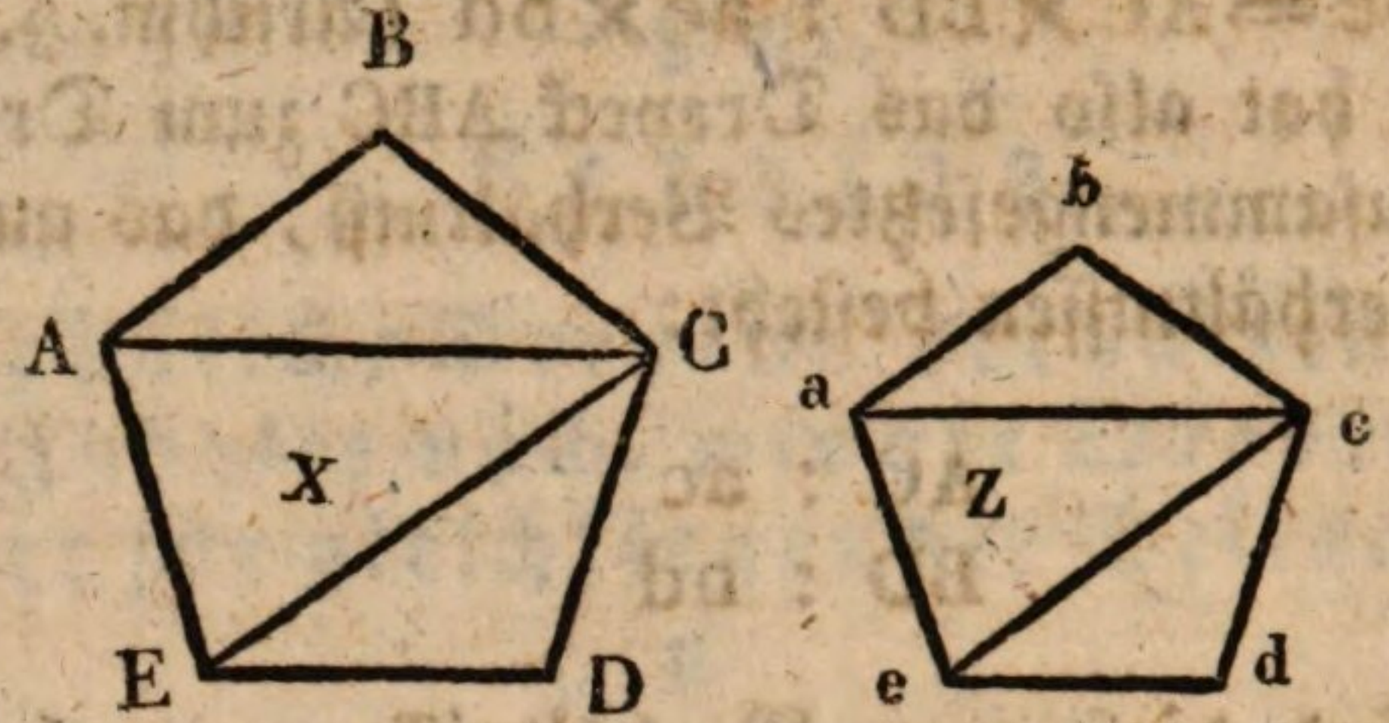
Nun sind diese zwey Verhältnisse, wie oben bewiesen wurde, einander gleich; folglich ABC : abc = $AC^2 : ac^2$, oder $BD^2 : bd^2$, oder auch wie $AB^2 : ab^2$, oder $BC^2 : bc^2$, weil alle diese Verhältnisse einander gleich sind; also ABC : abc = $AC^2 : ac^2 = BD^2 : bd^2 = AB^2 : ab^2 = BC^2 : bc^2$, d. i. ähnliche Dreyecke verhalten sich ihrem Inhalte nach, wie die Quadrate was immer für gleichliegender Seiten.

§. 22.

Lehrsatz.

Aehnliche geradlinigte Figuren verhalten sich, wie die Quadrate gleichliegender Seiten oder Diagonallinien.

Anleitung zum Beweise. Man theile die Figuren durch gleichliegende Diagonalen in Dreyecke. Jedes Paar dieser Dreyecke wird sich nach dem vorigen Paragraph verhalten, wie die Quadrate gleichliegender Seiten. Nun wird man leicht das Verhältniß aller Paare dieser Dreyecke auf die Quadrate zweyer gleichliegender Seiten, oder Diagonalen zurückführen können (nach §. 17.); alle Dreyecke zusammen genommen aber geben den Inhalt der ganzen Figur, und also gilt von dem Verhältnisse der ganzen Figuren, was von dem Verhältnisse der einzelnen Dreyecke gilt, aus denen sie bestehen.



Es seyen ABCDE und abcde ähnliche Figuren. Man theile sie durch gleichliegende Diagonallinien, nähmlich durch AC und ac, EC und ec in Dreyecke. Weil nun beyde Figuren einander ähnlich sind, so ist AB : ab = AE : ae = ED : ed; folglich ist auch $AB^2 : ad^2 = AE^2 : ae^2 = ED^2 : ed^2$ (Arithm. §. 184. VIII.). Nun sind die ganzen Figuren durch gleichliegende Diagonalen in lauter ähnliche Dreyecke getheilt. Weil sich ähnliche Dreyecke verhalten, wie die Quadrate gleichliegender Seiten (§. 21.), so ist

$ABC : abc = AB^2 : ab^2$

$ACE : aca = AE^2 : ae^2 = AB^2 : ab^2$

$ECD : ecd = ED^2 : ed^2 = AB^2 : ab^2$; folglich

ABC : abc = ACE : ace = ECD : ecd; denn wenn zwey Verhältnisse einem dritten gleich sind, so sind sie auch unter sich gleich; folglich verhält sich ABC + ACE + ECD, oder die Fläche der ganzen Figur X zu abc + aed + ecd, oder zur Fläche der ganzen Figur Z wie BAC zu bac, oder wie AB^2 zu $ab^2 = AE^2 : ae^2$ u. s. w. Aehnliche geradlinigte Figuren verhalten sich also wie u. s. w.

§. 23.

Lehrsatz.

Reguläre Figuren von gleicher Seitenanzahl verhalten sich, wie die Qua-

drate der Halbmesser der darum beschriebenen Kreise.

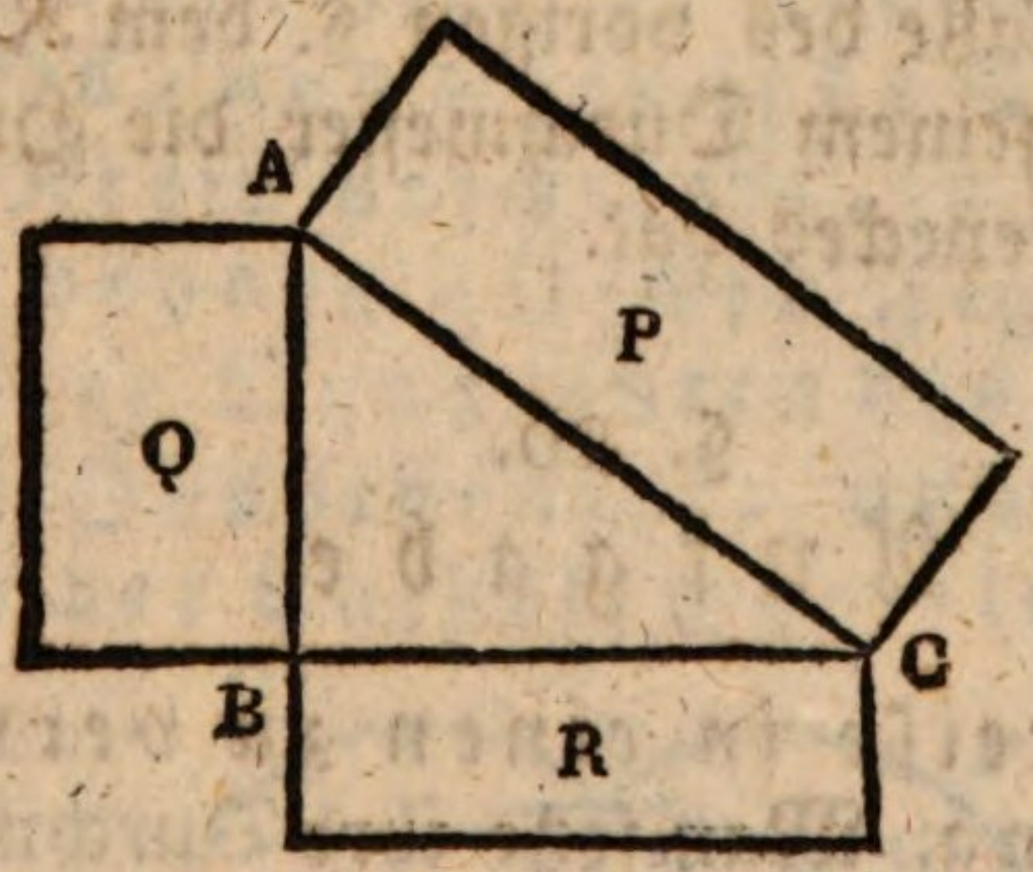
Beweis. Reguläre Figuren von gleicher Seitenanzahl sind einander ähnlich, nach dem vorigen Paragraph verhalten sie sich also, wie die Quadrate ihrer Seiten, und diese verhalten sich nach §. 20., wie die Quadrate der Halbmesser der darum beschriebenen Kreise; folglich u. s. w.

Zusatz. Da alle Kreise, und auch ihre Radien einander ähnlich sind, so verhalten sich ihre Kreisflächen zu einander, wie die Quadrate ihrer Halbmesser oder Durchmesser.

§. 24.

Lehrsatz.

In jedem rechtwinkligten Dreyecke (ABC) ist die Figur auf der Hypothenuse (AB) den ihr ähnlichen Figuren auf den beyden Catheten (AB und BC) zusammen gleich.



Beweis. Das rechtwinkligte Dreyeck sey ABC, die über AC beschriebene Figur heiße P, die über AB beschriebene Q, und die über BC beschriebene R. Nun soll bewiesen werden, daß $Q + R = P$.

$Q : R = AB^2 : BC^2$, weil sie ähnlich sind (§. 22.).
$Q + R : R = AB^2 + BC^2 : BC^2$ (Arith. 184. V. 1.)
$P : R = AC^2 : BC^2$
$Q + R : P = AB^2 + BC^2 : AC^2$
nun ist $AC^2 = AB^2 + BC^2$; also muß auch $Q + R = P$ seyn; in jedem rechtwinkligten Dreyecke ist also u. s. w.

§. 25.

Lehrsatz.

Die beyden Kreise, die zu ihren Durchmessern die Catheten eines rechtwinkligten Dreyeckes haben, sind zusammen genommen dem Kreise gleich, der zu seinem Durchmesser die Hypothenuse eben dieses Dreyeckes hat.

Beweis. Jeder Kreis ist als ein reguläres Vieleck von unendlich viel Seiten zu betrachten, wenn also zwey Kreise zu ihren Durchmessern die Catheten eines rechtwinkligten Dreyeckes haben, so müssen sie nach dem Lehrsatze des vorigen §. dem Kreise gleich seyn, der zu seinem Durchmesser die Hypothenuse eben dieses Dreyeckes hat.

§. 26.

Aufgabe.

Zwey Kreise in einen zu verwandeln.

Auflösung. Man setze ihre Durchmesser so zusammen, daß sie mit einander einen rechten Winkel bilden, und verbinde ihre Endpuncte durch eine gerade Linie, so ist diese als die Hypothenuse nach dem vorigen §. der Durchmesser des Kreises, der den zwey gegebenen gleich ist.

Zusatz. Soll man drey oder mehrere Kreise in einen verwandeln, so verwandle man auf die eben gezeigte Weise zwey in einen, setze zu diesem den dritten hinzu, und verwandle beyde in einen u. s. w.

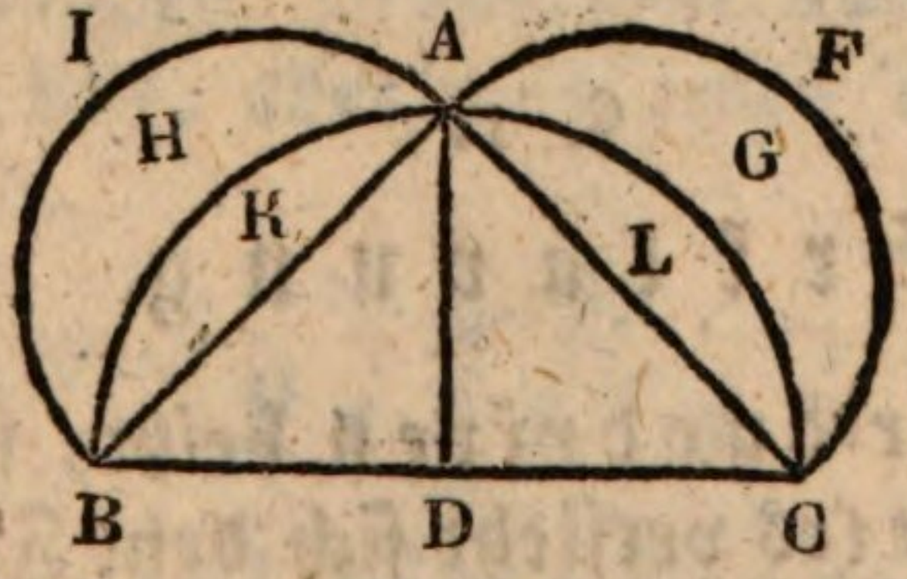
§. 27.
Aufgabe.

Einen Kreis zu machen, der der Differenz von zwey gegebenen Kreisen gleich ist.

Auflösung. Man bilde einen rechten Winkel, und verfahre übrigens nach (acht. Absch. §. 14.), nur mit dem Unterschiede, daß man statt der dort genommenen Seiten der Quadrate hier die Durchmesser oder Halbmesser der gegebenen zwey Kreise nimmt.

§. 28.
Lehrsatz.

Wenn man über der Hypothenuse eines rechtwinkligten, gleichschenkligten Dreyeckes, und über jede Cathete einen halben Kreis beschreibt, so ist das Dreyeck den beyden gleichen Figuren gleich, die von den Quadranten des halben Kreises der Hypothenuse, und den halben Kreisen der Catheten gebildet werden.



Beweis. ABC sey ein rechtwinkligtes Dreyeck;

der Winkel ABC sey ein rechter, und BA = AC. Nach dem Lehrsatze soll das △ ABC = AIBH + AFCG seyn.

Man nennt diese krummlinigten Figuren, deren Summe dem Dreyecke gleich ist, wegen ihrer Form Mönd chen (lunulae), und von ihrem Erfinder heißen sie die Mönd chen des Hypokrates.

Beweis. Nach §. 25. sind zwey Kreise, die zu ihren Durchmessern die Catheten eines rechtwinkligten Dreyeckes haben, zusammen genommen dem Kreise gleich, der zu seinem Durchmesser die Hypothenuse eben dieses Dreyeckes hat; folglich ist der halbe Kreis BHGC = BIA + AFC; nun gehört aber K und L zu beyden Kreisen; wenn wir sie hinwegnehmen, so bleibt BAD = BIAH, und ADC = AFCG, und setzen wir die beyden gleichen Dreyecke BAD und ADC zusammen, so ist also BAC = BIAH + AFCG; folglich wenn man über der Hypothenuse eines rechtwinkligten Dreyeckes u. s. w.

Dreyzehnter Abschnitt.

Von der Quadratur ebener Figuren.

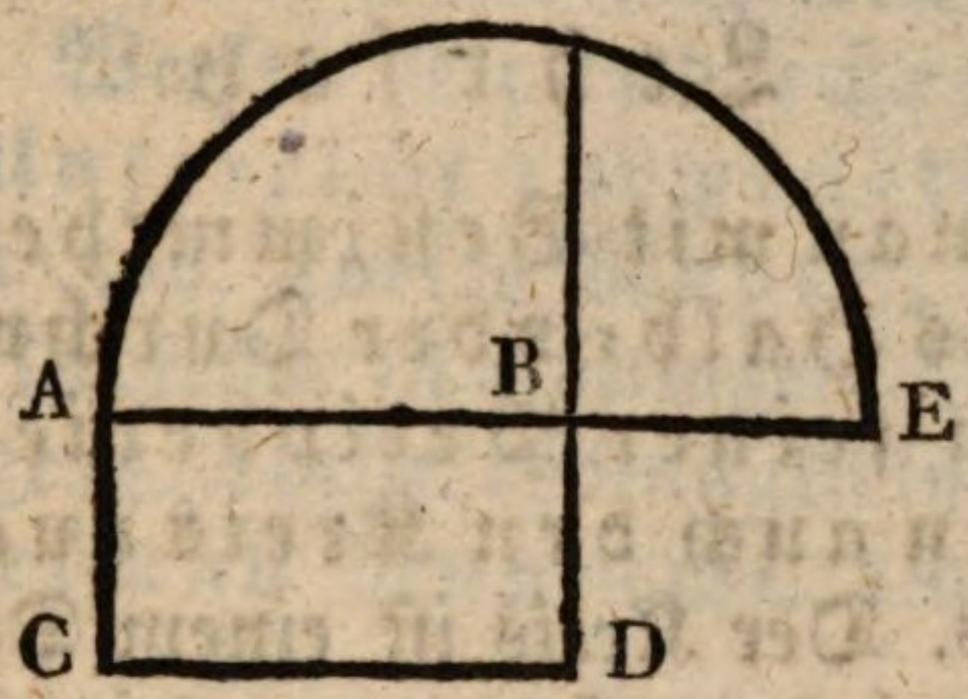
§. 1.

Erklärung.

Eine Figur quadriren heißt, sie in ein ihr gleiches Quadrat (es versteht sich dem Flächeninhalte nach) verwandeln.

§. 2.
Aufgabe.

Ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.



Auflösung. Das gegebene Rechteck sey ABCD. Man verlängere AB bis E so, daß BE = BD. Man beschreibe über AE einen halben Kreis, und verlängere BD bis F, so ist BF die Seite desjenigen Quadrates, das dem gegebenen Rechtecke gleich ist.

Beweis. Eine senkrechte Linie von der Peripherie bis auf den Durchmesser errichtet, ist die mittlere Proportionallinie zwischen den beyden Stücken des Durchmessers (zwölft. Absch. §. 14.); also AB : BF = BF : BE; nun ist BE = BD, weil beyde einander gleich gemacht wurden; folglich ist AB : BF = BF : BD; nun aber ist der Flächeninhalt des Rechteckes ABDC = AB × BD, und BF × BF = AB × BD, weil die erstern die mittlern, und die letztern die äußern Glieder einer geometrischen Proportion ausmachen: also ist AB × BD = BF^2, oder was eines ist, das Rechteck ABDC = BF^2.

§. 3.
Lehrsatz.

Jede geradlinigte Figur läßt sich quadriren.

Beweis. Da man jede geradlinigte Figur in ein Dreyeck, dieses in ein Rechteck, und dieses, wie so eben in dem vorigen Paragraph gezeigt wurde, in ein Quadrat verwandeln kann; so läßt sich jede geradlinigte Figur quadriren.

§. 4.

Lehrsatz.

Wenn man mit Bestimmtheit das Verhältniß des Halb- oder Durchmessers des Kreises zu seiner Peripherie wüßte, so könnte man auch den Kreis quadriren.

Beweis. Der Kreis ist einem Dreyecke gleich, das seinen Radius zur Höhe, und seine Peripherie zur Grundlinie hat; man würde also auch den Kreis quadriren können, wenn sich das Verhältniß seines Halbmessers oder Durchmessers zur Peripherie genau angeben ließ, welches sich aber kaum thun läßt. Das im eilften Abschnitte angegebene Verhältniß des Kreisumfanges zum Durchmesser, ist bloß ein Verhältniß durch Annäherung.

Vierzehnter Abschnitt.

Anwendung der bisherigen Lehren auf die ausübende Geometrie.

Vorerinnerung.

Damit Anfänger einiger Maßen den Nutzen einsehen mögen, den die bisher vorgetragenen geometri-

schen Sätze im gemeinen Leben haben; so wollen wir hier einige Anwendungen davon auf das Feldmessen machen. Wer über die Feldmeßkunst, über diesen weitschichtigen Zweig der angewandten Mathematik, einen ausführlichen, deutlichen und gründlichen Unterricht zu erhalten wünscht, der findet denselben in folgenden vortrefflichem Werke: Gründlicher und ausführlicher Unterricht zur practischen Geometrie, von Joh. Tobias Mayer, kön. großbrit. Hofrath und Professor zu Göttingen. Dritte und vermehrte Auflage. 4. Theile. Göttingen im Verlage bey Vandenhoek und Ruprecht. 1802.

§. 1.

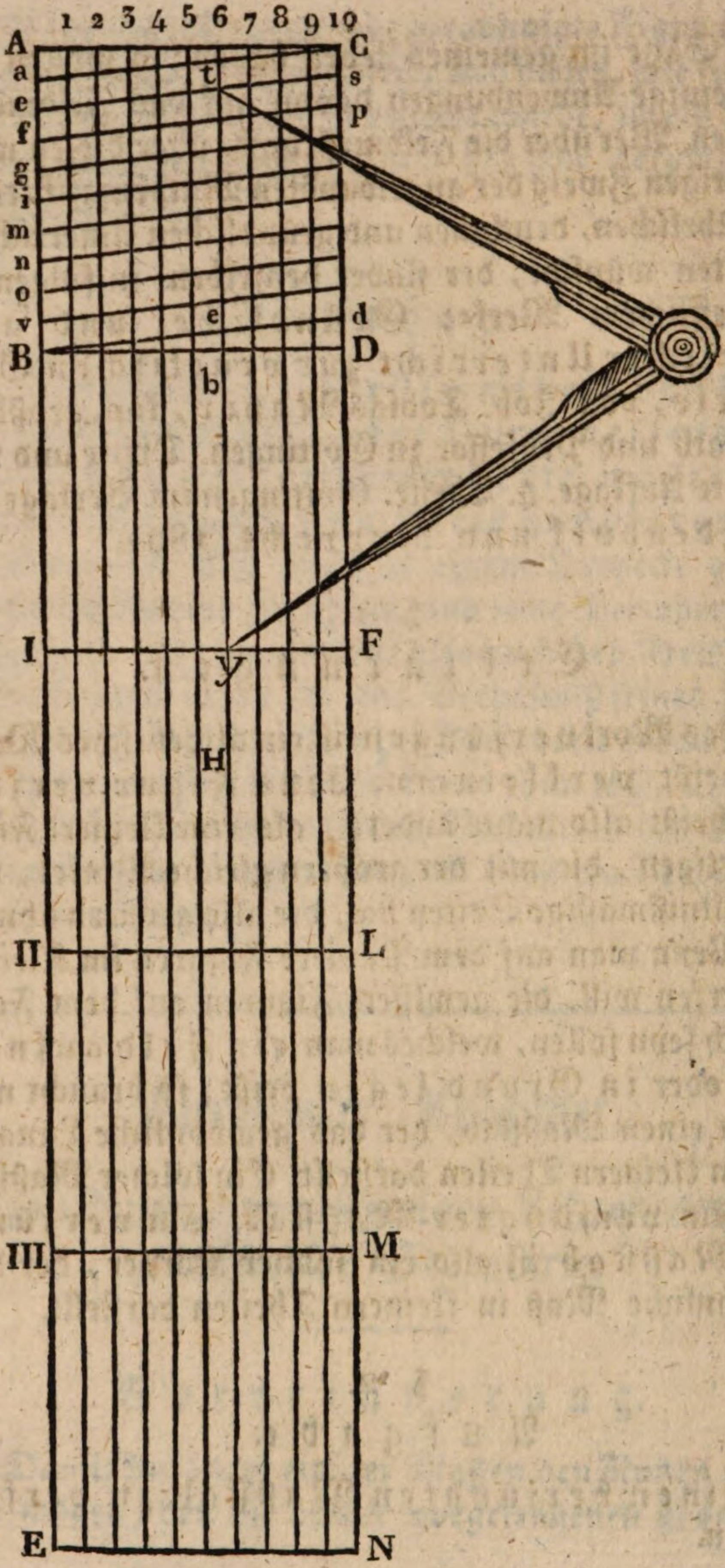
Erklärungen.

Das Wort verjüngen ist ein altdeutsches Wort, und heißt verkleinern. Eine Figur verjüngen heißt also nichts anders, als eine kleinere Figur verfertigen, die mit der größern gleiche Winkel, und verhältnißmäßige Seiten hat, die also größern ähnlich ist. Wenn man auf dem Papiere Figuren im Kleinen entwerfen will, die gewissen Figuren auf dem Felde ähnlich seyn sollen, welches man ein Feld aufnehmen oder in Grund legen heißt; so braucht man hierzu einen Maßstab, der das gewöhnliche Längenmaß in kleinern Theilen darstellt. Ein solcher Maßstab heißt ein verjüngter Maßstab. Ein verjüngter Maßstab ist also ein solcher Körper, der das gewöhnliche Maß in kleinern Theilen darstellt.

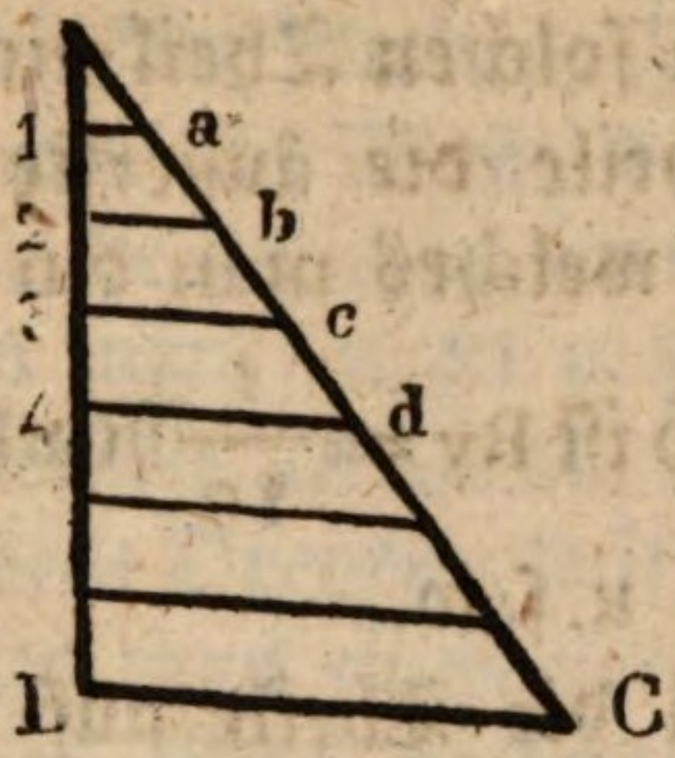
§. 2.

Aufgabe.

Einen verjüngten Maßstab zu verfertigen.


1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
A
a
e
f
g
i
m
n
o
v
B
C
s
p
t
d
D
e
b
I
F
y
H
II
L
III
M
E
N

Auflösung und Beweis. Um die Zeichnung des verjüngten Maßstabes mit Deutlichkeit erklären zu können, so ist nöthig, daß wir folgenden Satz aus der Geometrie voranschicken:



Wenn ABC ein Dreyeck ist, dessen Seitenlinie AB in eine gewisse Anzahl gleicher Theile getheilt wurde, und man zieht aus den Theilungspuncten die Linien 1a, 2b, 3c, 4d u. s. w. mit der Grundlinie BC gleichlaufend (parallel); so ist

A1 : 1a = AB : BC, und durch Verwechslung A1 : AB = 1a : BC; wäre nun AB z. B. in zehn gleiche Theile getheilt worden, so wäre A1 der zehnte Theil von der Linie AB; in diesem Falle nun müßte auch 1a von BC der zehnte Theil seyn. Hieraus ergibt sich Folgendes: Wenn wir eine Seite eines Dreyeckes in beliebige, aber gleich große Theile zerlegen, und aus den Theilungspuncten mit der Grundlinie Parallellinien ziehen; so verhält sich jedes Stück der eingetheilten Seite zur ganzen Seite, wie jede Parallellinie zu der Grundlinie, und jede Parallellinie ist der so vielte Theil von der Grundlinie, als das Stück, welches die Parallellinie abschneidet, von der ganzen beliebig eingetheilten Seite.

Um nun einen verjüngten Maßstab zu erhalten, verfahre man, wie folgt:

1) Man ziehe eine gerade Linie AE von unbestimmter Länge. Man setze auf sie eine gewisse Anzahl gleicher Theile AB = BI = I. II = II. III u. s. w., und lasse einen solchen Theil eine Ruthe bedeuten.

2) Man theile die äußerste Ruthe AB in zehn gleiche Theile, welches man durch Versuche bewerkstelligen kann, so ist Bv = $\frac{1}{10}$ Ruth. = 1 Fuß, Bo = $\frac{2}{10}$ Ruth. = 2 Fuß u. s. w.

3) Da nun die Theile auf AB schon sehr klein ausfallen, so würde es sich wohl nicht thun lassen, diese Theile wieder unmittelbar noch weiter in Zolle einzutheilen; man bedienet sich daher des obigen geometrischen Satzes mit Vortheil auf folgende Art:

4) Auf AE errichte man aus dem Puncte A eine senkrechte AC, setze auf sie zehn willkührliche gleiche Theile von A nach C, nähmlich 1, 2, 3 u. s. w. Aus den Theilungspuncten 1, 2, 3 u. s. w., ziehe man zur Grundlinie AE zehen Parallellinien; eben so ziehe man auch Parallellinien zu AC durch B, I, II, III und E, nähmlich BD, IF, IIL, IIIM und EN.

5) Von C nach dem nächsten Theilungspuncte bey A, nähmlich nach a, ziehe man eine schiefe Linie Ca, und mit Ca durch die übrigen Theilungspuncte auf AB die Parallellinien se, pf u. s. w., unter welchen Bd die letzte ist.

6) So erhält man am Ende ein schmales Dreyeck BdD, wie in der vorletzten Figur, in welchem dD = $\frac{1}{10}$ CD = $\frac{1}{10}$ AB = 1 Fuß ist. Weil nun BD vermittelst der mit AE gezogenen Parallellinien in zehn gleiche Theile getheilt wird, so ergeben sich in

dem schmalen Dreyecke BdD von dD nach B herunter solche verhältnißmäßige Stücke, wie in der vorletzten Figur, die also Zehentheile der Linie dD oder eines Fußes, folglich Zolle vorstellen.

7) So hat man also auf dem Papiere einen Maßstab H, der auf eben die Art Ruthen, Füße und Zolle im Kleinen enthält, wie das Maß, dessen man sich auf dem Felde bedient, dergleichen im Großen hat.

1. Zusatz. Wenn man AB, BI u. s. w. für Fuße gelten läßt, so bedeuten die Theile auf AB Zolle, und die Querstückchen in dem Dreyecke BdD Linien.

2. Zusatz. Wollte man einen verjüngten Maßstab für das 12theilige Maß verfertigen, so darf man nur überall, wo bisher zehn Theile gesetzt worden sind, zwölf Theile hinsetzen.

1. Anmerkung. Da der eben beschriebene Maßstab, wenn er auf dem Papiere verfertiget ist, durch den Zirkel, womit man die Maße abnimmt, bald durchlöchert und unbrauchbar gemacht würde; so hat man ihn auf Elfenbein, Birnbaumholz oder Messing verzeichnet. Einen solchen dauerhaften verjüngten Maßstab findet man in einem jeden mathematischen Bestecke oder Reißzeuge.

2. Anmerkung. Der Erfinder des verjüngten Maßstabes ist Joh. Hommel, ehemahliger Professor der Mathematik zu Leipzig. Tycho Brahe, sein Schüler, ein Mann, der sich um die Mathematik sehr verdient gemacht hat, hat diesen Maßstab zuerst um das Jahr 1553 der Welt bekannt gemacht.

§. 3.

Aufgabe.

Eine gegebene Länge von dem verjüngten Maßstabe mit dem Zirkel aufzufas-

sen und aufs Papier zu tragen, oder eine auf dem Papiere befindliche Länge nach dem verjüngten Maßstabe zu bestimmen.

Auflösung. Auf der Linie AE (man sehe den oben verzeichneten Maßstab an) befinden sich die Ruthen und Schuh; von A bis B sind zehn Schuh verzeichnet (wenn man anders diese Theile als Schuh gelten läßt), von B bis I, von I bis II, und von II bis III, und von III bis E stehen Ruthen, und die Querstücke, welche sich innerhalb des Dreyeckes BdD befinden, enthalten die Zolle so, daß das erste Querstück bey B einen Zoll, das darauf folgende zwey Zoll u. s. w. bedeutet, wie es die ober AC angeschriebenen Ziffern ausweisen. Gesetzt nun, man wollte von dem verjüngten Maßstabe H eine Länge von 1° 8′ 6″ abtragen. Um dieß zu leisten, so setze man die eine Zirkelspitze auf I, und verlängere die andere bis B, so hat man 1°; da die Länge von B bis e 8 Fuß vorstellt, so dehne man die Zirkelspitze von B bis e aus, so hat man 1° 8′; um noch 6″ dazu zu erhalten, muß man noch die Länge des unter der Zahl 6 befindlichen Querstückes des Dreyeckes BdD nehmen. Dieß erhält man, wenn man die Zirkelspitze von I bis zur Linie auf IF hinrückt, ober welcher die Zahl 6 steht, und wenn man die andere Spitze bis zum Durchschnittspuncte t verlängert; denn wenn man von dem Puncte e, wo die 8′ abgetragen wurden, eine zu BD parallel laufende Linie ziehen würde, so würde man in dem auf solche Art entstandenen Dreyecke, das dem △BdD = ist, von t bis zur Linie herab, ein Querstück erhalten, welches eb gleich ist; die Länge von g bis t enthält also 1° 8′ 6″; denn gt = IB + BE + be = 1° 8′ 6″; die abgefaßte Weite zwischen beyden Zirkelspitzen enthält also 1° 8′ 6″, welche nun aufs Papier getragen werden kann.

Umgekehrt, wäre auf dem Papiere eine Linie gegeben, deren Größe man nach dem verjüngten Maßstabe bestimmen sollte; so fasse man solche mit dem Zirkel, behalte den Zirkel in unveränderter Oeffnung, und suche zwischen EN, oder III M, oder II L, oder IF, oder BD und AC, je nachdem die Oeffnung des Zirkels groß oder klein ist, eine solche Parallellinie auf, daß, wenn die Zirkelspitze in einen gewissen Theilungspunct der einen der besagten Linien eingesetzt wird, die andere Spitze innerhalb des Raumes ABCD in einen Durchschnittspunct, wie t hinfalle, der mit dem Puncte der andern Spitze mit g in einer geraden Linie t g liegt, die mit der Grundlinie AE parallel geht. Alsdann kann man die Weite t g auf dem verjüngten Maßstabe in Ruthen, Fußen und Zollen bestimmen.

§. 4.

Aufgabe.

Durch Hülfe des verjüngten Maßstabes Linien in gleiche Theile zu zerlegen.

Auflösung. Wenn z. B. eine Linie gegeben wäre, und man sollte sie durch Hülfe des verjüngten Maßstabes in sechs gleiche Theile zerlegen. Man nehme mit dem Zirkel die Weite dieser Linie, trage sie auf den verjüngten Maßstab, und sehe, wie viel sie in Zahlen beträgt. Wir wollen annehmen, daß sie 8° 6′ 4″ betrüge. Man dividire nun diese Zahl durch 6; man erhält 1° 4′ 4″, welches der sechste Theil von 8° 6′ 4″ ist. Diese Länge 1° 4′ 4″ suche man auf dem verjüngten Maßstab, so ist die gefundene Linie der sechste Theil von der gegebenen Linie.

§. 5.

Aufgabe.

Eine gerade Linie auf dem Felde abzustecken und zu messen.

Auflösung. Eine gerade Linie ist eine solche, worin alle Puncte derselben einerley Richtung haben. Die Puncte pflegt man auf dem Felde durch Stäbe anzudeuten, die man senkrecht in die Erde steckt, wenn nicht schon an dem Orte, wo das Ende einer Linie seyn soll, ein Baum oder ein anderer Gegenstand sich befindet. Die geraden Linien, welche nicht lang sind, bestimmt man durch zwey Stäbe, die man in ihre Endpuncte setzet. Bey langen Linien aber pflegt man auch in der Mitte derselben noch einige Stäbe einzustecken, wobey man aber zu sorgen hat, daß die mittlern Stäbe mit den äußern in gerader Richtung zu stehen kommen, welches dadurch bewerkstelliget wird, wenn man mit dem einen Auge von dem einen äußern Stabe gegen den andern sieht und Achtung gibt, ob die mittlern Stäbe durch die äußern gedeckt werden. Die Messung der Linien auf dem Felde geschieht durch die Meßstange, oder besser Meßkette; indem man von einem Absteckstabe zu dem andern in gerader Richtung hinmißt. Kommt ein Gesträuch in den Weg der Messung, so muß dieses umgebogen oder abgehauen werden. Stößt man auf kleine Erhöhungen, so schiebt man die Meßkette an den Stäben in die Höhe, daß sie in gerader Linie über den kleinen Hügel wegstreiche; man unterstützt sie auch, wenn sie sich durch ihre Schwere beugt. Ueber kleine Gräben und Vertiefungen, die sich mit einem Brete belegen lassen, läßt sich die Meßkette ohne Um-

stände fortziehen. Bey großer Breite des Grabens muß solche besonders gemessen werden. Ist der Boden merklich abhängig, so bestimme man bey jedem Zuge der Meßkette, die Höhe des einen Endpunctes über dem andern, und rechne nach dem Pythagoräischen Lehrsatze die horizontale Weite aus.

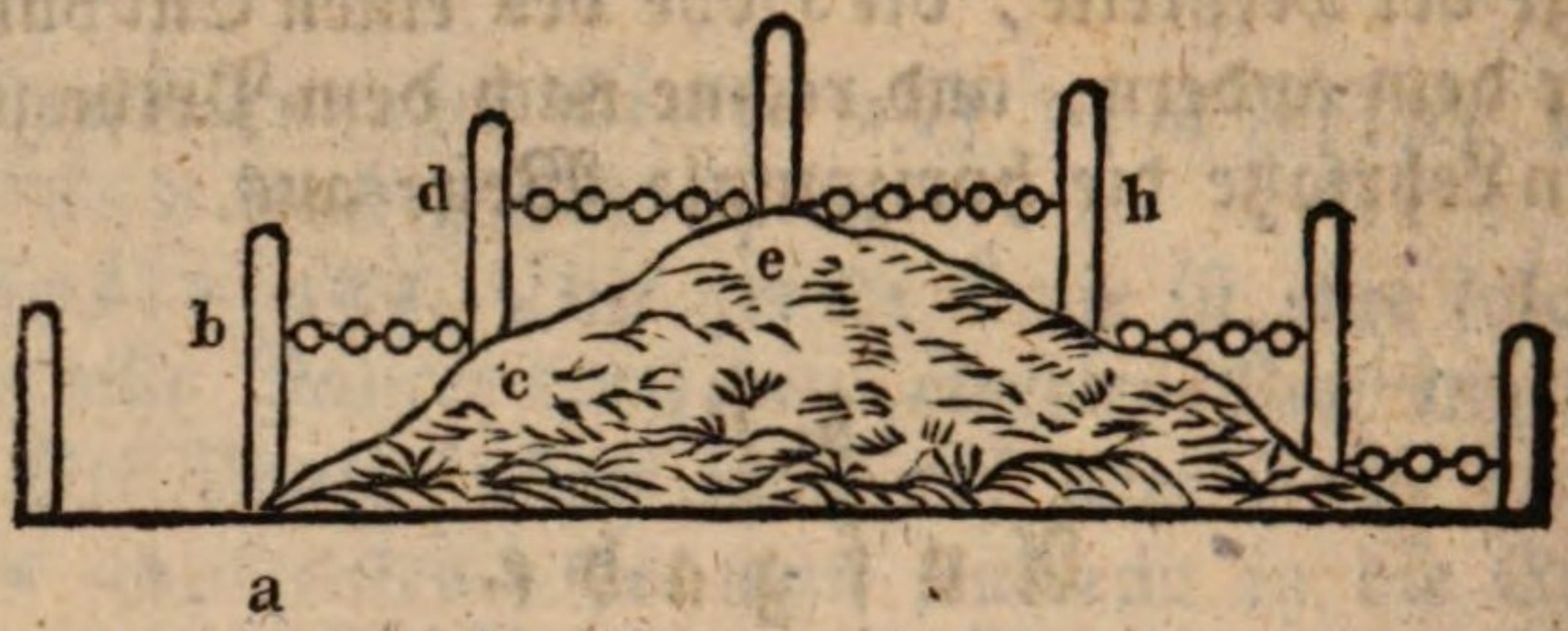
§. 6.

Aufgabe.

Eine gerade Linie, welche über einen Berg hinstreichen soll, zu messen.

Auflösung. Man stecke die zu messende gerade Linie in gerader, und weil sie über einen Berg geht, in schiefer Richtung ab, und verfahre, wie beym Abstecken gerader Linien auf ebenen Boden; wobey man nur noch dieß zu merken hat, daß man die Stäbe nach Erforderniß der Umstände nahe an einander setzt, und daß man längere Absteckstäbe nimmt. Um nun die Länge der Horizontallinie, die über den Berg geht, zu erhalten, so gehet man so zu Werke: Zwey Gehülfen nehmen die Meßkette, der eine an dem vordern, und der andere an dem hintern Ende, und dehnen sie in gerader Richtung von dem ersten Absteckstabe bis gegen den nächsten hin. Der Feldmesser setzt nun einen Stab, welchen er immer bey der Hand haben muß, bey dem Meßstäbchen senkrecht auf, und hebt die Kette so hoch, als c, wo das andere Ende der Kette liegt. Nun gehen beyde gemeinschaftlich mit der Kette vorwärts, und der hintere Gehülfe hebt sein Ende der Kette von c bis d. Auf diese Weise wird nun fortgefahren. Geht die Arbeit nun bergab, so legt der Feldmesser sein Ende der Kette bey e auf die Erde, und der vordere hebt

seines so hoch, daß es mit e horizontal ist, also von e nach h u. s. w.



§. 7.

Erklärung des Meßtisches.

Der Meßtisch ist ein viereckiger, ebener Tisch, dessen jede Seite beyläufig anderthalb Fuß lang ist, und auf 3 beweglichen Füssen so ruhet, daß man das Blatt des Tisches horizontal und vertikal stellen kann, wie man will, ohne Verrückung der Füße. Dabey ist ein bewegliches Dioptern-Linial. Gewöhnlich wird noch ein Bogen reines Papier auf dem Blatte des Tisches befestiget.

1. Anmerkung. Der Erfinder des Meßtisches ist Johann Prätorius, daher hat er auch von ihm den Nahmen der prätorianische Meßtisch. Er hat späterhin von mehreren Meßkünstlern manche Verbesserungen bekommen. Dieses Werkzeug ist eines der wichtigsten in der practischen Geometrie, weil durch Hülfe desselben eine Figur auf dem Felde sogleich mit allen ihren einzelnen Bestimmungen zu Papier gebracht werden kann, und die Kosten sehr erträglich sind, womit sich dasselbe anschaffen läßt.

Bey Vermessungen im Großen muß das Astrolabium, von dem oben dritt. Absch. II. §. 8. 2. Anmerk. Meldung gemacht wurde, gebraucht werden.

2. Anmerkung. Was die Handgriffe betrifft, die man bey Aufstellung des Meßtisches zu beobachten hat, so müssen dieselben practisch gezeigt werden. Ich will hier die wichtigsten derselben anführen. Wenn man den Tisch irgendwo auf dem Felde aufstellen will, so muß man vor allem zuerst die drey Füße desselben fest in die Erde drücken, damit sie während der Arbeit nicht verrückt werden, damit der Tisch aus der ein Mahl gerichteten Stellung nicht mehr gebracht wird. Das Blatt des Tisches stellt man horizontal vermittelst der Wasserwage, die man auf der Mitte des Tisches zuerst der Länge, hernach der Breite nach setzt, wornach man das Blatt des Tisches so lange richtet, bis es eine horizontale Lage hat. Wenn auf dem Blatte des Tisches ein gegebener oder angenommener Punct mit einer Nadelspitze gemacht ist; so laßt sich der Tisch durch ein Senkbley so stellen, daß dieser Punct gerade über einem auf dem Felde gegegebenen Puncte zu liegen kommt.

§. 8.

Aufgabe.

Einen Winkel von dem Felde mit dem Meßtische aufzunehmen, und einen Winkel, der sich auf dem Meßtische befindet, auf das Feld aufzutragen.

Auflösung. Um einen Winkel von dem Felde auf den Meßtisch zu bringen, setze man den Meßtisch über den Scheitelpunct des Winkels. Über diesem Puncte in senkrechter Richtung stecke man auf dem mit Papier überzogenen Tischblatte eine Nadel oder einen Stift, lege daran das Diopternlinial, ziele durch beyde Dioptern, drehe das Linial so lange, bis man den einen Absteckstab des einen Schenkels

des Winkels auf dem Felde erblickt, und ziehe dann an dem Liniale eine Linie. Hierauf drehe man das Linial, das an dem vorigen Puncte anliegt, so lange, bis man durch die Dioptern desselben den Absteckstab des andern Schenkels des Winkels erblickt, und ziehe dann an dem Liniale eine Linie, so bildet diese mit der vorigen einen Winkel, der dem Winkel auf dem Felde gleich ist; weil beyde einander decken. Soll ein auf dem Meßtische befindlicher Winkel auf das Feld gebracht werden; so stelle man den Meßtisch über den Punct des Feldes, auf den der Winkel aufgetragen werden soll, aber so, daß dieser Punct gerade unter dem Scheitelpuncte des Winkels auf dem Meßtische zu stehen kommt; alsdann lege man das Diopternlinial an den Scheitelpunct des Winkels auf dem Meßtische, und drehe es so lange, bis es mit seiner Schneide an dem einen Schenkel des Winkels genau anliegt. Hierauf lasse man seinen Gehülfen mit einem Absteckstabe in dieselbe Gegend gehen, wohin das Diopternlinial die Richtung hat. Man sehe nun durch die Dioptern, und lasse den Stab dort einstecken, wo er mit den Dioptern in gerader Richtung zu stehen kommt, so hat man einen Schenkel abgesteckt; um nun auch den andern abstecken zu können, drehe man das Diopternlinial, so, daß es mit diesem nach seiner Schneide zusammen fällt, und lasse dann wieder nach dieser Richtung, indem man durch die Dioptern sieht, von seinem Gehülfen einen Stab einstecken; so ist auch der zweyte Schenkel des Winkels auf dem Meßtische abgesteckt. Daß nun der auf solche Art ausgesteckte Winkel auf dem Felde dem Winkel auf dem Meßtische gleich ist, erhellet daraus, beyde diese Winkel decken einander.

§. 9.

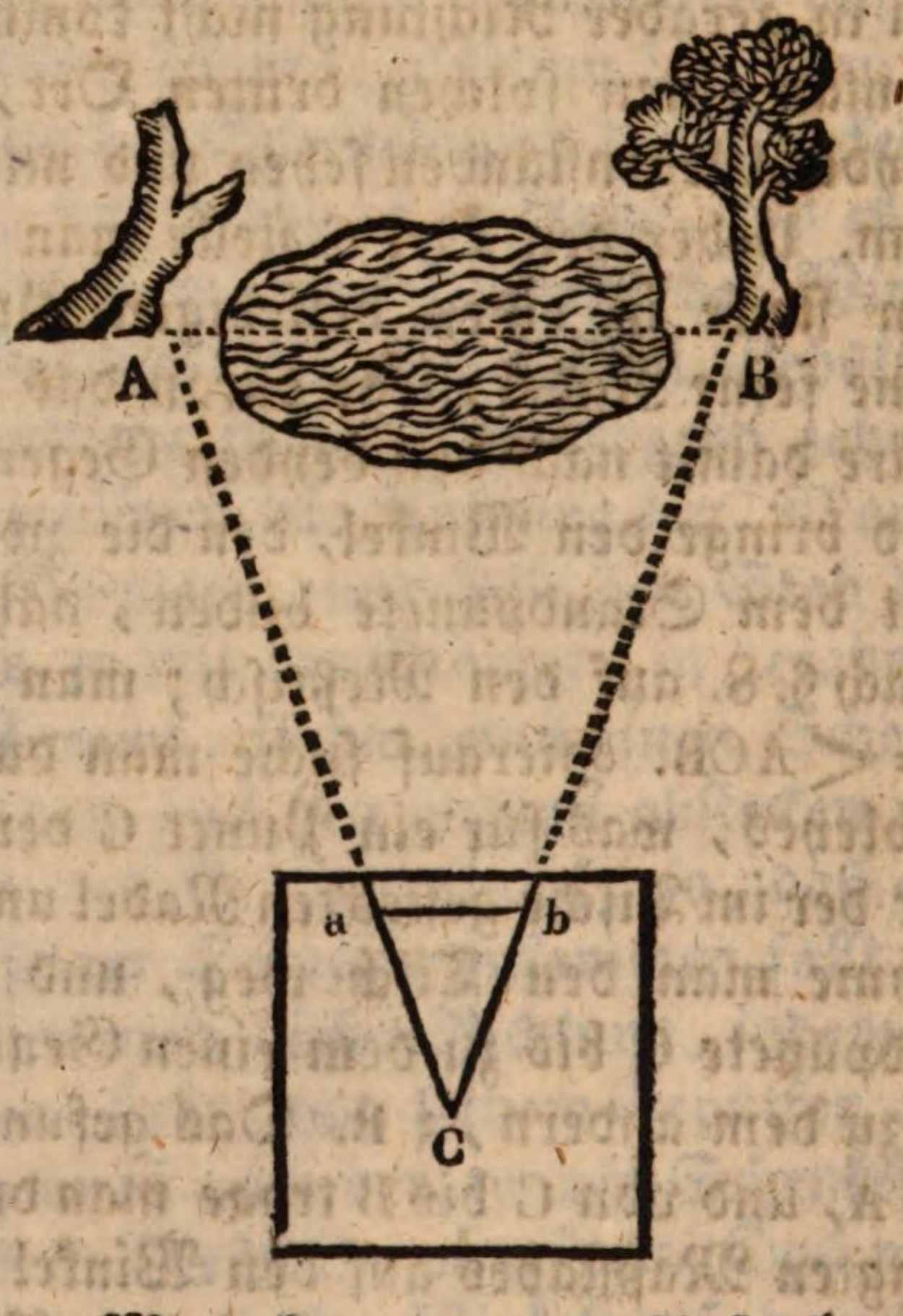
Aufgabe.

Die Entfernung zweyer Orte zu messen, welche so liegen, daß man von einem Orte zu dem andern nicht gerade zu gehen, wohl aber aus einem dritten Orte zu beyden gehen und sehen kann.

Auflösung. Wenn sich zwischen zwey Gegenständen A und B, deren Entfernung man wissen möchte, ein Wasser, ein Gesträuch, oder sonst ein Hinderniß befindet, weßwegen man zu beyden diesen Gegenständen in gerader Richtung nicht kommen kann; so wähle man einen solchen dritten Ort, von dem man zu beyden Gegenständen sehen und mit der Kette messen kann. Ueber den Ort C stelle man den Meßtisch. Man stecke in einen beliebigen Punct c des Tisches eine feine Nadel, lege daran das Diopternlinial, visire damit nach den beyden Gegenständen A und B, und bringe den Winkel, den die zwey Gegenstände mit dem Standpuncte bilden, nähmlich den $\angle$ ACB nach §. 8. auf den Meßtisch; man erhält den $\angle$ acb $=\angle$ ACB. Hierauf suche man durch Hülfe des Senkbleyes, was für ein Punct C der Erde gerade unter der im Tische gesteckten Nadel unter c liegt. Dann nehme man den Tisch weg, und messe von dem Standpuncte C bis zu dem einen Gegenstande A und auch zu dem andern, z B. Das gefundene Maß von C bis A, und von C bis B trage man durch Hülfe des verjüngten Maßstabes auf den Winkel des Meßtisches acb, so, daß ca und cb in der Verjüngung so viel Ruthen, Schuh und Zoll enthalten, als CA und CB im Großen. Die Puncte a und b, welche die Endpuncte des aufgetragenen Maßes sind, verbinde man durch eine gerade Linie; so erhält diese das Maß

für die Entfernung der beyden Gegenstände A und B; denn beyde Dreyecke acb und ACB sind sich ähnlich, weil in beyden zwey proportionirte Seiten sind, nähmlich ac : AC = bc : BC, und weil überdieß der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel C zu beyden Dreyecken gehört (zwölft. Absch. §. 11.).

Um also zu erfahren, wie weit beyde Gegenstände A und B von einander abstehen, darf man nur auf dem Meßtische die Linie ab mit dem Zirkel auffassen, und dann dieselbe auf den verjüngten Maßstab übertragen, wo es sich dann zeigen wird, wie viel Ruthen, Schuh und Zoll A von B entlegen ist.



Zusatz. Man könnte diese Aufgabe auch ohne Meßtisch, bloß durch Stäbe lösen. Man dürfte nähmlich nur die Linien AC und BC in gerader Richtung über C hinaus verlängern, es versteht sich durch Stäbe, und dann das Maß von BC und AC auf die entspre-

chenden verlängerten Linien auftragen, und durch Stäbe das Maß auf beyden Linien bemerken; so würde die Entfernung dieser zwey Stäbe der Entfernung von A bis B gleich seyn; weil man auf solche Art zwey gleiche Dreyecke erhielte, in denen zwey Seiten sammt dem von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel gleich sind.

Ließen sich die Linien AC und BC nicht ganz forttragen, so dürfte man sie überall nur um einen beliebigen Theil, z. B. überall nur um den dritten Theil oder dergleichen verlängern; so würde dann die Entfernung der beyden Endpuncte ebenfalls der dritte Theil der ganzen Entfernung von A bis B seyn. Der Beweis ergibt sich aus der Aehnlichkeit beyder Dreyecke, in denen zwey Seiten in Proportion, und die von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel als Wechselwinkel gleich sind.

Auch könnte man obige Aufgabe in manchen Fällen durch senkrechte lösen. Wenn man nähmlich von den Endpuncten des dazwischen liegenden Hindernisses senkrechte Linien herabzöge, diese gleich lang machte; so würde dann die Entfernung dieser senkrechten Linien der Entfernung der Endpuncte des Hindernisses, z. B. des Teiches, gleich seyn.

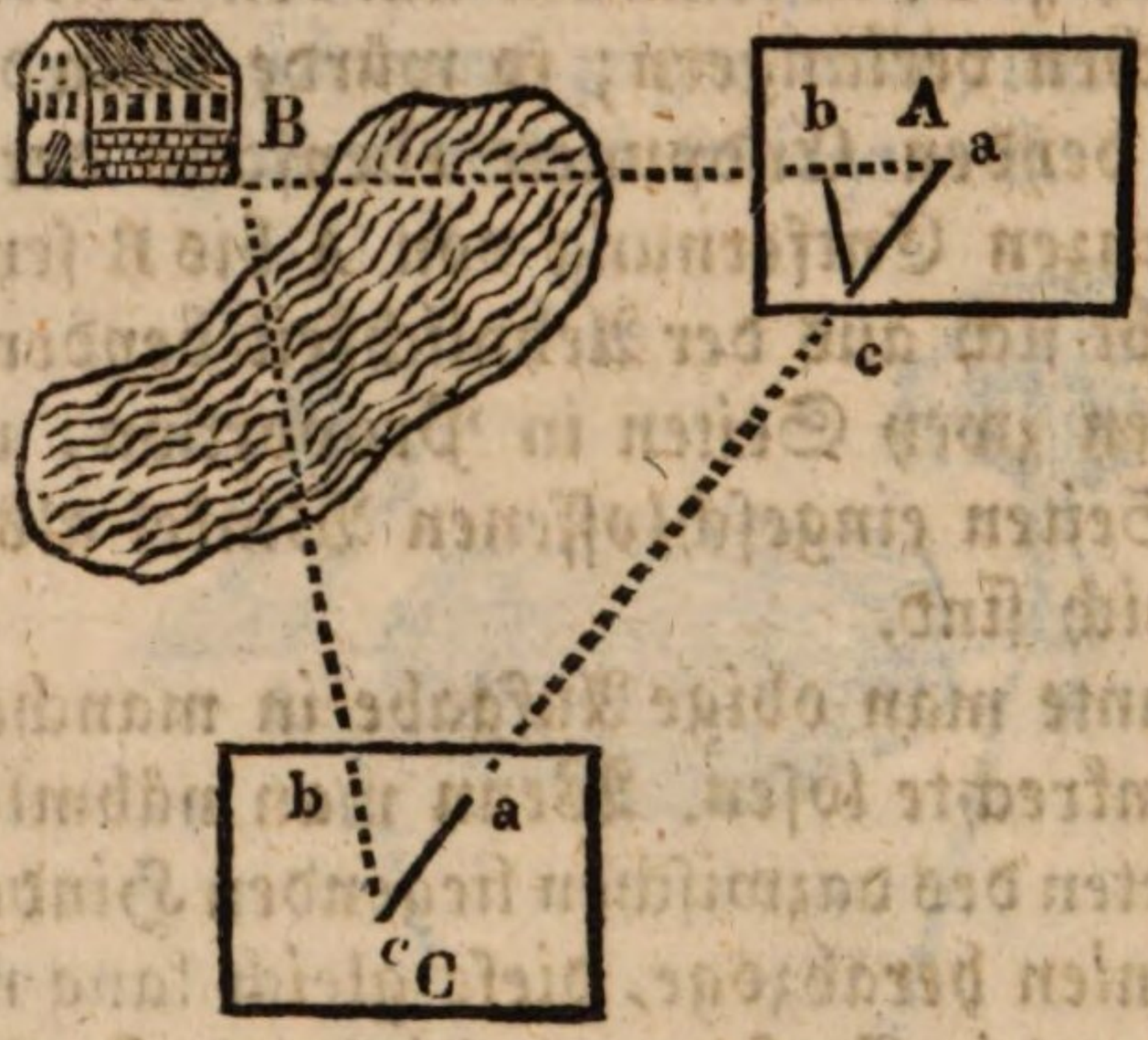
§. 10.

Aufgabe.

Die Entfernung zweyer Orte zu finden, die so beschaffen sind, daß man von einem dritten Orte zwar zu beyden sehen, aber nur zu einem messen kann.

Auflösung. Man wähle einen Standpunct C, von wo man die Orte A und B sehen kann, deren Entfernung man bestimmen soll, setze da bey C den

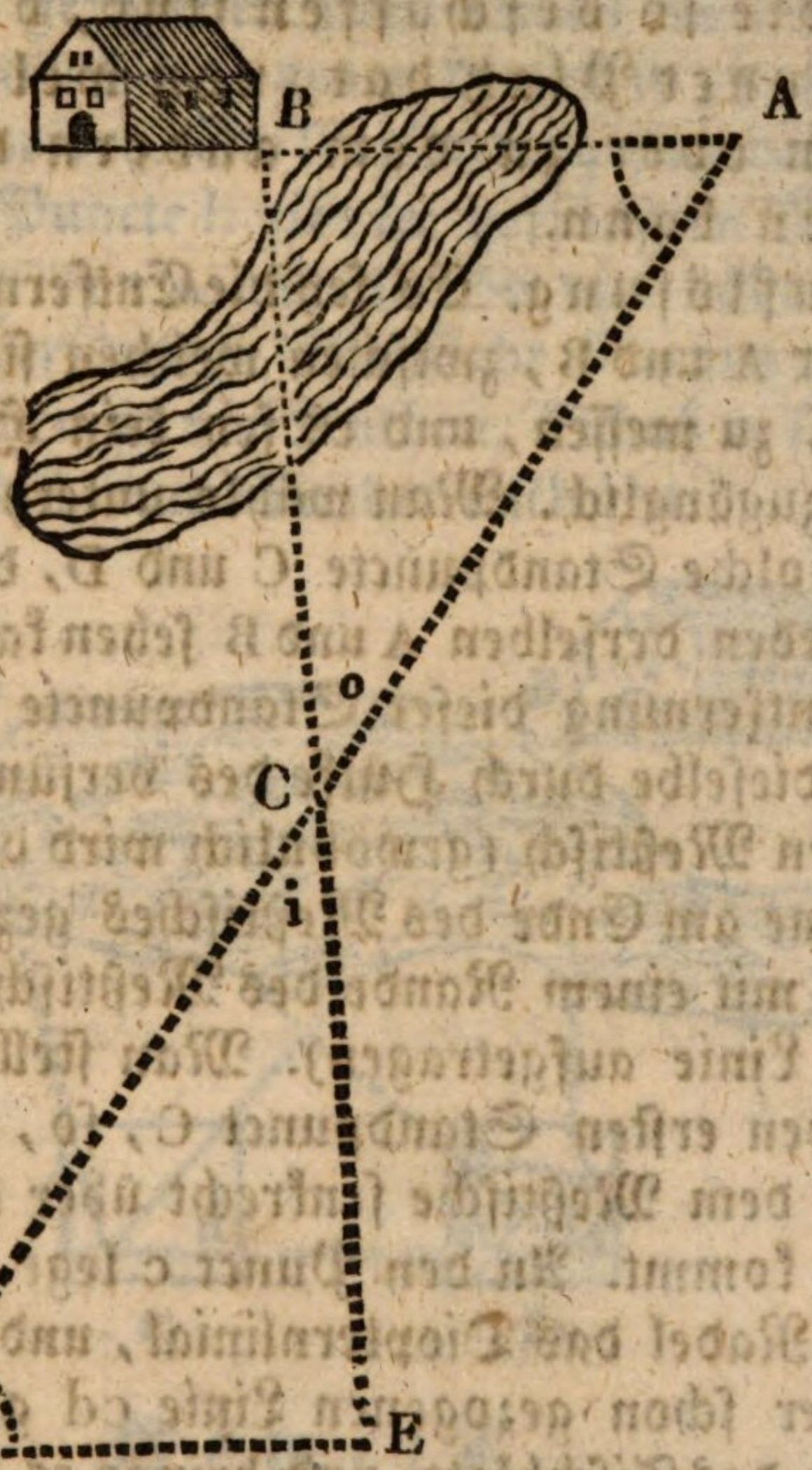
Meßtisch nieder, und visire nach den beyden Orten A und B. Nun messe man die zugängliche Weite von C nach A, und trage sie nach dem verjüngten Maßstabe aus c in a. Stelle darauf den Tisch in den zugänglichen Ort A, so, daß a senkrecht über A, und ac in die Richtung von AC kommet. Endlich visire man von a nach B, und ziehe nach dieser Richtung ab; so ist die Länge dieser Linie nach dem verjüngten Maßstabe gleich der Größe der verlangten Weite AB.



Beweis. Das Dreyeck ABC ist dem Dreyecke abc ähnlich; denn in beyden Dreyecken sind die Seiten CA und ca proportionirt, und die beyden anliegenden Winkel C und A, c und a sind sich gleich; folglich CA : ca = AB : ab (zwölft. Abschn. §. 9.). Da nun ca von dem verjüngten Maßstabe so viele Theile hat, als CA von dem großen; so muß auch ab so viele Theile von dem verjüngten Maßstabe, als AB von dem großen haben.

Zusatz. Man könnte auch die Weite von AB finden, wenn man AC über C hinaus verlängerte, und die so verlängerte Seite von C aus AC gleich machte, so, daß CD = CA wäre. An den Punct D

müßte man den Winkel A bilden, und müßte seinen Schenkel DE verlängern, bis er CF in dem Puncte E schnitte.



Beweis. DE = AB; denn das Dreyeck BAC ist CDE, weil in beyden eine Seite, nähmlich CD und CA, sammt den zwey anliegenden Winkeln o und i, die Wechselwinkel sind, und D und A nach der Verfertigung gleich sind.

Anmerkung. Statt der ganzen Linie CA könnte man auch nur einen Theil davon von C gegen D tragen u. s. w. Man sehe den §. 9.

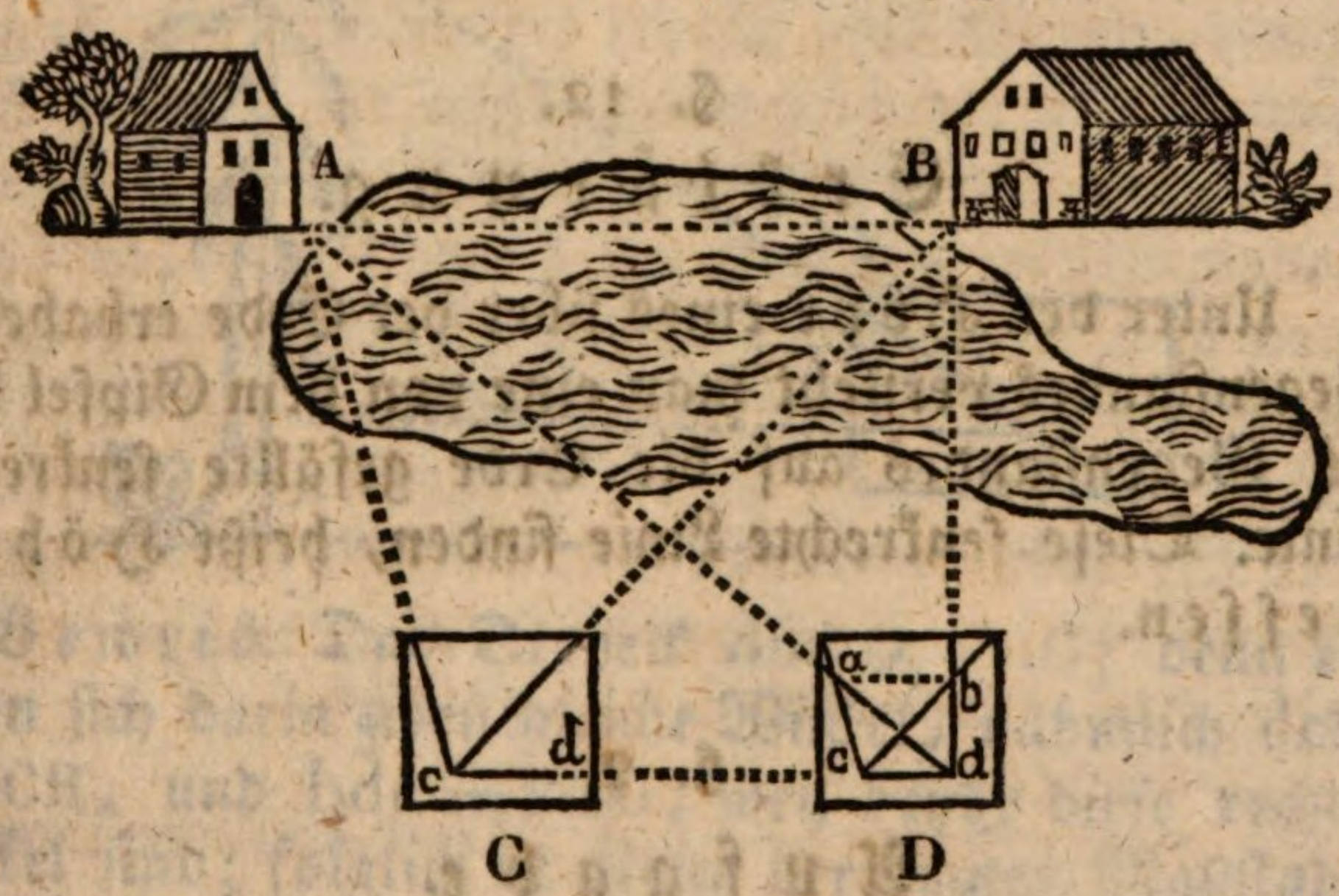
§. 11.

Aufgabe.

Die Entfernung zweyer Orte zu messen, die so beschaffen sind, daß kein dritter Punct Platz hat, von welchem man zu einem oder zu dem andern dieser Orte messen kann.

Auflösung. Es sey die Entfernung der beyden Häuser A und B, zwischen welchen sich ein Teich befindet, zu messen, und es sey kein Haus in gerader Linie zugänglich. Man wähle unterhalb der Häuser zwey solche Standpuncte C und D, daß man aus einem jeden derselben A und B sehen kann. Man messe die Entfernung dieser Standpuncte C und D, und trage dieselbe durch Hülfe des verjüngten Maßstabes auf den Meßtisch (gewöhnlich wird diese Entfernung auf eine am Ende des Meßtisches gezogene, und beyläufig mit einem Rande des Meßtisches parallel laufende Linie aufgetragen). Man stelle den Meßtisch über den ersten Standpunct C, so, daß der Punct c auf dem Meßtische senkrecht über den Punct C zu stehen kommt. An den Punct c lege man vermittelst einer Nadel das Diopternlinial, und drehe es bis es mit der schon gezogenen Linie cd gleichlauft. Man wende das Tischblatt, und bringe es in die Lage, daß die Linie cd mit CD gleichlauft, welches durch das Visiren bewerkstelliget wird, wenn man nähmlich durch die Dioptern auf den Standpunct D hinsieht. In dieser Stellung schraube man den Tisch fest; drehe dann das Linial um die Nadel herum, visire nach A, und nach B, und ziehe jedes Mahl an dem Rande des Linials eine gerade Linie. Hierauf bringe man den Tisch in den Standpunct D, so, daß der Punct d des Meßtisches in senkrechter Richtung über den Punct D

zu stehen kommt, und daß die Linie dc mit DC gleichlauft. Nachdem der Tisch in dieser Lage fest geschraubt ist, so visire man nach A und B, und ziehe jedes Mahl nach der Schneide des Linials eine gerade Linie. Die auf solche Art gezogenen zwey Linien werden die in dem Standpuncte C gezogenen Linien in zwey Puncten a und b schneiden. Die Entfernung nun des Punctes a von dem Puncte b gibt im verjüngten Maßstabe die Entfernung von A und B. So viel nähmlich die Länge ab im verjüngten Maßstabe Ruthen, Schuh u. s. w. hält, eben so viel Ruthen, Schuh u. s. w. sind die Orte A und B von einander entlegen.



Beweis.

$\angle acd = \angle ACD$
$\angle adc = \angle ADC$ } nach der Verfert.

also $\triangle acd \sim \triangle ACD$ (zwölf. Abschn. §. 9.)

folglich $AC : ac = CD : cd$

ferner $\angle bcd = \angle BCD$
$\angle bdc = \angle BDC$

also $\triangle bdc \sim BDC$

folglich $BC : bc = CD : cd$

$AC : ac = CD : cd$ (nach dem obig. Bew.)

also AC : ac = BC : bc (Arith. §. 185.)
und da < acb = ACB (nach der Verfert.)
so ist △ acb = △ ACB (zwölf. Absch. §. 11.)
also ac : AC = db : AB; ab ist also nach dem verjüngten Maßstabe so groß, als AB.

Anmerkung. Bey diesen und ähnlichen Vermessungen muß man, um desto richtiger verfahren zu können, jederzeit solche zwey Standpuncte wählen, bey denen sehr spitzige und sehr stumpfe Winkel vermieden werden. Auch muß durch das Diopternlinial mit großer Sorgfalt und möglichster Genauigkeit nach den Gegenständen und Absteckstäben visirt werden.

§. 12.

Erklärung.

Unter der Höhe eines über der Erde erhabenen Gegenstandes versteht man eine von dem Gipfel dieses Gegenstandes auf die Erde gefällte senkrechte Linie. Diese senkrechte Linie finden, heißt Höhen messen.

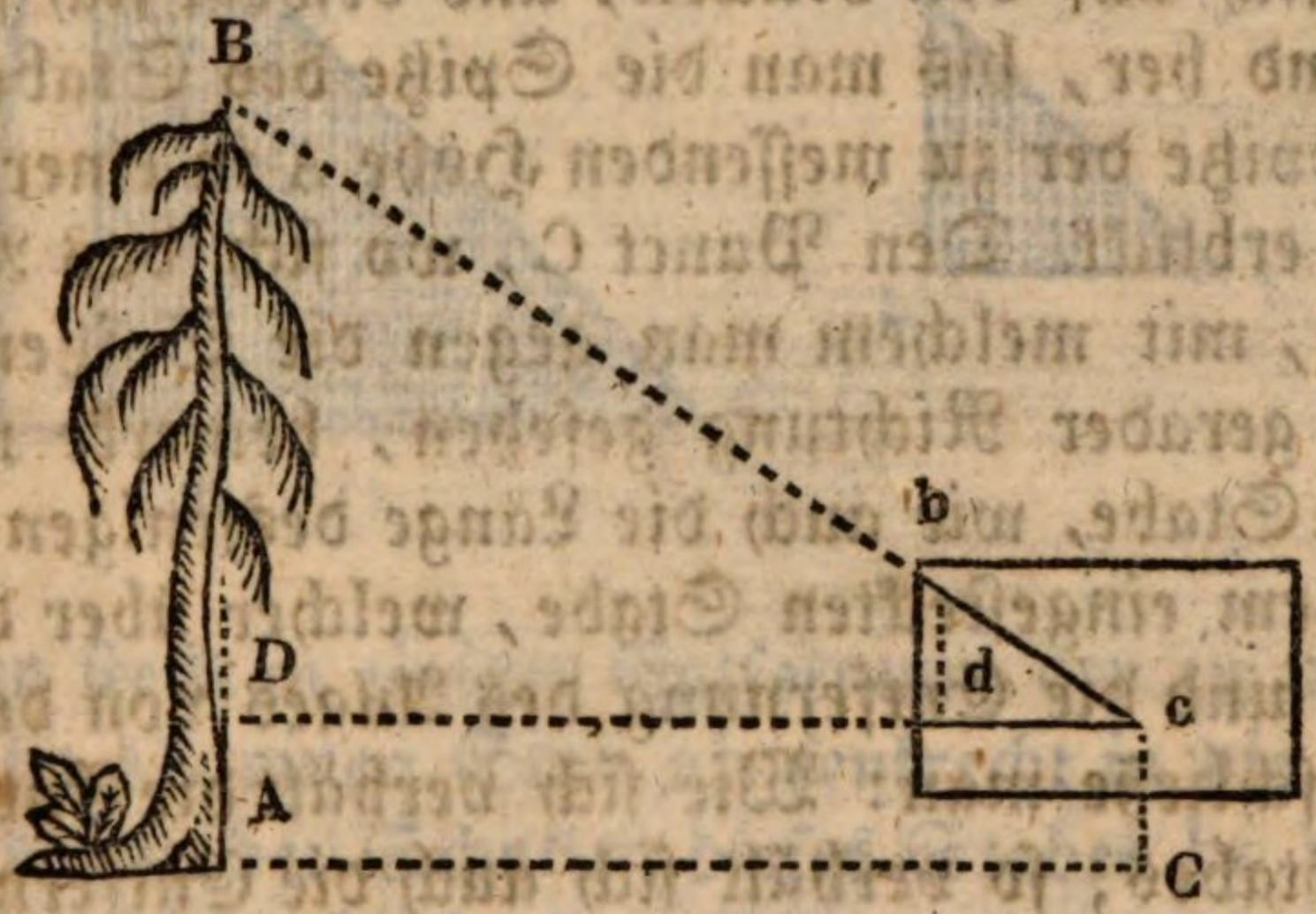
§. 2.

Aufgabe.

Eine zugängliche Höhe zu messen.

Auflösung. Man soll z. B. die Höhe eines Baumes messen. Man wähle einen Ort, von dem man die Höhe des Baumes von unten bis an den Gipfel desselben kann; stelle da (in C) die Fläche des Meßtisches senkrecht, und seine untere Seite wagerecht; sehe durch die Dioptern des Linial, indem man es wagerecht haltet, nach dem Stamme des Baumes, dessen Höhe man messen will, ziehe cd, und bemerke da den Punct D, wo die verlängerte Linie cd hin-

trifft. Hierauf drehe man das Linial um den Punct c so lange, bis man durch die Dioptern den Gipfel B erblickt, und ziehe die Linie cb. Dann messe man CA = cD, und mache cd nach dem verjüngten Maßstabe so lang, als cD. Endlich errichte man in d eine senkrechte Linie, so bekommt man db, welche nach dem verjüngten Maßstabe so groß, als DB ist. Dazu nehme man noch die Höhe von AD, so hat man die ganze Höhe des Baumes, nähmlich AB.



Beweis. Das Dreyeck dbc ∽ DBC; denn es finden sich darin zwey gleiche Winkel, nähmlich dcb = DCB, und bdc = BDC, weil beyde diese rechte Winkel sind; folglich ist db im verjüngten Maßstabe so groß, als DB.

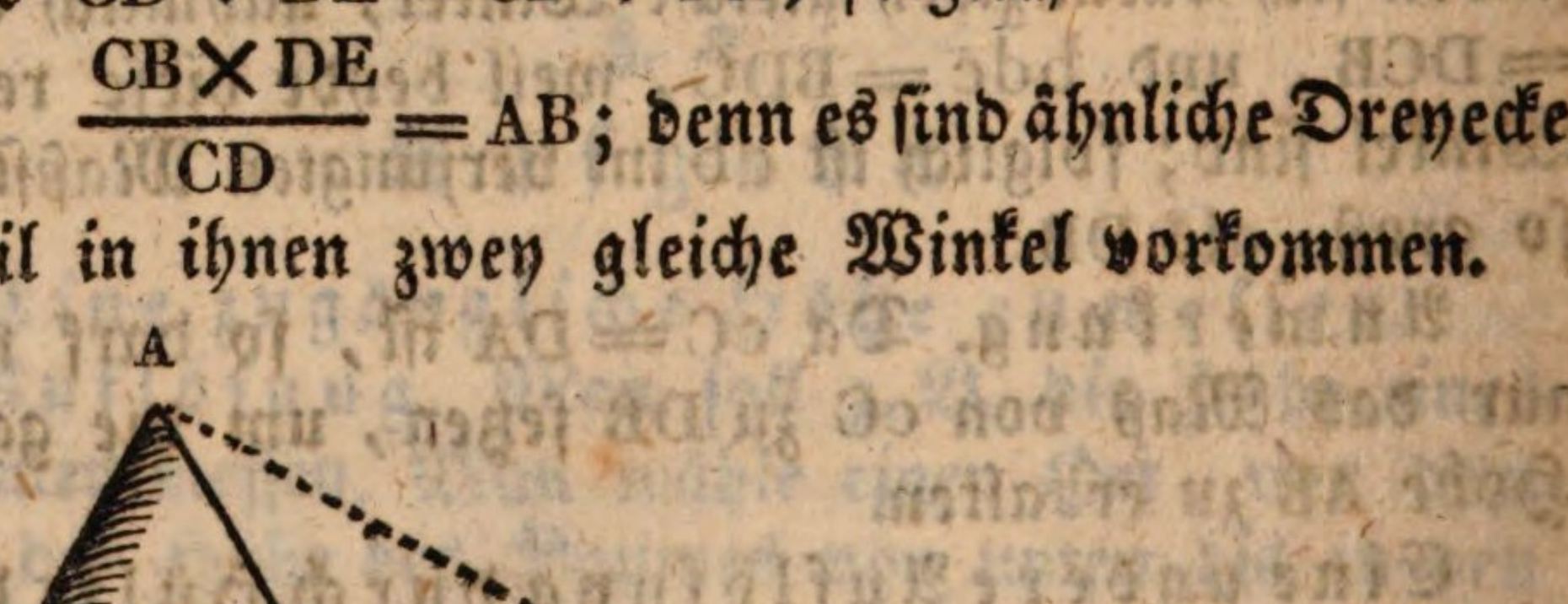
Anmerkung. Da cC = DA ist, so darf man nur das Maß von cC zu DB setzen, um die ganze Höhe AB zu erhalten.

Eine andere Auflösung durch Hülfe des Astrolabiums. Man messe mit dem Astrolabium (nach dritt. Absch. II. §. 8. 2. Anmerk.) den Winkel c und die Standlinie CA. Hierauf ziehe man auf dem Papiere eine gerade Linie, die man im verjüngten Maßstabe so groß macht, als CA, trage den Winkel c durch Hülfe des Transporteurs in den Punct c,

errichte auf den andern Endpunct der Linie auf d eine senkrechte Linie, und verlängere dieselbe bis sie den andern Schenkel des Winkels c schneidet, so enthält die Linie bd im verjüngten Maße die Größe von DB, wie es der obige Beweis darthut.

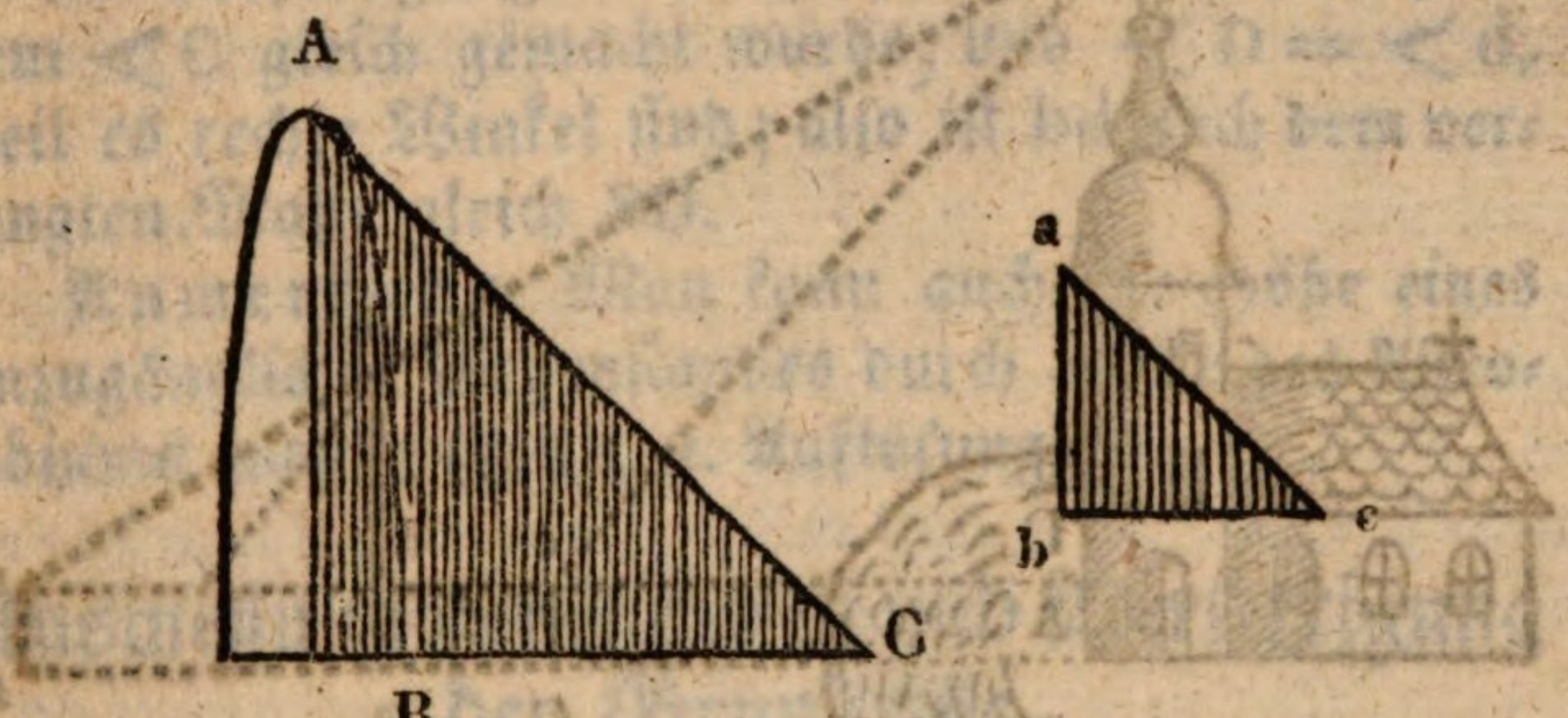
Eine andere Auflösung vermittelst eines bloßen Maßstabes. Man setzt in einiger Entfernung von der zu messenden Höhe AB einen Stab senkrecht in die Erde. Hinter diesen Stab legt man sich auf den Rücken, und bewegt sich so lange hin und her, bis man die Spitze des Stabes C mit der Spitze der zu messenden Höhe A in einer geraden Linie erblickt. Den Punct C, wo sich das Auge befindet, mit melchem man gegen die Spitzen E und A in gerader Richtung gesehen, bemerke man mit einem Stabe, wie auch die Länge desjenigen Theiles von dem eingesteckten Stabe, welcher über der Erde steht, und die Entfernung des Auges von der Höhe. Nun schließe man: Wie sich verhält die Entfernung des Stabes; so verhält sich auch die Entfernung des Auges von der zu messenden Höhe zu der Höhe selbst; also CD : DE = CB : BA, folglich

$\frac{CB \times DE}{CD} = AB$; denn es sind ähnliche Dreyecke, weil in ihnen zwey gleiche Winkel vorkommen.



Eine andere Auflösung vermittelst des Maßstabes und des Schattens eines Körpers.

Diese Operation kann nur bey Sonnenlichte oder Mondscheine, wenn nähmlich die Körper Schatten werfen, vorgenommen werden.

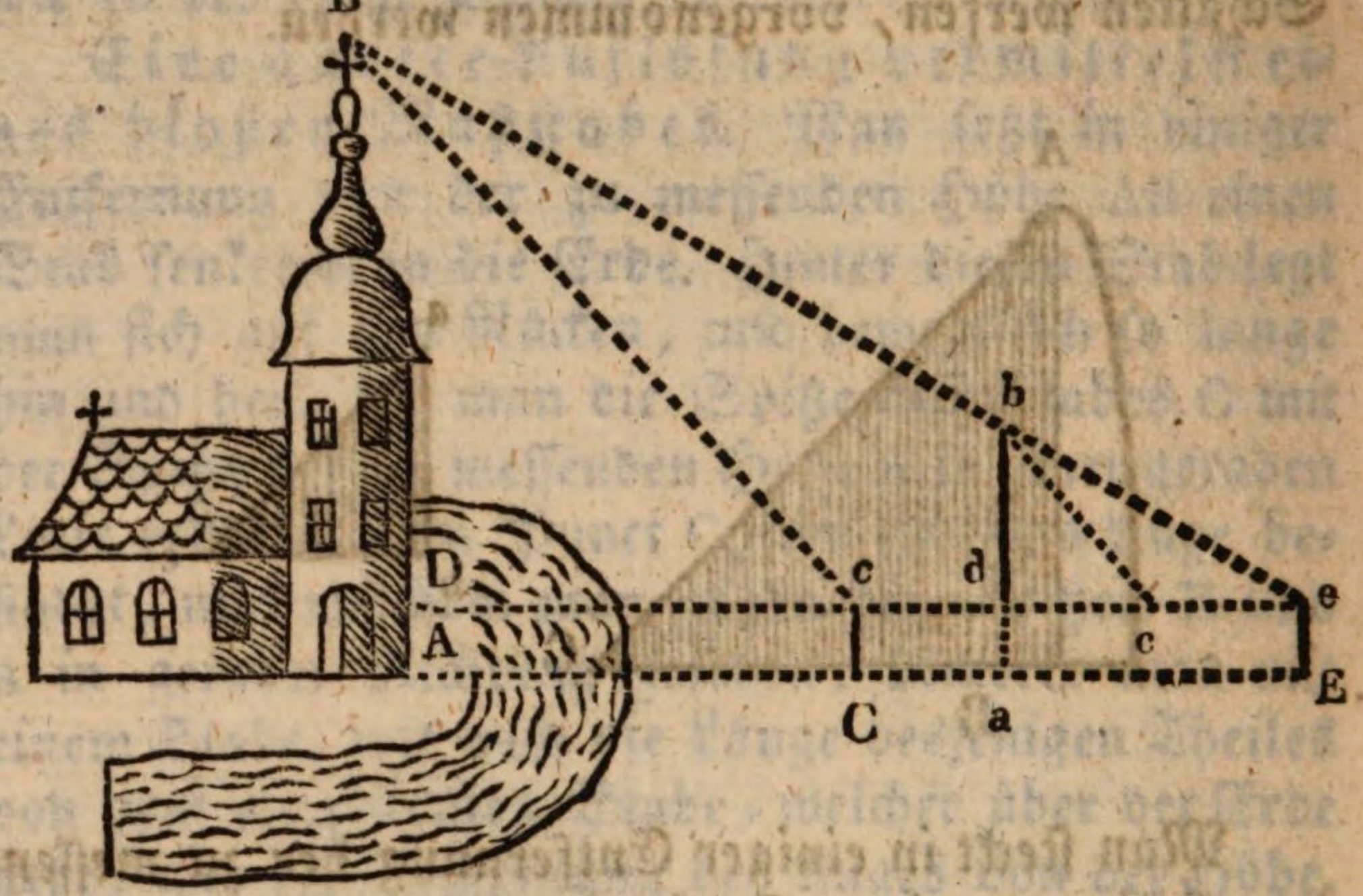


Man steckt in einiger Entfernung der zu messenden Höhe AB einen Stab ab senkrecht in die Erde, mißt alsdann den Schatten dieses Stabes bc und in demselben Augenblicke den Schatten der zu messenden Höhe BC, weil nähmlich sich der Schatten in jedem Augenblicke verändert. Darauf mißt man auch die Höhe des Stabes ab, und nun kann man vermittelst der Proportionslehre leicht die Höhe AB finden, indem man so schließt: Wie sich verhält der Schatten des Stabes zu der Länge des Stabes; so verhält sich auch der Schatten des Körpers, z. B. des Thurmes zu der Höhe desselben, d. i. cb : ba = CB : BA. Der Beweis gründet sich auf den optischen Satz, daß die Sonnenstrahlen immer in einer geraden Linie fortgehen. Die Dreyecke ACB und acb sind sich ähnlich, weil darin die Winkel ACB und acb, ferner ABC und abc einander gleich sind; folglich CB : BA = cb : ba.

§. 14.

Aufgabe.

Eine unzugängliche Höhe zu messen.



Auflösung. Es sey die Höhe des Thurmes BA zu messen, dessen Fuß wegen des dazwischen liegenden Flusses unzugänglich ist. Man wähle zwey Standorte C und E, und visire auf dem Meßtische, wie in dem Vorhergehenden, nach der Spitze und dem Fuße des Thurmes, welches auf folgende Art bewerkstelliget wird: Zuerst stelle man den Meßtisch auf den Standpunct C, und messe, wie in dem vorhergehenden Satze den Winkel BcD. Dann wähle man einen zweyten Standort E mit dem ersten C und dem Puncte A in gerader Richtung; messe CE, und trage diese Länge nach dem verjüngten Maßstabe auf den Meßtisch, so er erhält man ec. Nun stelle man den Meßtisch, wie vorher, und messe den Winkel BeD. Von c ist eine Linie nach B gezogen, und von e gleichfalls. Aus dem Durchschnittspuncte b lasse man nun auf ec eine senkrechte Linie bd fallen; so ist diese

nach dem verjüngten Maßstabe gleich BD. Um nun die ganze Höhe von AB zu erhalten, addire man zu db noch da = DA.

Beweis. Das △ BCD ∽ bcd, weil darin zwey gleiche Winkel sind, nähmlich < BCD = bcd, wie es die Verfertigung ausweiset, bey welcher der > c dem < C gleich gemacht wurde; und < D = < d, weil es rechte Winkel sind; also ist bd nach dem verjüngten Maße gleich BD.

Anmerkung. Man kann auch die Höhe eines unzugänglichen Gegenstandes durch Hülfe des Astrolabiums messen (§. 13. 2. Auflösung).

Ausmessung der Figuren und Verfertigung der Grundrisse.

§. 15.

Erklärung.

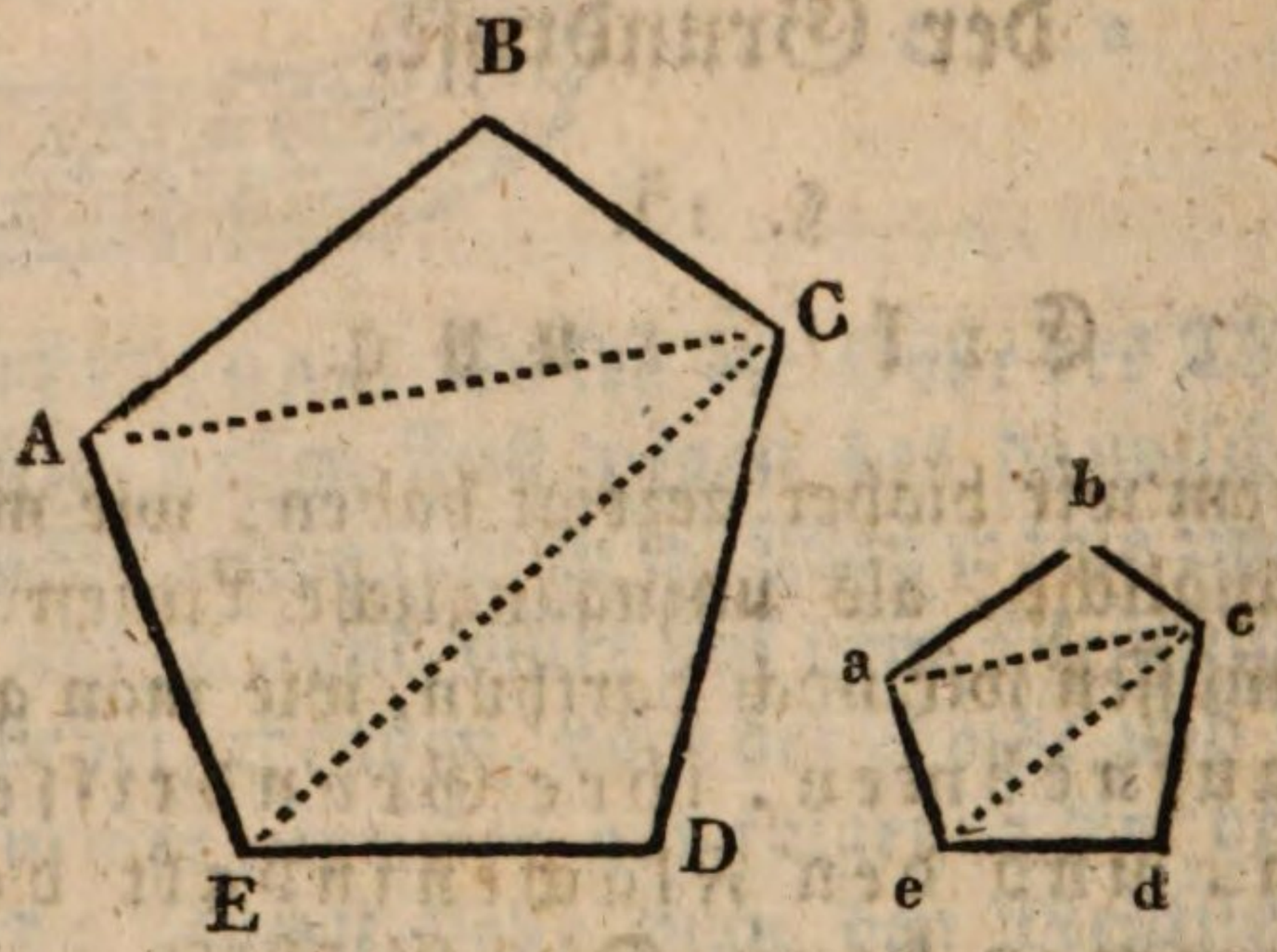
Nachdem wir bisher gezeigt haben, wie man sowohl zugängliche, als unzugängliche Linien messen kann, so müssen wir noch darthun, wie man ganze Felder aufnehmen, ihre Grundrisse verfertigen, und den Flächeninhalt derselben bestimmen kann. Dieß Geschäft macht das Hauptgeschäft eines Land- oder Feldmessers aus. Wenn z. B. ein Gutsbesitzer seine Ländereyen messen läßt, so will er nicht nur die Größe, den Flächeninhalt seiner Länder wissen, sondern er möchte auch die Verbindung, die Ordnung und Lage der Theile seiner Länder mit einem Blicke überschauen können; er möchte also einen Entwurf im Kleinen auf dem Papiere von seinen Ländereyen haben, worauf die Theile eben dieselbe Lage, eben dasselbe Verhältniß zu einander haben, wie auf dem Felde selbst. So

ein Entwurf nun, der im Kleinen ein Feld darstellt, so eine Figur, die einer größern Figur, einem Stücke von der Erdfläche ähnlich ist, nennt man einen Grundriß, einen Districtentwurf, oder eine geometrische, auch topographische Karte. Wie man ein Feld aufnehmen und einen Grundriß davon verfertigen kann, lehren die folgenden Paragraphen.

§. 16.

Aufgabe.

Ein mit geraden Linien eingeschlossenes Feld, zu dem man überall kommen kann, zu Papiere zu bringen.



Auflösung. Man soll das Stück Feld ABCDE aufnehmen, d. h. man soll auf dem Papiere eine Figur entwerfen, die der auf dem Felde ähnlich ist, und zwar unter der Bedingung, daß man überall zu ABCDE frey gehen, und alle Seiten derselben messen kann.

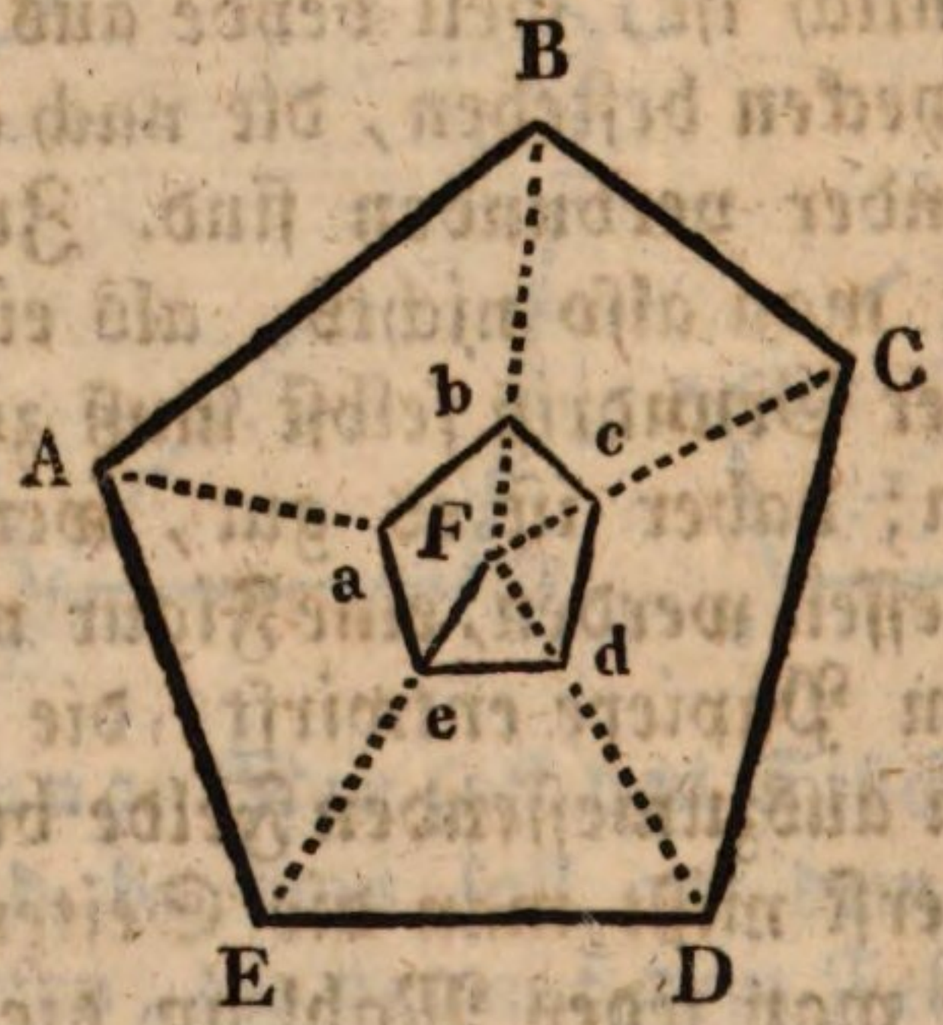
Erste Auflösung. Da man jede geradlinige Figur durch Diagonallinien in so viele Dreyecke theilen kann, als sie Seiten hat, weniger zwey, so theile man das Fünfeck ABCDE auf dem Felde durch die

Diagonallinien AC und CE in die drey Dreyecke ABC, ACE und CED, welches dadurch geschieht, daß man in alle Ecken der Figur, in A, B, C, D und E Stäbe steckt. Nun messe man die Linien AB, BC und AC, trage diese nach dem verjüngten Maßstabe auf das Papier. Man erhält das Dreyeck abc, welches dem großen Dreyecke ABC auf dem Felde ähnlich ist (zwölft. Absch. §. 10.). Um das zweyte Dreyeck ACE im verjüngten Maß zu erhalten, messe man AE und EC, verjünge diese, setze sie an ac (fünft. Absch. §. 5.); man bekommt das Dreyeck ace, welches dem großen Dreyecke ACE auf dem Felde ähnlich ist. Eben so verfahre man bey dem dritten und letzten Dreyecke ECD. Man messe ED und DC, verjünge diese Linien, und verbinde sie mit EC, so erhält man das Dreyeck ecd ∽ ECD. Auf solche Art kommt das Fünfeck abcde zum Vorscheine, welches dem Fünfecke ABCDE auf dem Felde ähnlich ist, weil beyde aus gleich vielen ähnlichen Dreyecken bestehen, die nach einerley Ordnung mit einander verbunden sind. Zu dieser Auflösung braucht man also nichts, als eine Meßkette und Stäbe. Der Grundriß selbst muß zu Hause verfertiget werden; daher ist es gut, wenn man, ehe die Seiten gemessen werden, eine Figur mit dem Bleystifte auf einem Papiere entwirft, die so beschaffen ist, daß sie dem auszumessenden Felde beyläufig ähnlich ist. Dann erst mißt man die Seiten, deren gefundenes Maß man jedes Mahl an die entsprechenden Seiten der auf dem Papiere verzeichneten Figur schreibt.

Zweyte Auflösung. Wenn sich Schwierigkeiten fänden, die Diagonallinien zu messen; so läßt sich die Figur auf dem Felde auch noch dadurch in Dreyecke zerlegen, daß man beyläufig in der Mitte derselben einen Punct F annimmt, und von demsel-

ben nach A, B, C, D und E Linien zieht, d. h. daß man FA, FB, FC, FD, FE absteckt. Diese messe man, so wie auch die Seiten der Figur AB, BC, CD, DE, EA. Hieraus setze man nun eine Figur abcde zusammen, die aus den Dreyecken aFb, bFc, cFd, dFe und eFa besteht, welche den Dreyecken der großen Figur, nähmlich AFB, BFC, CFD, DFE und EFA ähnlich sind, weil alle Seiten der kleinen und großen Dreyecke zu einander ein gleiches Verhältniß haben, indem die Seiten der kleinen Dreyecke den gleichnahmigen Seiten der großen Dreyecke im verjüngten Maße gleich gemacht wurden.

Anmerkung. Wenn Hindernisse obwalteten, die Seiten AB oder BC u. s. w. zu messen, so müßten die Winkel AFB oder BFC u. s. w. gemessen werden, woraus sich dann die Dreyecke aFb oder bFc u. s. w. bilden ließen (zwölft. Absch. §. 11.).



Dritte Auflösung. Aus einem in der Mitte des Feldes angenommenen Puncte F läßt sich das Feld auch durch den Meßtisch auf folgende Art sehr leicht in Grund legen: Man stelle über den Punct F den Meßtisch, visire mit dem Diopternlinial, ohne das Tischchen zu verrücken, nach allen Ecken des Feldes A, B, C u. s. w., die durch Stäbe ausgesteckt

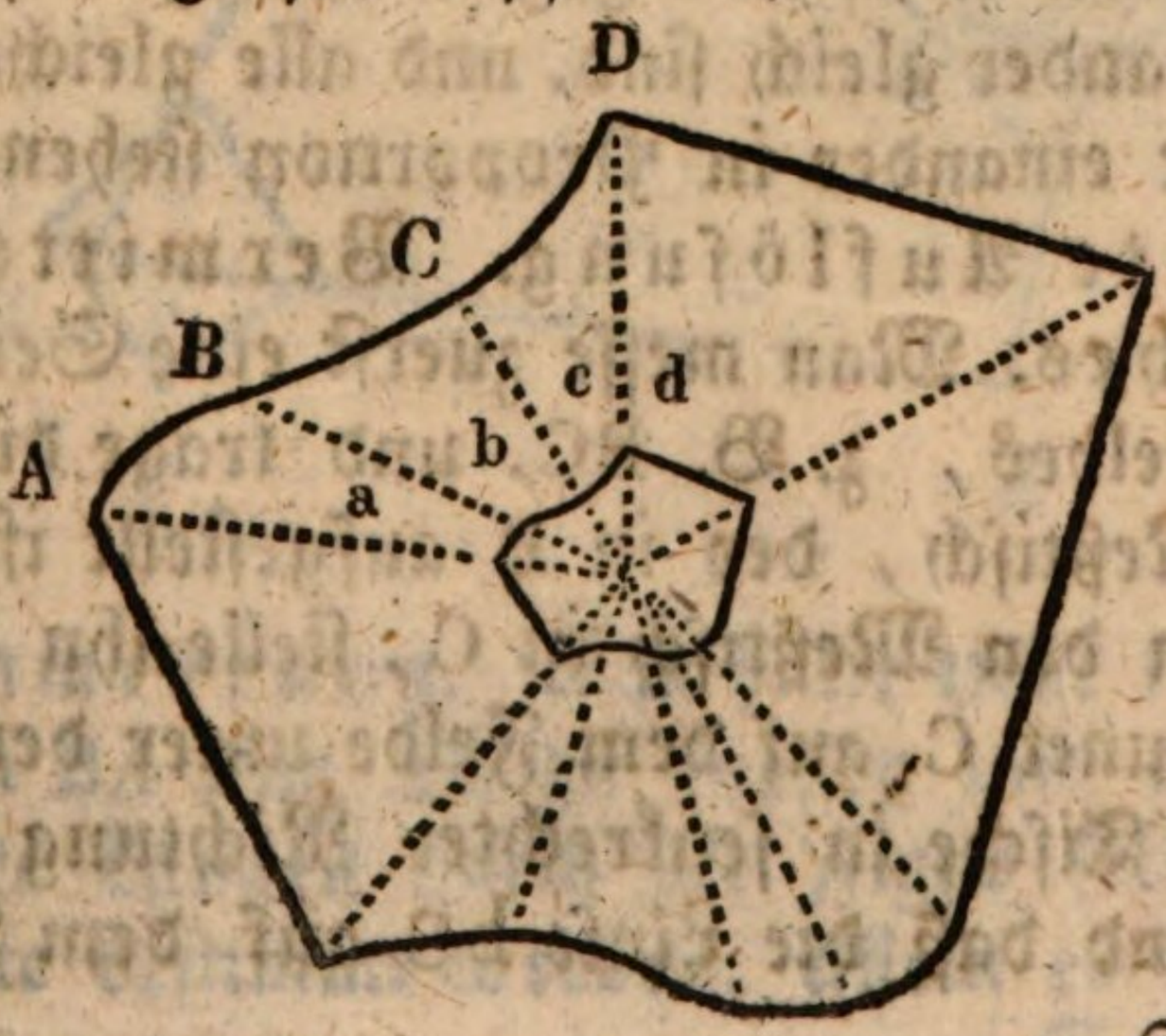
sind, und ziehe aus dem Puncte, welcher sich auf dem Tische senkrecht über den Punct F befindet, die geraden Linien Fa, Fb und so weiter von unbestimmter Länge. Auf die Schenkel der Winkel AFB, AFC u. s. w. trage man nach dem verjüngten Maßstabe die Linien FA, FB u. s. w. Alsdann verbinde man die Puncte a und b, bc u. s. w. durch gerade Linien, so muß die Figur abcde auf dem Meßtische der Figur ABCDE auf dem Felde ähnlich seyn (zwölft. Absch. §. 11.).

Vierte Auflösung. Mißt man mit dem Winkelmesser, mit dem Astrolabium, diejenigen Winkel, welche sich um den Punct F befinden, trägt dieselben durch Hülfe des Transporteurs in eben der Ordnung auf das Papier, in der sie auf dem Felde auf einander folgen, und macht, wie vorher, die Linien Fa, Fb u. s. w. nach dem verjüngten Maßstabe so groß, als AF, FB u. s. w., so muß die Figur abcde auf dem Papiere der Figur ABCDE auf dem Felde ähnlich seyn.

§. 17.

Aufgabe.

Ein Feld aufzunehmen und in Grund zu legen, das nicht von lauter geraden Linien eingeschlossen ist.



Auflösung. Man setze in die krummen Linien nahe bey einander Stäbe, damit die Biegungen unbedeutend werden, in A, B, C, D u. s. w. Vermittelst des Meßtisches, den man in den Mittelpunct des Feldes stellt, visire man nach allen Stäben, und nach dieser Richtung ziehe man gerade Linien. Hierauf messe man diese Linien, und trage sie nach dem verjüngten Maßstabe auf den Meßtisch. Auf solche Art erhält man die Puncte a, b, c, d u. s. w. Verbindet man nun diese Puncte durch gerade Linien, so erhält man eine kleine Figur, die der großen ähnlich ist.

§. 18.

Aufgabe.

Ein Feld oder einen andern Platz, in welchen man nicht kommen kann, in Grund zu legen.

Erste Auflösung. Wenn man um das gegebene Feld herum gehen kann, so darf man nur die Seiten und Winkel derselben messen, hernach durch Hülfe des verjüngten Maßstabes und des Transporteurs daraus eine Figur verfertigen, so muß die Figur auf dem Papiere der Figur auf dem Felde ähnlich seyn; weil in beyden Figuren die gleichnahmigen Winkel einander gleich sind, und alle gleichnahmigen Seiten mit einander in Proportion stehen.

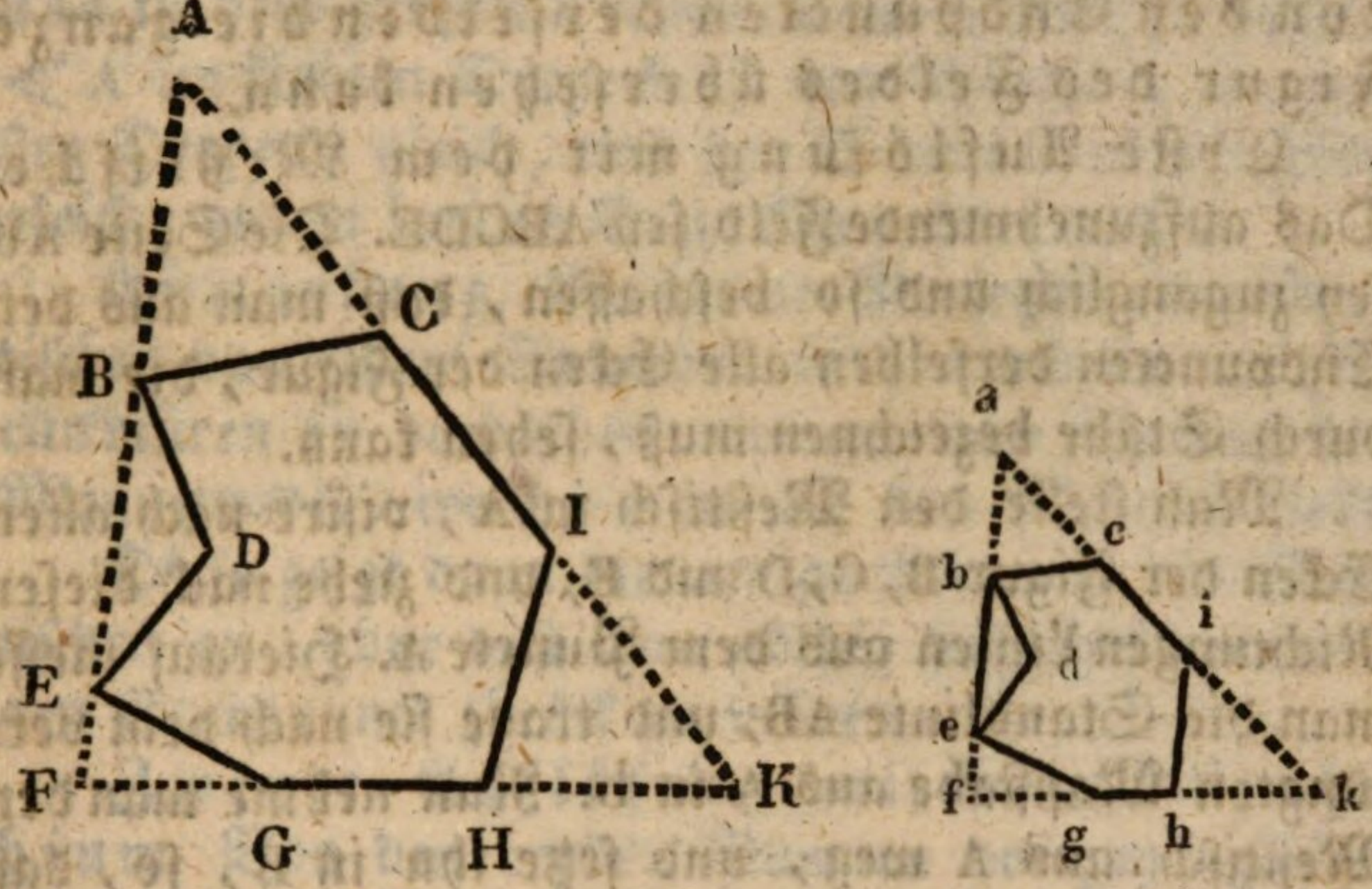
Zweyte Auflösung. Vermittelst des Meßtisches. Man messe zuerst eine Seite des gegebenen Feldes, z. B. BC, und trage diese Länge auf den Meßtisch, der in B aufgestellt ist. Von B bringe man den Meßtisch in C, stelle ihn da so auf, daß der Punct C auf dem Felde unter dem Puncte c auf dem Tische in senkrechter Richtung zu liegen komme, und daß die Linie bC auf dem Tische mit

der Linie BC auf dem Felde parallel laufe. Nun messe man die Linie CD, und setze sie auf dem Tische im verjüngten Maße von dem zweyten Standpuncte C nach D ab. Von C bringe man den Meßtisch in D, verfahre, wie vorher, visire nach E, und trage die Linie DE im verjüngten Maße auf den Meßtisch. Von D bringe man den Meßtisch über den Punct E, so, daß Ed parallel über ED zu liegen komme. Wenn man nun nach dem Standpuncte in der ersten Ecke A visirt, so bestimmt der Durchschnittspunct, der durch die Linie Ea mit der von der ersten Station ab entsteht, die erste Ecke a auf dem Papiere, die zu A auf dem Felde gehört; durch dieses Durchschneiden der Linie ab wird auf dem Papiere die Seite Ea bestimmt. Auf solche Art erhält man die Figur a b c d e, welche der großen Figur auf dem Felde ähnlich ist, weil in beyden alle gleichnahmigen Seiten in Proportion stehen, und alle gleichnahmigen Winkel einander gleich sind.

1. Anmerkung. Man hätte zwar nicht nöthig, die Linien BA und AE zu messen und aufzutragen, indem ihre Längen durch die Figur selbst auf dem Tischblatte bestimmt werden. Allein es ist doch gut,

wenn man ihre Längen mißt, und dieselben auf den Grundriß auftragt, um so zu erfahren, ob die ganze Operation richtig und ohne Fehler abgelaufen ist; denn stimmen die Längen der gemessenen Linien BA und AE in dem verjüngten Maße mit den Längen b a und a e auf dem Meßtische überein, so ist die gemachte Figur abcde richtig und ohne Fehler verfertiget.

2. Anmerkung. Bey dem eben gezeigten Verfahren ein Feld aufzunehmen sind die Fehler, welche wegen Unvollkommenheit der Werkzeuge entstehen, fast unvermeidlich. Es können bey dem Messen der Winkel, und bey dem Auftragen derselben so leicht einige Unrichtigkeiten einschleichen. Um diesen auszuweichen, kann man folgende Methode anwenden: Man schließe die Figur auf dem Felde in ein Dreyeck ein, wie es beygezeichnete Figur darthut, und bringe sie so nach dem verjüngten Maßstabe aufs Papier. Auf solche Art hat man nicht nöthig, die Winkel der Figur zu messen, indem sich diese durch das Auftragen der Linien im verjüngten Maße von selbst ergeben. Um nun den Inhalt der in dem Dreyecke eingeschlossenen Figur b d e g h i c zu bekommen, suche man zuerst den Inhalt des Dreyeckes f a k, dann der an der Figur anliegenden Dreyecke a b c, i h k, e f g, e d b; diese addire man, und ziehe ihre Summe von dem Flächeninhalte des ganzen Dreyeckes f a k ab, so gibt der Rest den Inhalt der Figur b d e g h i c.



Die Aehnlichkeit beyder Figuren läßt sich leicht darthun. Das △ AFK ∽ afk; denn fk wurde so groß gemacht, als FK, fa so groß, als FA, und ka so groß, als KA; also sind beyde Dreyecke einander ähnlich (zwölfter Abschn. §. 10.); folglich der ∠k = ∠K, und hk wurde nach dem verjüngten Maßstabe HK gleich gemacht, und ki = KI; also ist das △ ihk ∽ IHK; folglich ist der ∠ihk = ∠IHK,

und ∠IHG + ∠IHK = 180° } weil sie Nebenwin-
∠ihg + ∠ihk = 180° } kel sind.

---

also ∠IHG + ∠IHK = ∠ihg + ∠ihk.
Nun war ∠IHK = ihk; folglich ist ∠IHG = ∠ihg, und da hg in der Verjüngung so groß gemacht wurde, als HG, und hi so groß, als HI, so GH : gh = HI : hi u. s. w.

§. 19.

Aufgabe.

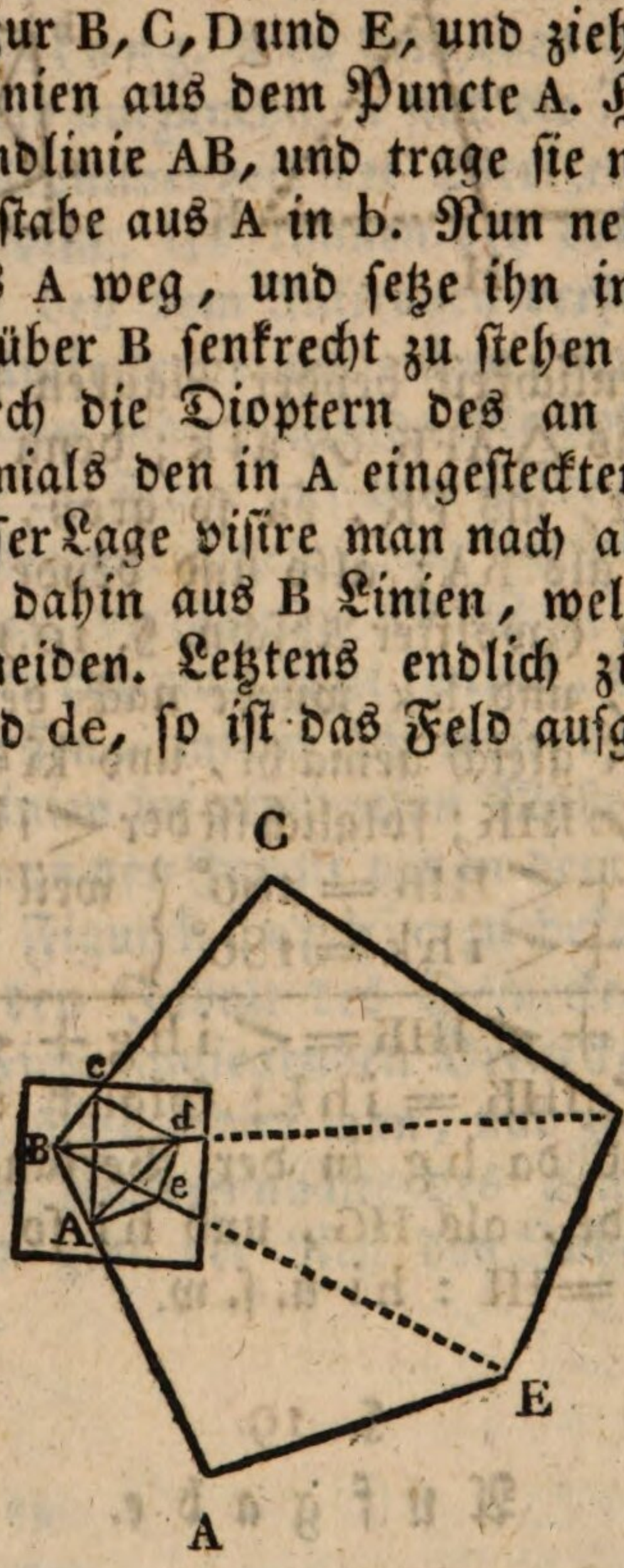
Ein Feld aufzunehmen, wovon man nur eine Seite abstecken und messen, und

von den Endpuncten derselben die ganze Figur des Feldes übersehen kann.

Erste Auflösung mit dem Meßtische.

Das aufzunehmende Feld sey ABCDE. Die Seite AB sey zugänglich und so beschaffen, daß man aus den Endpuncten derselben alle Ecken der Figur, die man durch Stäbe bezeichnen muß, sehen kann.

Man stelle den Meßtisch in A, visire nach allen Ecken der Figur B, C, D und E, und ziehe nach diesen Richtungen Linien aus dem Puncte A. Hierauf messe man die Standlinie AB, und trage sie nach dem verjüngten Maßstabe aus A in b. Nun nehme man den Meßtisch aus A weg, und setze ihn in B, so, daß der Punct b über B senkrecht zu stehen kommt, und daß man durch die Dioptern des an die Linie bA angelegten Linials den in A eingesteckten Stab sehen kann. In dieser Lage visire man nach allen Ecken der Figur, ziehe dahin aus B Linien, welche die vorigen durchschneiden. Letztens endlich ziehe man die Linien cd und de, so ist das Feld aufgenommen.



Die Aehnlichkeit beyder Figuren ABcde und ABCDE ergibt sich aus §. 11. Das kleine Dreyeck

BAe ist dem großen Dreyecke BAE ähnlich; denn der < A im kleinen Dreyecke ist dem Winkel A im großen Dreyecke gleich, und der Winkel B ist sich selbst gleich, der zu beyden Dreyecken gehört u. s. w.

Anmerkung. Um bey der Versetzung des Meßtisches von einem Standorte in den andern das Zurückvisiren zu verhüthen, bedient man sich auch der Magnetnadel, welche man auf den Meßtisch stellt.

Diese zeigt dann die vorige Richtung des Meßtisches an, ohne daß man nöthig hat, auf den vorigen Standpunct zurück zu visiren.

Zweyte Auflösung mit dem Astrolabium. Von den beyden Puncten der zugänglichen Linie AB, stelle man sich gerade Linien gegen alle Ecken des Feldes vor, und messe aus A die Winkel CAB, DAC, EAD, welche diese Linien mit einander machen. Hierauf messe man die Linie AB, ziehe auf dem Papiere eine Linie ab, welche in der Verjüngung AB gleich ist, trage an den Endpunct a mit dem Transporteur die Winkel CAB, DAC und EAD. Nun gehe man zu dem Puncte B, und messe die Winkel EBA, EBD und DBC. Diese trage man an den Punct b der vorher gezogenen Linien in eben der Ordnung, wie sie sich auf dem Felde befinden; verlängere die Schenkel derselben bis sie die Schenkel der vorigen Winkel durchschneiden, und ziehe aus den Durchschnittspuncten gerade Linien, so erhält man eine dem Felde ähnliche Figur, wie es die Verfertigung derselben ausweiset.

Anmerkung. Ich beschließe nun den Unterricht in der practischen Geometrie. Wer darüber einen weitläufigern Unterricht verlangt, den verweise ich auf das schon oben angeführte Werk von Joh. Tobias Mayer, und sollte ihm dieses zu theuer kommen, so kann er sich folgendes um ein beträchtlich wohl-

feileres Werk anschaffen: Gründliche Anleitung zur theoretischen und practischen Geometrie und Trigonometrie, von Joseph Spengler, ehemahligen öffentlichen Lehrer der Mathematik zu Dillingen. Mit 16 Kupfertafeln. Augsburg, bey Matthias Riegers sel. Buchhandlung. 1807. Noch wohlfeiler ist Böhms Anleitung zur Meßkunst.

Zweyter Theil.

Stereometrie,

oder

die Ausmessung der Körper.

Erster Abschnitt.

Von der Begränzung der Körper.

Von der Lage der Linien gegen die ebenen Flächen, und der Flächen gegen einander.

Vorerinnerung.

Da die Körper, deren Ausmessung die Stereometrie lehrt, durch Flächen eingeschlossen werden; so muß vor allen einiges von der Lage der Linien gegen die ebenen Flächen, und der Flächen gegen einander erklärt werden.

§. 1.

Erklärung.

Eine Fläche heißt eben, oder eine Ebene, wenn alle ihre Puncte so liegen, daß, wenn man was immer für zwey Puncte derselben durch eine gerade Linie verbindet, diese in der Fläche mit allen ihren Puncten zu liegen kommt. So ist z. B. das stehende Wasser eine Ebene.

§. 2.

Lehrsatz.

Wenn zwey Puncte einer geraden Linie in einer Ebene liegen, so liegt die ganze

Linie in ihr, und wenn drey Puncte, die nicht in einer geraden Linie liegen, in einer und eben derselben Fläche liegen, so liegt die ganze Figur, die durch diese drey Puncte bestimmt wird, z. B. ein Dreyeck, ein Zirkel, in eben dieser ebenen Fläche.

Der Beweis dieses Lehrsatzes gründet sich auf die ersten Begriffe, und kann auf einem jeden ebenen Tische, wo man solche Puncte annimmt, anschaulich gemacht werden; daher nehmen manche Mathematiker diesen Lehrsatz als einen Grundsatz an.

1. Zusatz. Drey Puncte, die nicht in einer geraden Linie liegen, bestimmen also die Lage einer Ebene; und ein jedes Dreyeck liegt in einer Ebene.

2. Zusatz. So wie man durch zwey Puncte nur eine einzige gerade Linie ziehen kann, so läßt sich auch durch drey Puncte nur eine Ebene legen.

3. Zusatz. Zwey gerade Linien, die sich schneiden, liegen in einer Ebene.

§. 3.

Heitschsätze.

1) Man kann durch jede drey Puncte, die nicht in einer geraden Linie liegen, und durch jeden geradlinigten Winkel eine Ebene legen.

2) Man kann durch jede zwey Parallellinien eine Ebene legen; denn die Lage zweyer Parallellinien wird durch drey Puncte bestimmt. Zwey Puncte bestimmen nähmlich die Lage der einen Linie, und ein dritter Punct bestimmt die Lage der andern Linien; also läßt sich durch die zwey Parallellinien eine Ebene legen.

3) Man kann jede Ebene nach Gefallen verlängern.

§. 4.

Erklärungen.

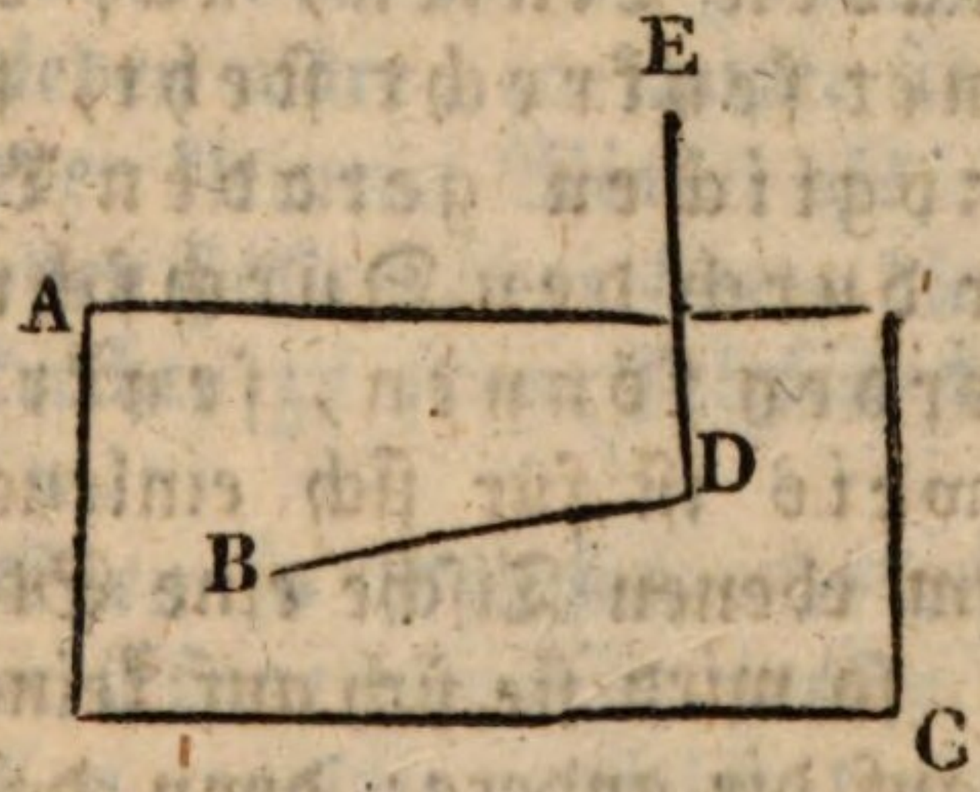
Wenn eine gerade Linie eine Ebene schneidet, so geschieht dieß nur in einem Puncte; dieser Punct heißt der Durchschnittspunct.

Wenn zwey Ebenen sich schneiden, so haben sie eine Linie mit einander gemein, und diese heißt die Durchschnittslinie. Außer dieser Linie haben sie keinen Punct mehr gemein; denn sonst würde eine Fläche die andere nicht mehr schneiden.

§. 5.

Lehrsatz.

Der Durchschnitt zweyer Ebenen ist alle Mahl eine gerade Linie.



Beweis. Die Ebene BE schneide die Ebene AC in BD. Weil die Puncte B und D in der Ebene BE liegen, so liegt die gerade Linie BD in der Ebene BE, und weil die Puncte B und D in der Ebene AC liegen, so liegt die gerade BD in AC; BD ist also die gemeinschaftliche Linie von den beyden Ebenen BE und AC; nun diese ist der Durchschnitt; also ist alle Mahl der Durchschnitt zweyer Ebenen eine gerade Linie.

Anmerkung. Der Anfänger versinnliche sich diesen Satz, und auch die vorhergehenden Sätze durch wirkliche Ebenen.

§. 6.

Erklärung.

Eine gerade Linie steht auf einer Ebene senkrecht, wenn sie mit allen geraden Linien, die in der Ebene, von dem Durchschnittspuncte aus gezogen werden können, rechte Winkel bildet.

§. 7.

Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie auf einer Ebene, oder nur auf zwey einander schneidenden geraden Linien, auf dem Durchschnittspunct senkrecht steht, so steht sie auf allen möglichen geraden Linien, die noch weiter durch den Durchschnittspunct gezogen werden können, senkrecht.

Der Beweis ist für sich einleuchtend. Wenn man auf einem ebenen Tische eine Stecknadel senkrecht aufstellt, so wird sie sich auf keine Seite mehr neigen, als auf die andere; denn darin besteht ja das Senkrechtseyn; folglich muß sie mit allen möglichen geraden Linien, die aus diesem Puncte auf dem Tische (auf der Ebene) gezogen werden können, rechte Winkel bilden; also wird und muß sie auf alle diese Linien senkrecht stehen; und eben deßwegen muß sie auch auf der ganzen Ebene senkrecht stehen.

Im entgegengesetzten Falle stände sie schief, und der Winkel, den sie mit was immer für einer Linie auf der Ebene machte, wäre kein Rechter. So ein

Winkel, den eine schief stehende Linie mit einer Linie auf einer Ebene bildet, heißt der Neigungswinkel.

Zusatz. Wenn demnach eine gerade Linie auf drey andere Linien, die in einem Puncte zusammen laufen, senkrecht steht; so liegen diese drey Linien in einer Ebene.

§. 8.

Lehrsatz.

Man kann aus einem Puncte in einer Ebene nur eine senkrechte Linie auf dieselbe errichten.

Beweis. Eine senkrechte Linie bildet mit der Linie, auf die sie gezogen wird, einen rechten Winkel; wollte man nun noch eine senkrechte auf den nähmlichen Punct der Ebene ziehen, die von der vorigen verschieden wäre, so müßte sie entweder einen größern oder kleinern Winkel als einen Rechten bilden; in beyden Fällen aber hörte die gerade Linie auf, eine senkrechte zu seyn; folglich kann nur eine senkrechte u. s. w.

Zusatz. Eben so läßt sich aus einem Puncte außerhalb einer Ebene nur eine senkrechte Linie auf diese herab fallen, welche zugleich der kürzeste Weg von dem gegebenen Puncte auf die Ebene herab ist; sie mißt daher die Entfernung eines Punctes von der Ebene.

§. 9.

Lehrsatz.

Wenn von zwey geraden parallelen Linien eine auf einer Ebene senkrecht steht, so gilt dieses auch von der andern.

Beweis. Denn stünde die andere nicht auch senkrecht auf der Ebene, so könnte sie mit der erstern nicht parallel laufen. Da aber beyde zu einander parallel laufen, so müssen sie überall gleichweit von einander abstehen, und da überdieß die eine auf der Ebene senkrecht steht, wie vorausgesetzt wird; so muß auch die andere auf eben dieser Ebene senkrecht stehen; denn sonst, wenn das nicht wäre, müßte sie sich auf die eine oder andere Seite mehr neigen, und da wäre sie nicht mehr mit der andern parallel; folglich u. s. w.

§. 10.

Lehrsatz.

Wenn zwey gerade Linien auf einer Ebene senkrecht stehen, so sind sie parallel.

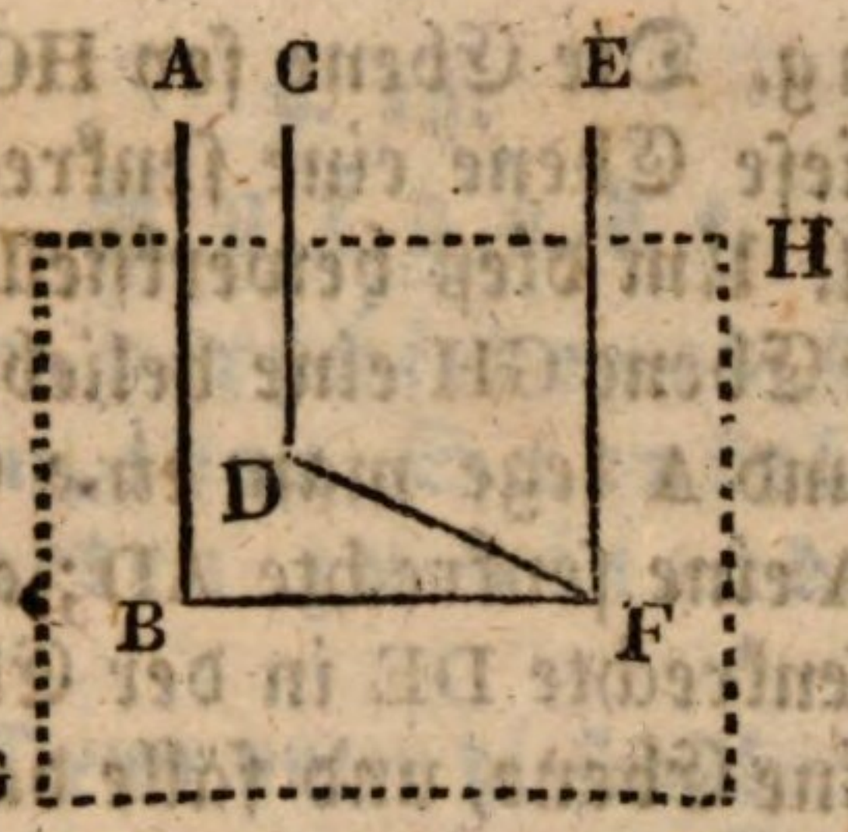
Beweis. Man ziehe von den Endpuncten dieser Linien eine gerade in der Ebene, so werden zwey Winkel entstehen, die zusammen 180° betragen, weil sie rechte Winkel sind, indem sie von zwey senkrechten Linien gebildet werden; nun aber wenn zwey Linien von einer dritten durchschnitten werden, und die inneren anliegenden Winkel = 180° sind, so laufen diese zwey Linien zu einander parallel (sechst. Absch. §. 3. 1. Lehrs.); also u. s. w.

Anmerkung. Der Beweis kann auch indirecte (aus dem Gegentheile) geführt werden.

§. 11.

Lehrsatz.

Zwey gerade Linien, die mit einer dritten, die nicht mit ihnen in einer Ebene sich befindet, parallel sind, sind unter sich parallel.

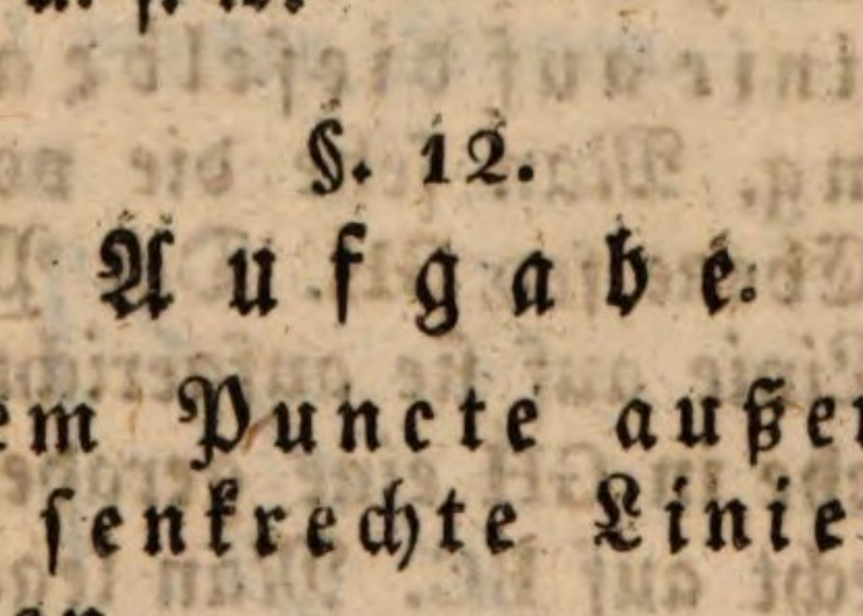


Beweis. AB und CD seyen parallel zu EF, so sollen nach dem Lehrsatze auch AB und CD zu einander parallel seyn. Man lege durch CD und EF eine Ebene, und ziehe aus der Linie DC aus einem beliebigen Puncte D eine senkrechte auf EF, nähmlich DF, eben so lege man durch AB und EF eine Ebene, und ziehe aus F auf AB die senkrechte FB; weiter lege man durch BDF eine Ebene HG, so wird auf dieselbe EF senkrecht stehen, weil sie mit ihr in F einen rechten Winkel bildet; da aber AB und CD parallel sind zu EF, wie vorausgesetzt wird, so müssen auch AB und CD auf HG senkrecht stehen (nach §. 9.); wenn aber (nach §. 10.) zwey gerade Linien, wie hier AB und CD senkrecht auf einer Ebene stehen, so sind sie parallel; also ist AB ∥ CD; also u. s. w.

§. 12.

Aufgabe.

Aus einem Puncte außerhalb einer Ebene eine senkrechte Linie auf diese herabzufällen.



Auflösung. Die Ebene sey HG, der Punct A, aus dem auf diese Ebene eine senkrechte Linie gezogen werden soll. Um dieß bewerkstelligen zu können, ziehe man in der Ebene GH eine beliebige gerade Linie BC; durch BC und A lege man eine Ebene; auf BC fälle man aus A eine senkrechte AD; aus D ziehe man ebenfalls eine senkrechte DE in der Ebene GH; durch ADE lege man eine Ebene, und fälle dann AE senkrecht auf DE, so wird AE die verlangte senkrechte Linie seyn.

Beweis. AED = R., um also zu zeigen, daß AE auf GH senkrecht ist, darf man nur nach §. 7. zeigen, daß sie noch auf einer in GH an E gezogenen Linie senkrecht steht; man ziehe zu dem Behufe FE ∥ BC. Es soll nun bewiesen werden, daß AEF = R. ADB = R. (nach der Verfertigung), EDB = R. und FE ∥ BC. Da ADB und EDB jeder = R., so steht BD auf der Ebene ADE senkrecht (nach §. 7.), und weil FE ∥ BC, so steht nach §. 9. auch FE senkrecht auf ADE; folglich AEF = R.

§. 13.

Aufgabe.

Aus einem Puncte in einer Ebene eine senkrechte Linie auf dieselbe aufzurichten.

Auflösung. Man sehe die vorige Figur an. Die gegebene Ebene sey GH. Der Punct, aus dem die senkrechte Linie auf sie aufgerichtet werden soll, sey E. Man ziehe in GH eine gerade Linie BC, und fälle ED senkrecht auf BC. Man lege durch BC eine Ebene, die mit GH einen Winkel bildet, und errichte in derselben aus D die Linie AD senkrecht auf BC, lege durch AD und DE eine Ebene, und errichte in derselben aus E die Linie AE senkrecht auf DE, so steht AE auf GH senkrecht. Der Beweis ist ganz so, wie bey der vorigen Aufgabe.

§. 14.

Aufgabe.

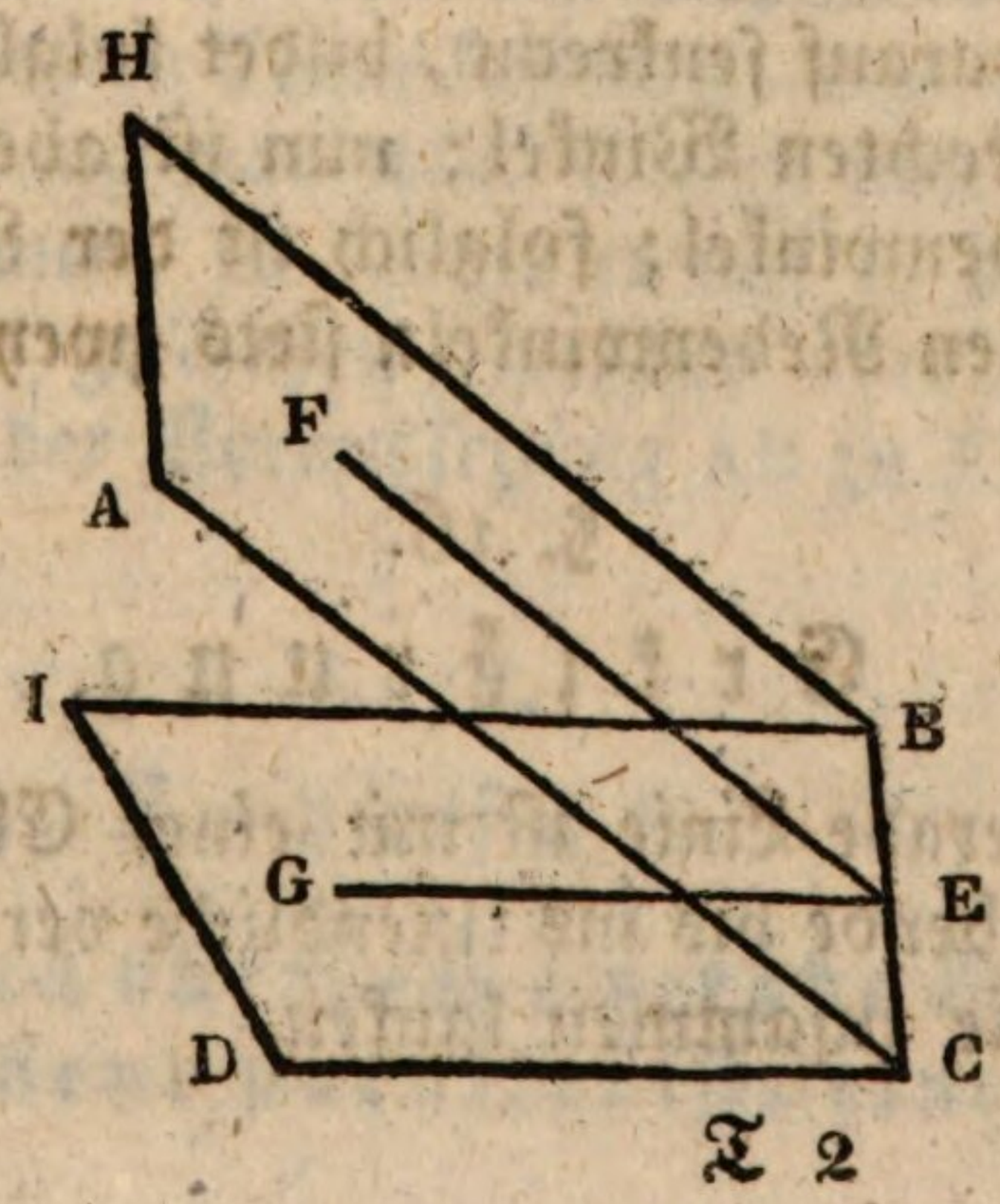
Winkel in verschiedenen Ebenen sind gleich, wenn ihre Schenkel sammt den Scheitelpuncten zu einander parallel laufen.

Beweis. Denn unter diesen Umständen muß die Neigung beyder, oder mehrerer Winkel gleich groß seyn; denn sonst hörten die Schenkel auf, zu einander parallel zu laufen; derley Winkel decken einander; folglich müssen sie einander gleich seyn.

§. 15.

Erklärung.

Wenn zwey Ebenen einander schneiden (wie z. B. die Wand und der Stubenboden, oder zwey Stück Papp-Papier, die man zusammenhält); so kann man in der Durchschnittslinie einen Punct annehmen, von welchem man in beyden Ebenen senkrechte Linien auf die Durchschnittslinie errichtet; der Winkel nun, den beyde senkrechten Linien bilden, heißt der **Neigungswinkel** beyder Ebenen.



So ist FEG der Neigungswinkel der beyden Ebenen BA und BD.

1. Zusatz. Es ist gleichgültig, wo man diesen Punct annimmt, weil jeder Neigungswinkel dem andern gleich ist; indem er mit jedem andern parallel lauft.

2. Zusatz. Ist der Neigungswinkel ein rechter, so stehen die Ebenen auf einander senkrecht, im Gegentheile aber schief.

3. Zusatz. Die Durchschnittslinie zweyer Ebenen steht auf den beyden Linien, die den Neigungswinkel bilden, senkrecht; legt man nun durch die Schenkel des Neigungswinkels eine Ebene, so steht auf diese die Durchschnittslinie senkrecht; diese Ebene nennt man die Ebene des Neigungswinkels; sie ist also jene Ebene, welche die Durchschnittslinie zweyer Ebenen senkrecht schneidet.

4. Zusatz. Es ist wieder einerley, in welchem Puncte die Ebene des Neigungswinkels die Durchschnittslinie zweyer Ebenen schneidet; sie wird immer senkrecht seyn.

5. Zusatz. Der Neigungswinkel ist alle Mahl mit seinen Nebenwinkeln = 2 R.; denn der Neigungswinkel selbst ist schon ein rechter, und die Durchschnittslinie steht darauf senkrecht, bildet folglich mit diesem auch einen rechten Winkel; nun ist aber dieser Winkel der Nebenwinkel; folglich ist der Neigungswinkel mit seinen Nebenwinkeln stets zwey rechten Winkeln gleich.

§. 16.

Erklärung.

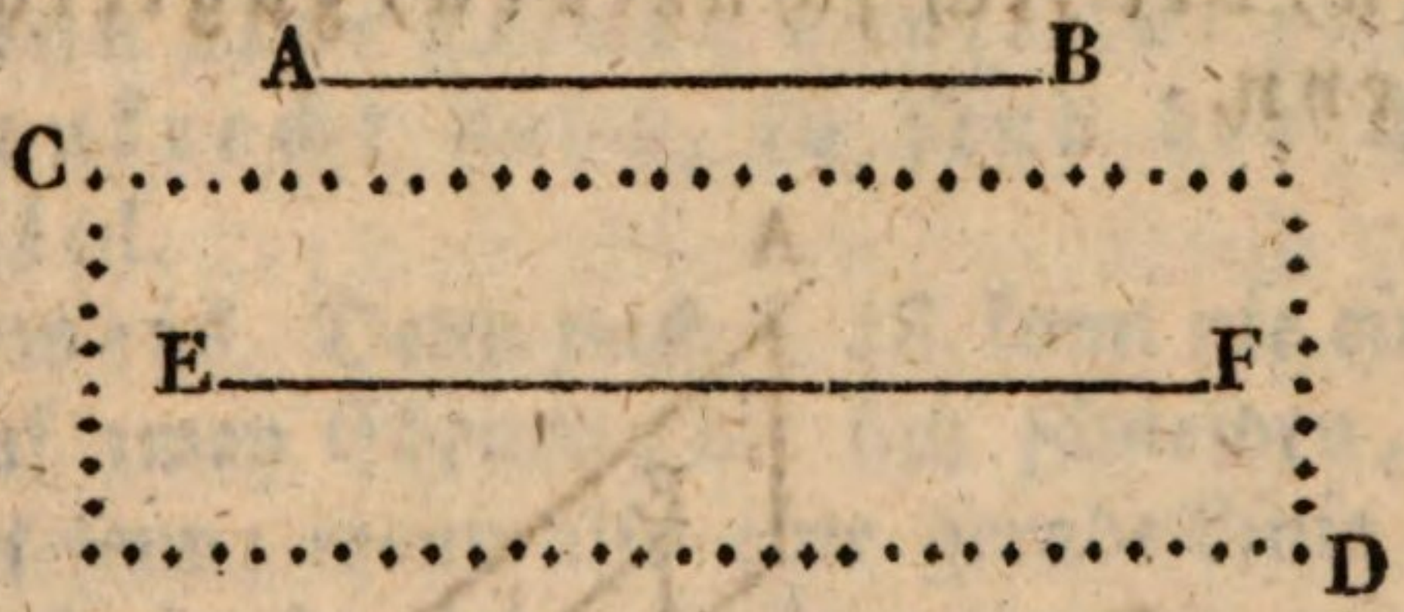
Eine gerade Linie ist mit einer Ebene parallel, wenn man beyde bis ins Unendliche verlängern kann, ohne daß sie zusammen laufen.

§. 17.

Lehrsatz.

Eine gerade Linie ist mit einer Ebene parallel, wenn sie mit einer in der Ebene gezogenen geraden Linie parallel ist.

Beweis. Denn wenn man beyde, nähmlich die Linie außer der Ebene, und die Linie inner der Ebene verlängert; so werden sie sich niemahls schneiden können, weil sie nach der Voraussetzung parallel zu einander laufen; folglich können auch die Ebene selbst, und die Linie nie zusammen kommen; also ist eine gerade Linie u. s. w.



AB soll ∥ CD seyn, wenn es ∥ mit EF ist. Man lege durch AB eine Ebene, so wird EF die Durchschnittslinie beyder Ebenen. AB muß sich beständig in der durch sie gelegten Ebene befinden, man mag beyde verlängern so lang man will. Gesetzt nun AB stieße mit CD zusammen, so könnte es nur in der Durchschnittslinie EF geschehen, welches aber unmöglich ist, weil nach der Voraussetzung AB zu EF parallel lauft.

§. 18.

Lehrsatz.

Wenn man durch eine gerade Linie, die mit einer Ebene parallel ist, eine Ebene

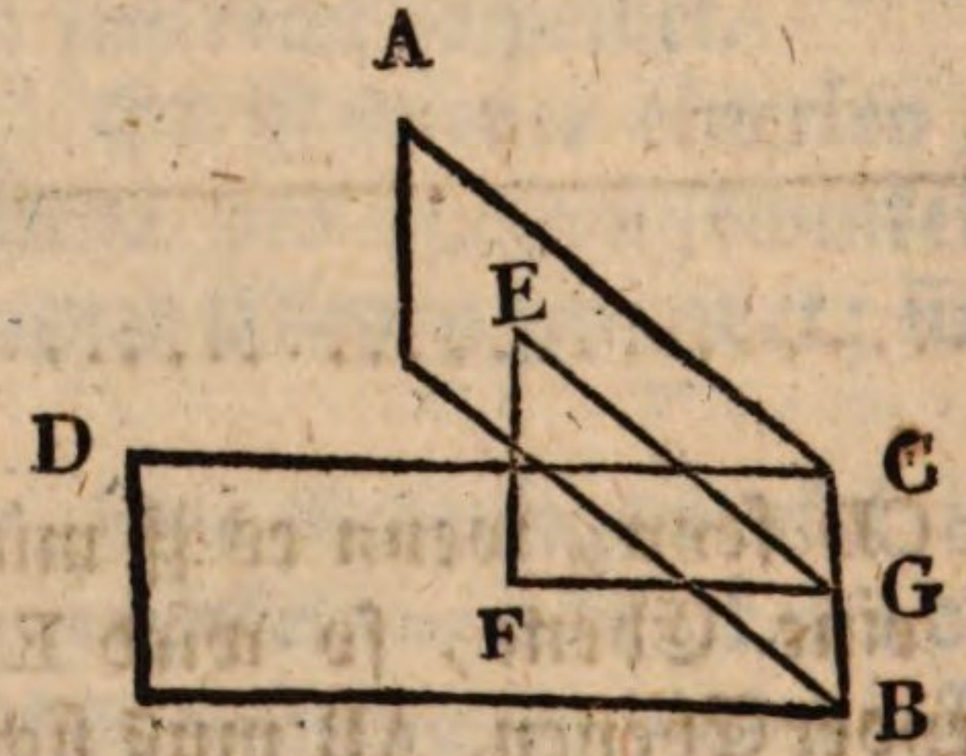
so legt, daß sie die gegebene Ebene schneidet, so ist die Durchschnittslinie mit der gegebenen geraden Linie parallel.

Beweis. Denn gesetzt die gegebene gerade Linie stieße mit der Durchschnittslinie zusammen, so könnte die Linie nicht mehr mit der Ebene parallel laufen, weil die Durchschnittslinie in der Ebene sich befindet; folglich u. s. w.

§. 19.

Lehrsatz.

Eine gerade Linie kann nicht auf zwey Ebenen, die sich schneiden, zugleich senkrecht seyn.



Beweis. Die Ebenen AB und DB schneiden sich in CB, darum kann BF nicht auf beyde senkrecht seyn; denn man nehme in CB einen Punct G an, und lege durch EF und G eine Ebene, so wird diese AB in EG, und DB in FG schneiden; auf solche Art entsteht das Dreyeck EFG; wenn nun die senkrechte EF auf AB und DB senkrecht wäre, so müßte der Winkel FEG ein rechter Winkel seyn, und EFG ist auch ein rechter, weil EF nach der Voraussetzung auf DB senkrecht steht; es käme also auf solche Art ein Dreyeck zum Vorscheine, nähmlich EFG, in welchem zwey rechte

Winkel, nähmlich EFG und FEG wären, was aber unmöglich ist; folglich u. s. w.

§. 20.

Erklärung.

Zwey Ebenen sind parallel, wenn man sie auf beyden Seiten ins Unendliche verlängern kann, ohne daß sie zusammen laufen.

§. 21.

Lehrsatz.

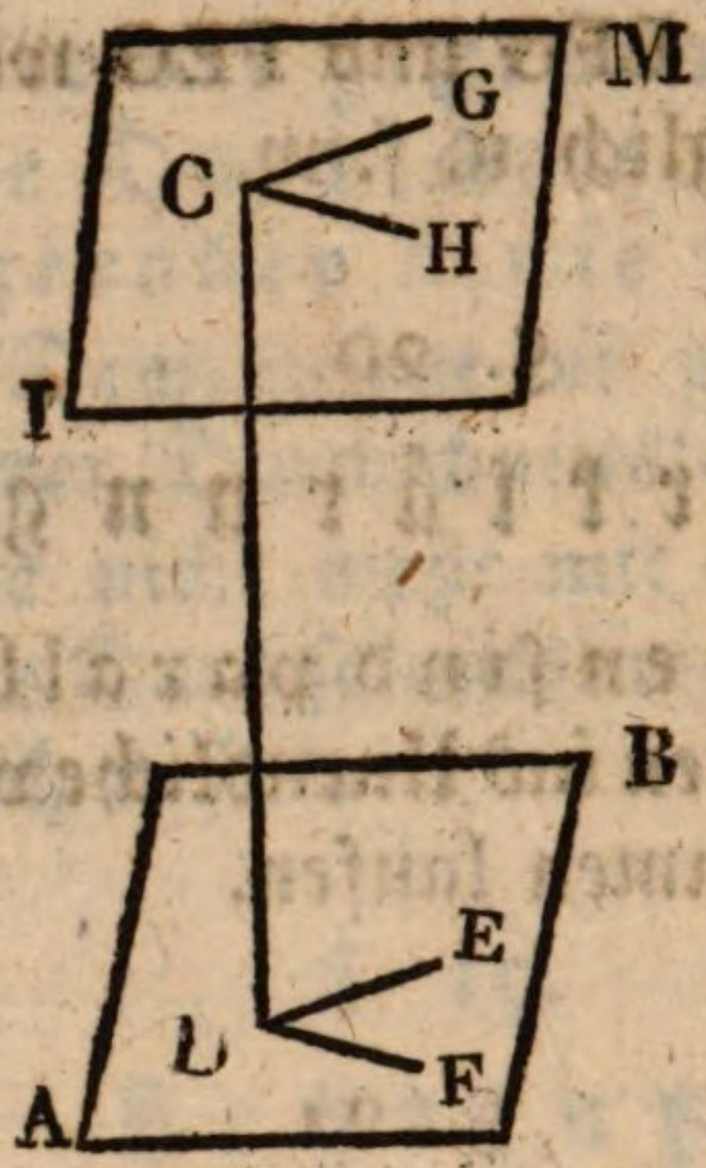
Wenn eine gerade Linie auf zwey Ebenen senkrecht steht, so sind die Ebenen parallel.

Beweis. Denn nach §. 18. kann nie eine gerade Linie auf zwey Ebenen, die sich schneiden, zugleich senkrecht seyn; wenn also eine gerade Linie auf zwey Ebenen senkrecht steht, so können diese niemahls in ihrer Verlängerung zusammen stoßen; folglich sind sie parallel.

§. 22.

Aufgabe.

Es wird eine Ebene und ein Punct außerhalb gegeben, man soll durch diesen Punct eine andere Ebene mit der ersten parallel legen.



Auflösung. Die gegebene Ebene sey AB, der Punct außer ihr C. Man fälle CD senkrecht auf AB, und ziehe in AB den Winkel EDF, lege durch CDE eine Ebene, und ziehe in ihr CG ∦ DE, auch lege man durch CDF eine Ebene, und ziehe in ihr CH ∦ DF; legt man nun durch GCH eine Ebene IM, so ist diese ∦ AB.

Beweis. Da CD senkrecht auf AB, so ist CDE = R., und CDF = R. Weil CG ∦ DE und CDE = R., so ist DCG = R, und weil CH ∦ DF und CDF = R., so ist DCH = R. Aus DCG = R. und DCH = R. ergibt sich, daß CD auf IM senkrecht, und da es auch auf AB senkrecht, so ist nach §. 20. AB ∦ IM.

§. 23.

Lehrsatz.

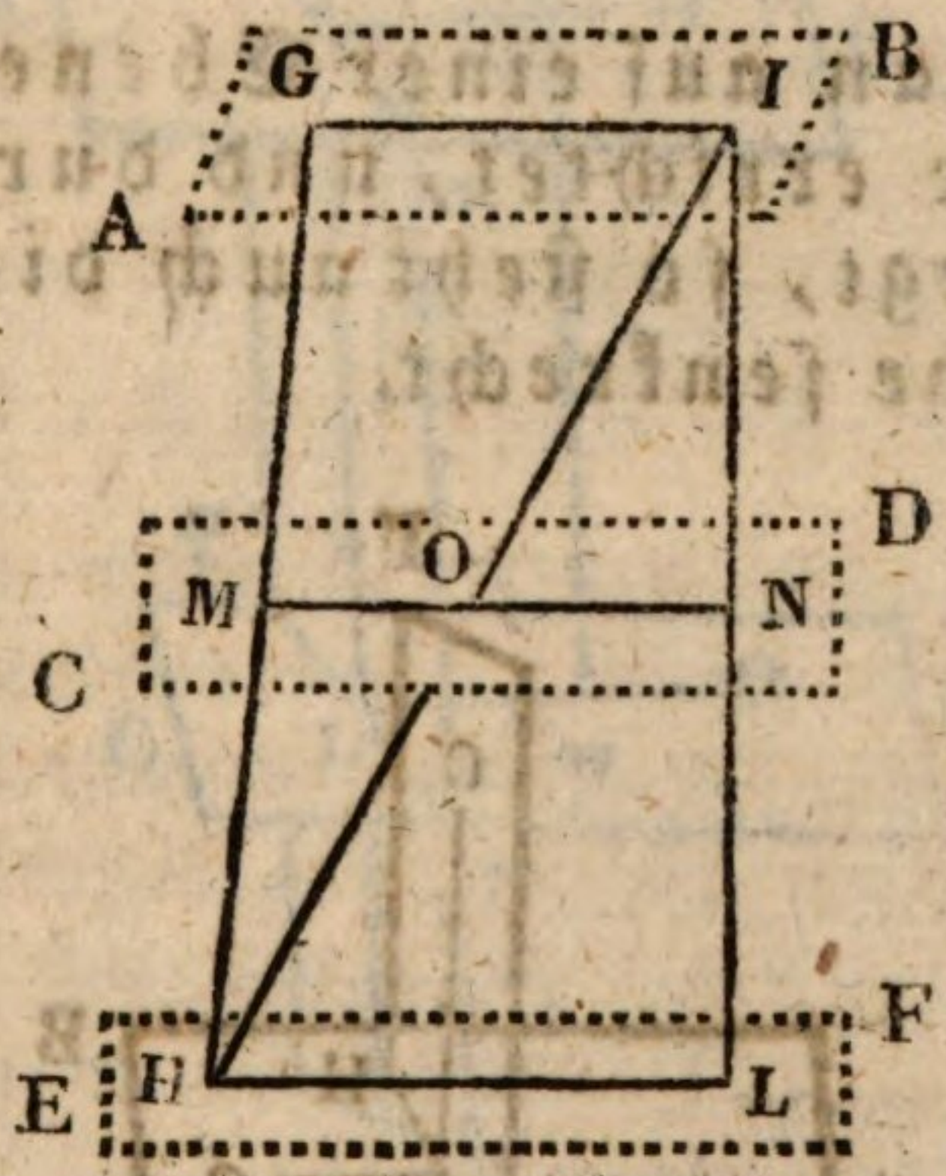
Wenn zwey parallele Ebenen von einer dritten geschnitten werden, so sind die Durchschnittslinien parallel.

Beweis. Denn die Ebenen selbst sind parallel, wie vorausgesetzt wird; die Durchschnittslinien der dritten Ebene aber befinden sich in den Ebenen, also müssen auch diese zu einander parallel laufen.

§. 24.

Lehrsatz.

Wenn man zwischen zwey parallelen Ebenen ein Paar gerade Linien so zieht, daß ein Endpunct jeder dieser geraden Linien in der einen, und der andere in der andern Ebene liegt, und man diese Linien durch eine dritte mit der vorhergehenden parallele Ebene schneidet, so stehen die abgeschnittenen Stücke der Linien in Proportion.



Beweis. AB ∥ sey EF, und die geraden Linien seyen GH und IL, die dritte Ebene, welche diese Linien schneidet, sey CD; nun sollen nach dem Lehrsatze die abgeschnittenen Stücke GM, MH, IN, NL in Proportion stehen, d. i. GM : MH = IN : NL. Um dieß beweisen zu können, ziehe man folgende Hülfslinien GI, HL und MN, jedoch so, daß sie mit einander parallel laufen; weiter ziehe man HI. Man hat hier zwey Dreyecke IHL und GHI, und in dem Dreyecke IHL ist ON parallel zu HL, in dem △ GHI ist MO ∥ GI; nun

aber, wenn man in einem Dreyecke mit einer Seite eine Parallellinie zieht, so stehen die dadurch entstandenen Stücke der beyden andern Seiten in Proportion; folglich

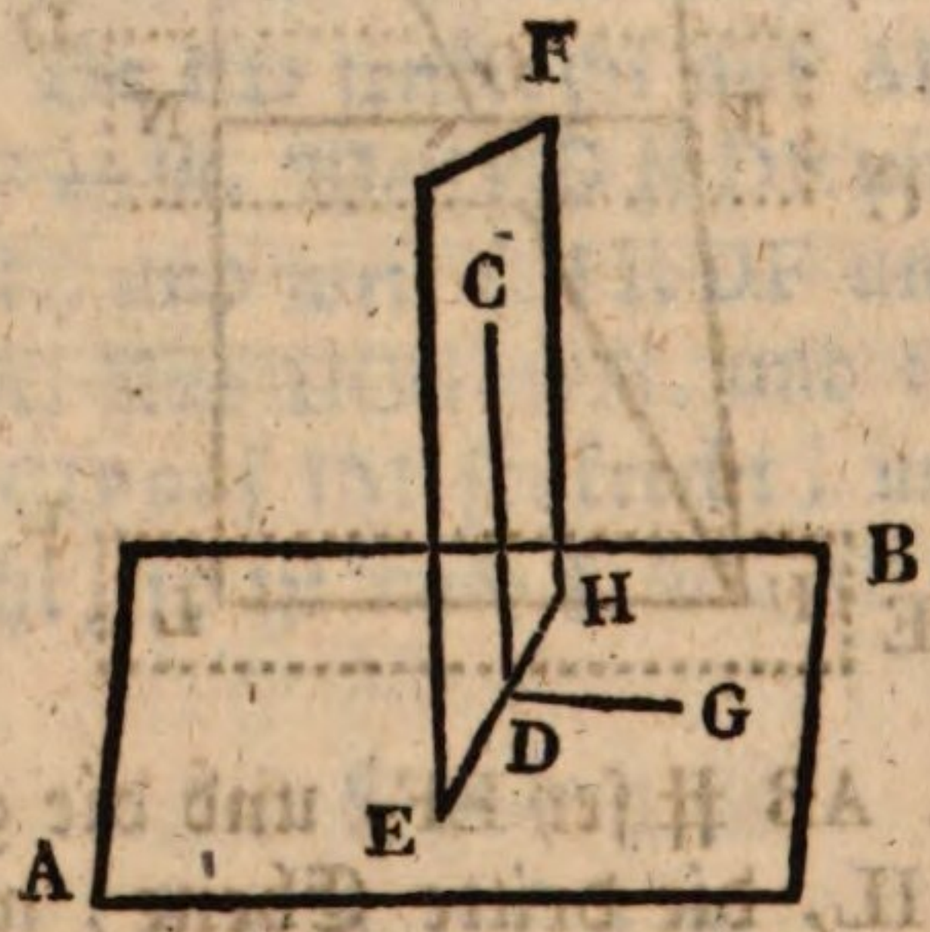
IN : NL = IO : OH
GM : MH = OH : OI

also IN : NL = GM : MH.

§. 25.

Lehrsatz.

Wenn man auf einer Ebene eine senkrechte Linie errichtet, und durch diese eine Ebene legt, so steht auch diese auf der ersten Ebene senkrecht.

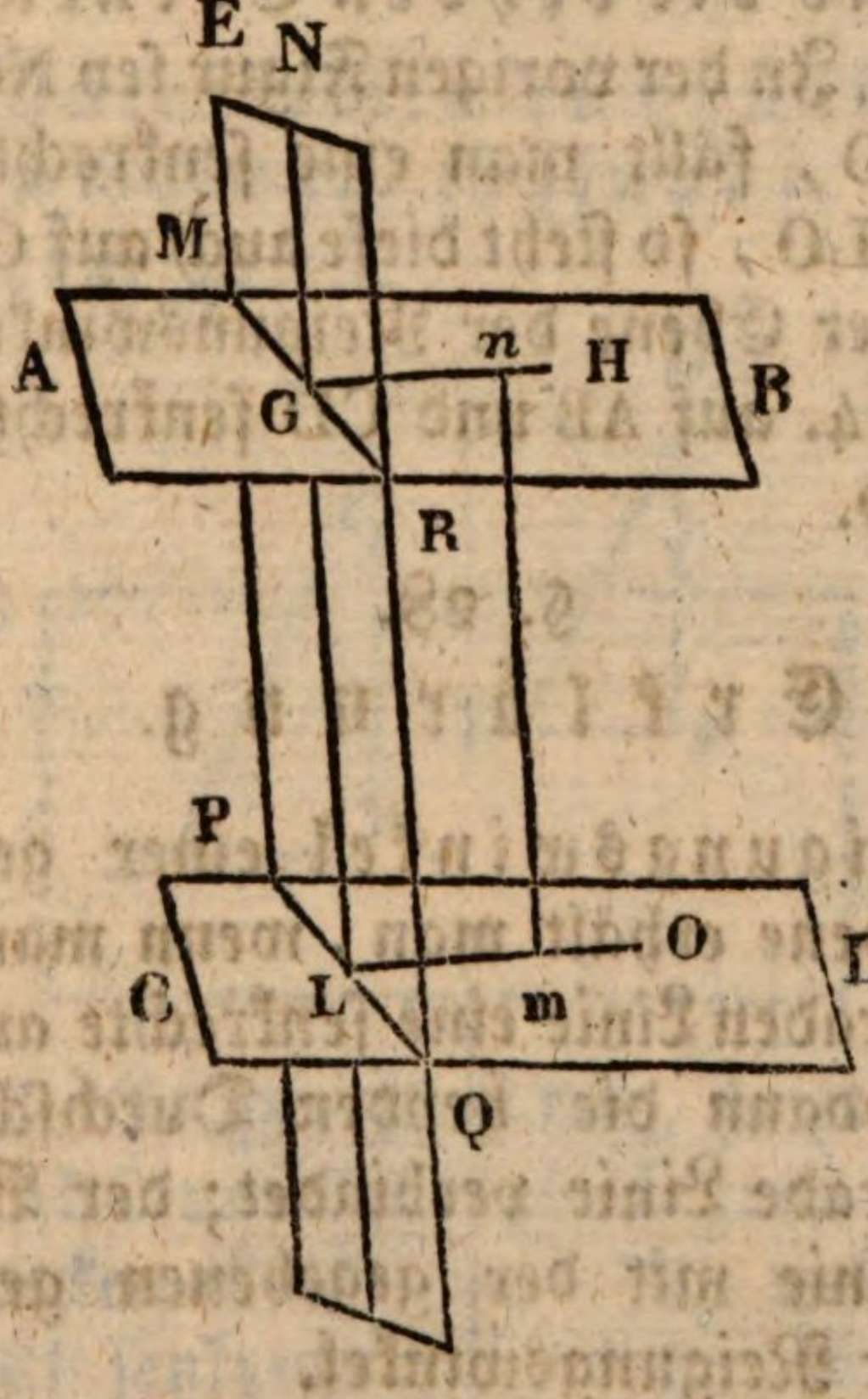


Beweis. CD stehe senkrecht auf AB, so soll die Ebene EF, die durch CD gelegt worden, auch auf AB senkrecht seyn. Man ziehe DG senkrecht auf EH der Durchschnittslinie beyder Ebenen; so ist CDG der Neigungswinkel beyder Ebenen nach §. 15., CDG aber ist = R., nach §. 10.; also stehen nach §. 15. die Ebenen senkrecht auf einander.

§. 26.

Lehrsatz.

Wenn zwey parallele Ebenen von einer dritten geschnitten werden, so sind die Neigungswinkel der schneidenden Ebene gegen beyde parallele Ebenen gleich groß.



Beweis. AB sey # CD, und EF schneide sie, so sind die Durchschnittslinien MR und PQ parallel. Man nehme in MR einen Punct G an, und ziehe GL senkrecht auf PQ, so steht GL auch auf MR senkrecht; man verlängere GL bis N, und lege durch GL eine Ebene senkrecht auf EF, so wird diese AB und CD in GH und LO schneiden, und GH ist # LO; also ist der Winkel NGH = NLO; nun aber sind eben diese Winkel die Neigungswinkel der schneidenden Ebene mit den parallelen Ebenen; also u. s. w.

§. 27.

Lehrsatz.

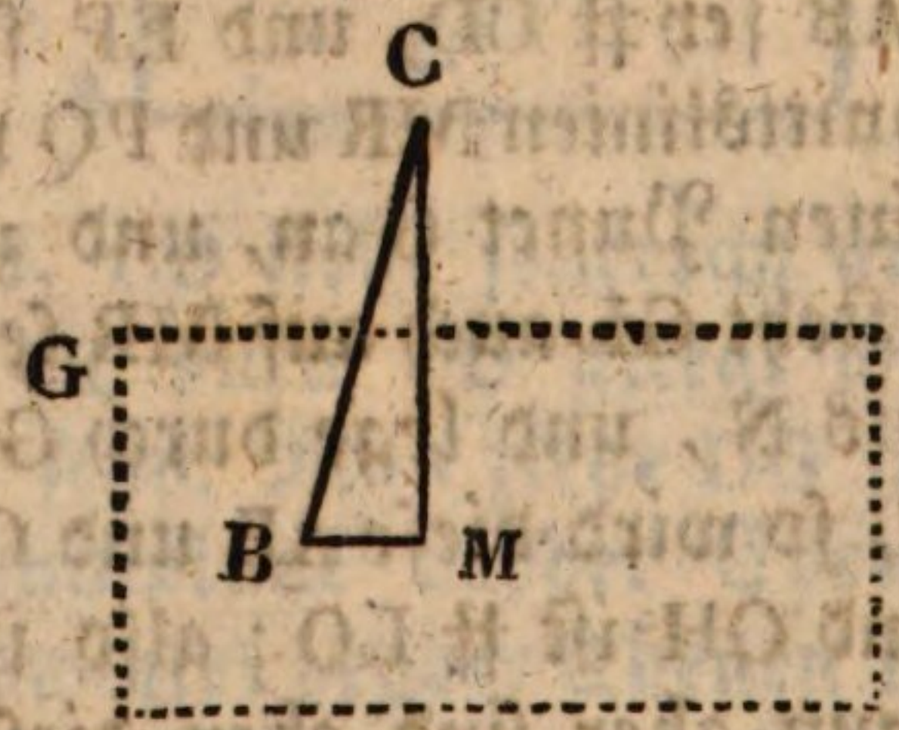
Wenn zwey Ebenen von einer dritten so geschnitten werden, daß die Durchschnittslinien parallel laufen, und die Neigungswinkel der schneidenden Ebene mit den beyden andern Ebenen gleich groß sind, so sind die beyden Ebenen parallel.

Beweis. In der vorigen Figur sey NGH = NLO, so ist GH ∥ LO, fällt man eine senkrechte Linie n m von GH nach LO, so steht diese auch auf GH senkrecht, und liegt in der Ebene der Neigungswinkel, daher ist n m nach §. 24. auf AB und CD senkrecht; also AB ∥ CD nach §. 20.

§. 28.

Erklärung.

Den Neigungswinkel einer geraden Linie gegen eine Ebene erhält man, wenn man aus einem Puncte der geraden Linie eine senkrechte auf die Ebene fällt, und sodann die beyden Durchschnittspuncte durch eine gerade Linie verbindet; der Winkel, den die letztere Linie mit der gegebenen geraden Linie macht, ist der Neigungswinkel.



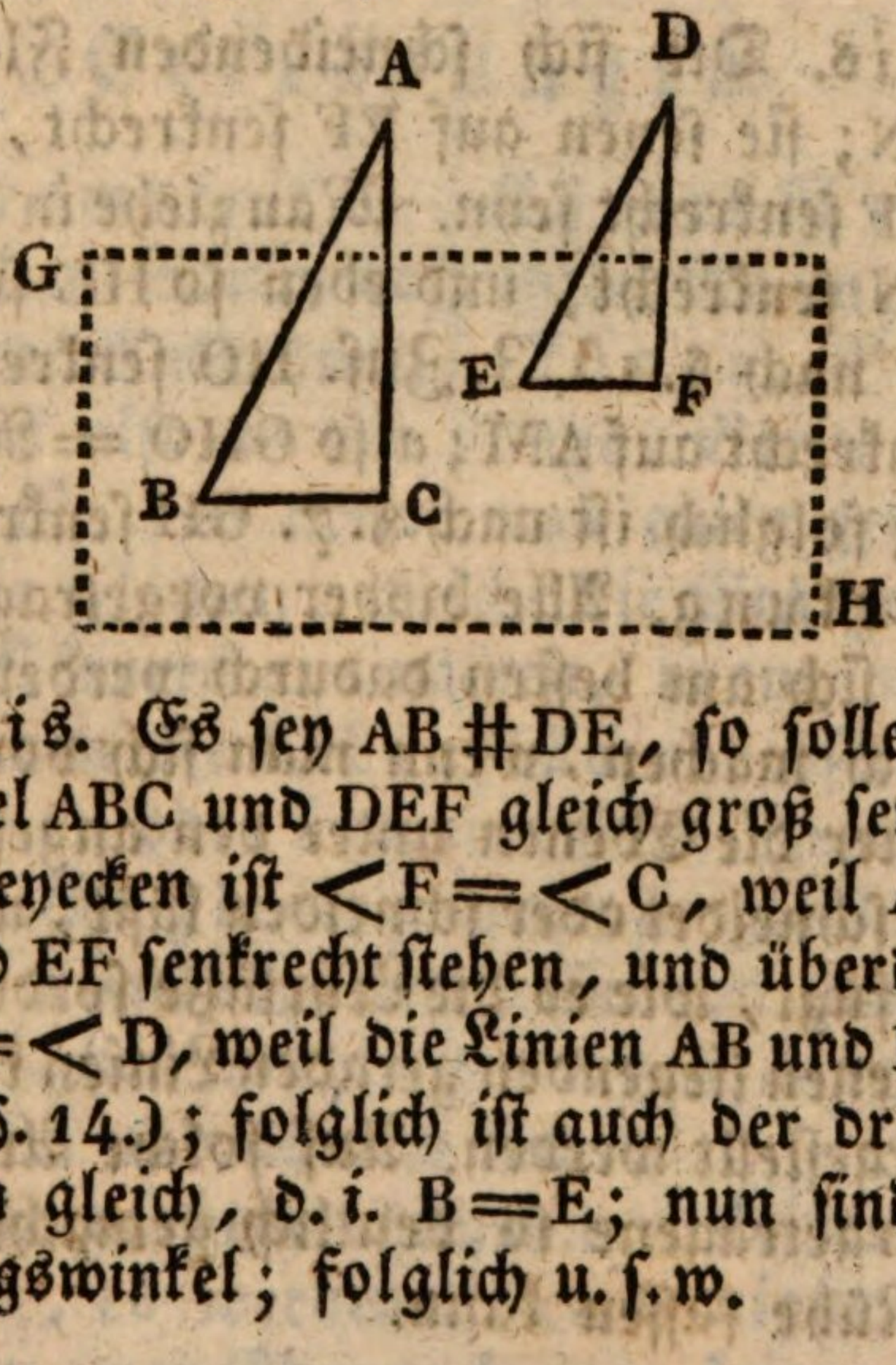
GH sey die Ebene, und BC die gerade Linie, und man will den Neigungswinkel dieser geraden Linie

gegen die Ebene finden, so nimmt man in BC einen Punct an, z. B. den Punct C, und errichtet durch denselben auf die Ebene eine senkrechte CM, die Durchschnittspuncte B und M verbinde man mit einer geraden BM, so ist der dadurch entstandene Winkel CBM der Neigungswinkel.

§. 29.

Lehrsatz.

Wenn Parallellinien von einer Ebene geschnitten werden, so sind die Neigungswinkel gleich groß.



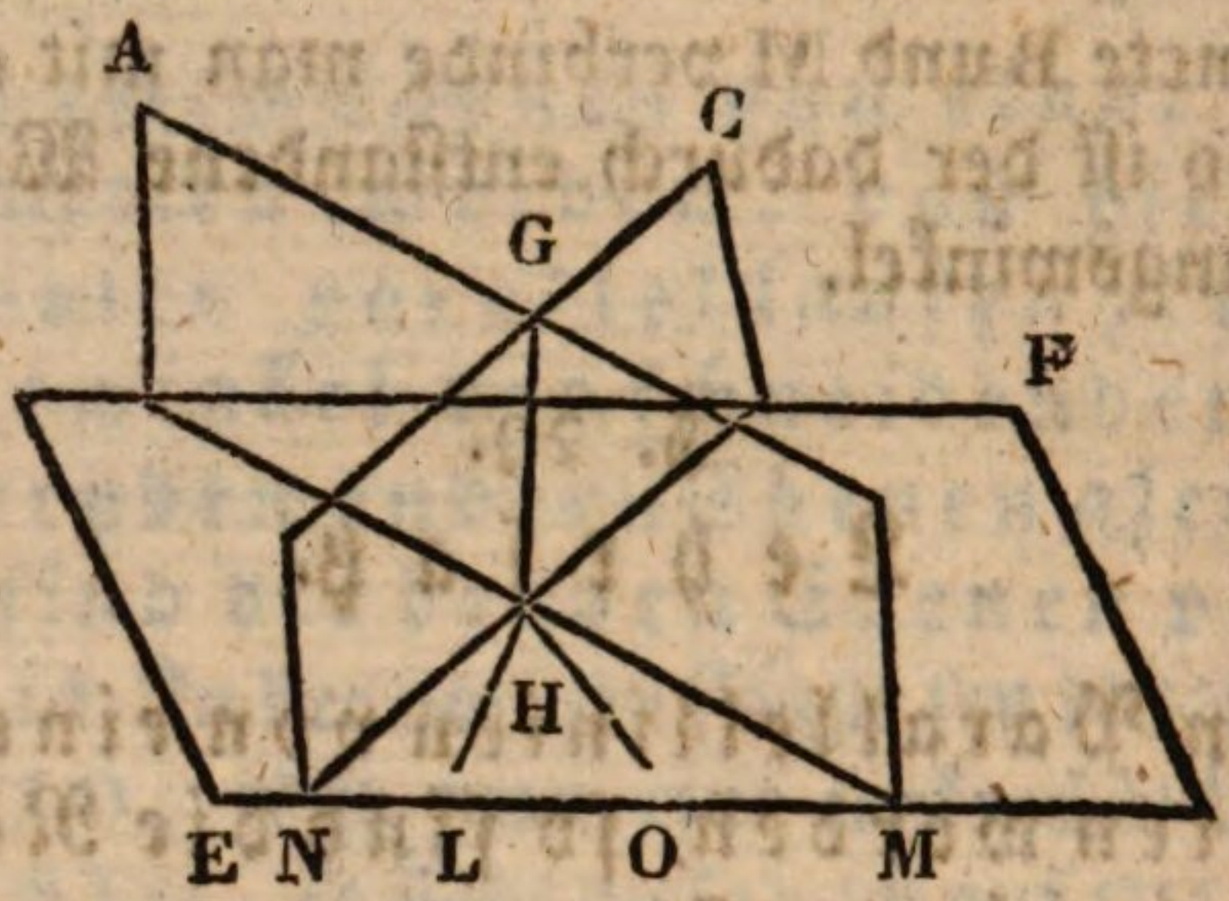
Beweis. Es sey AB ∥ DE, so sollen die Neigungswinkel ABC und DEF gleich groß seyn. In den beyden Dreyecken ist ∠F = ∠C, weil AC und DF auf BC und EF senkrecht stehen, und überdieß ist der Winkel A = ∠D, weil die Linien AB und DE parallel sind (nach §. 14.); folglich ist auch der dritte Winkel dem dritten gleich, d. i. B = E; nun sind aber dieß die Neigungswinkel; folglich u. s. w.

§. 30.

Lehrsatz.

Wenn zwey Ebenen, die sich schneiden, auf einer dritten senkrecht sind, so ist auch

ihre Durchschnittslinie auf der dritten Ebene senkrecht.



Beweis. Die sich schneidenden Flächen seyen AM und CN; sie seyen auf EF senkrecht, so soll GH auch auf EF senkrecht seyn. Man ziehe in EF die Linie HO auf HN senkrecht, und eben so HL senkrecht auf HM; so ist nach §. 15. 3. Zus. HO senkrecht auf CN, und HL senkrecht auf AM; also GHO = R., und GHL gleichfalls; folglich ist nach §. 7. GH senkrecht auf EF.

Anmerkung. Alle bisher vorgetragenen Sätze kann man sich am besten dadurch verdeutlichen und leicht faßlich machen, wenn man sich von Holz oder Kartenpapier die Ebenen unter den angeführten Bedingungen schneidet oder schneiden läßt, und solche so zusammen fügt, wie es die Lehrsätze fordern. Die außer den Ebenen liegenden geraden Linien können durch Fäden vorgestellt werden. Auf solche Art wird alles bisher Vorgetragene so deutlich gemacht, daß man es ohne Mühe fassen kann.

Zweyter Abschnitt.

Erklärung der merkwürdigsten geometrischen Körper und ihre Eigenschaften.

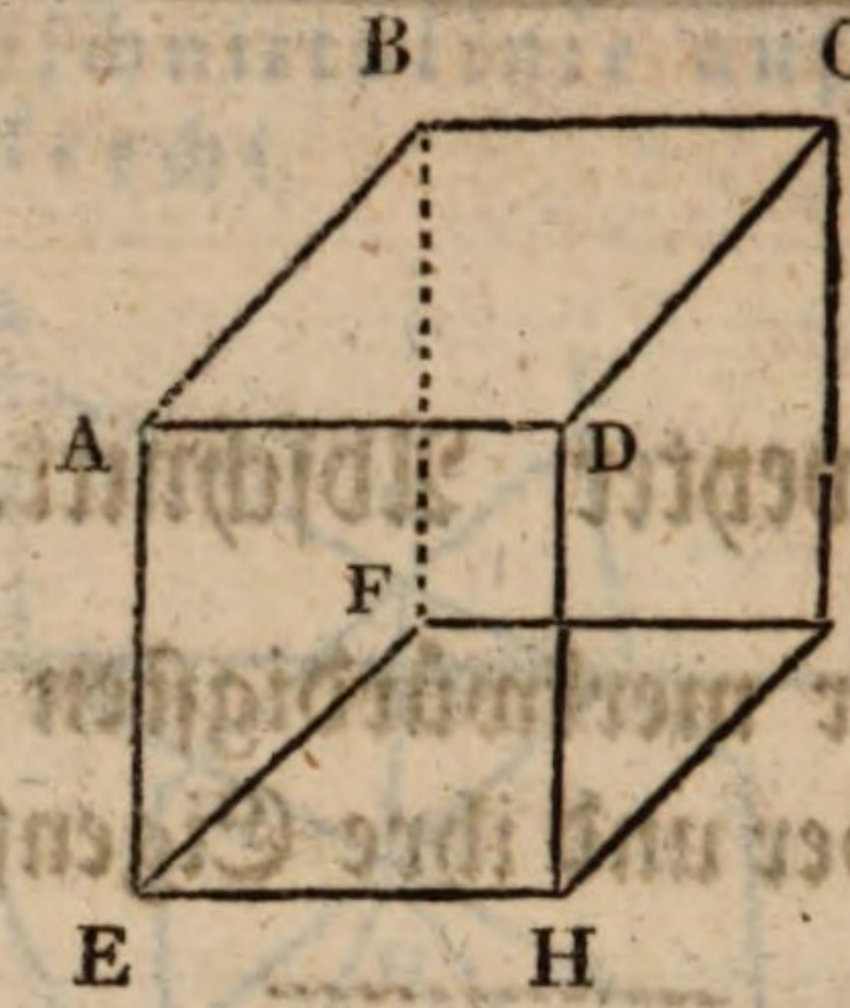
§. 1.

Erklärungen.

Ein geometrischer Körper ist ein von Flächen nach allen Seiten begränzter Raum; er hat also eine dreyfache Ausdehnung: Länge, Breite und Höhe; was also in die Länge, Breite und Höhe ausgedehnt ist, das nennt man einen geometrischen Körper. Die Flächen, welche die Gränzen des geometrischen Körpers ausmachen, nennt man zusammen genommen die Oberfläche desselben. Diese kann nun eben oder krumm seyn. Zwey geometrische Körper sind gleich, wenn sie gleichviel Raum einnehmen; ähnlich, wenn sie von gleichviel und ähnlichen Flächen begränzt werden; congruent, wenn sie gleich und ähnlich sind.

Eine, zwey Ebenen bilden noch keinen geometrischen Körper, es werden deren wenigstens drey erfordert; denn zwey Ebenen können keinen Raum einschließen.

Man kann dieses mit Kartenpapier anschaulicher machen, indem man vermittelst desselben einen körperlichen Winkel bildet.



Die zwey Ebenen, auf deren einer der Körper ruhet, und deren die andere gegen oben zugekehrt ist, etwa wie bey Gefäßen Deckel und Boden, heißen Grundflächen, wie z. B. EFGH und ABCD.

Die übrigen Flächen, womit der Körper eingeschlossen ist, heißen seine Seitenflächen. So sind in dem obigen Körper AEHD, DHGC, CGFB und BFEA Seitenflächen.

Die Linien; wo die Seitenflächen zusammen stoßen, z. B. AE, AB, BF u. s. w., heißen Seitenlinien oder Seitenkanten des Körpers, und der Punct an der Oberfläche, z. B. der Punct A, der Punct B u. s. w., wo drey oder mehrere Ebenen sich vereinigen, heißt der körperliche Winkel oder die Ecke. So bilden z. B. die Wände und der Boden des Zimmers bey dem Puncte, wo sie zusammen stoßen, einen körperlichen Winkel.

Je nachdem die Oberfläche eines Körpers beschaffen ist, so hat er auch verschiedene Nahmen. Ein Körper heißt glatt, so fern seine Oberfläche lauter ebene Flächen; kantig, so fern sie Flächenwinkel; eckigt, so fern sie körperliche Ecken; rund, so fern sie krumme Flächen enthält; ganz rund, wenn sie eine einzige krumme Fläche ist, wie bey einer Kugel; ganz

eckigt, wenn sie aus lauter ebenen Figuren besteht, wie bey dem oben angeführten Körper, und von vermischter Gestalt, wenn sie weder ganz eckigt, noch ganz rund ist.

§. 2.

Wie ein geometrischer Körper entsteht.

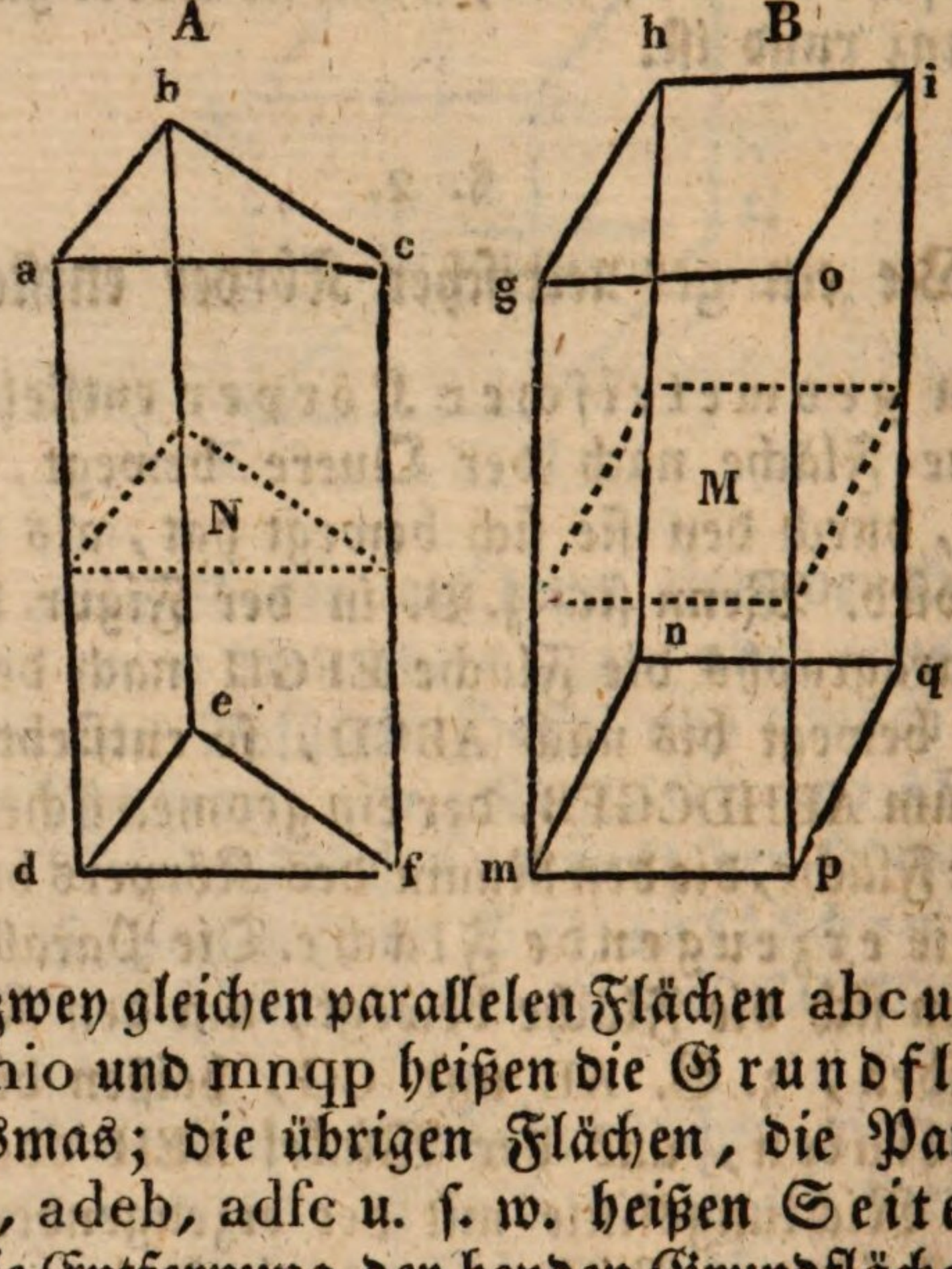
Ein geometrischer Körper entsteht, wenn sich eine Fläche nach der Quere bewegt, und der Raum, durch den sie sich bewegt hat, als stetig gedacht wird. Wenn sich z. B. in der Figur des vorigen Paragraphs die Fläche EFGH nach der Quere hinauf bewegt bis nach ABCD, so entsteht dadurch der Raum AEHDCGFB, der ein geometrischer Körper ist. Die Fläche, die den Raum des Körpers beschreibt, heißt die erzeugende Fläche. Die Parallellinien, an denen sich die Fläche bewegt, um den Körper zu beschreiben, z. B. AE und CG, heißen die Richtungslinien, und der Winkel AEH oder AHD, den die Richtungslinie mit der erzeugenden Fläche macht, heißt der Richtungswinkel.

§. 3.

Wie ein Prisma entsteht, und dessen Erklärung.

Wenn sich eine geradlinigte Figur (ein Dreyeck, ein Parallelogramm, oder ein Vieleck) an einer geraden Linie immer parallel hinauf bewegt, so heißt der Raum, der dadurch beschrieben wird, ein Prisma oder eine Eckſäule. Ein Prisma ist also ein solcher geometrischer Körper, der oben und unten zwey congruente geradlinigte Figuren zu seinen Grundflächen hat, und der auf den Seiten durch so viele Parallelogramme eingeschlossen ist, als jede

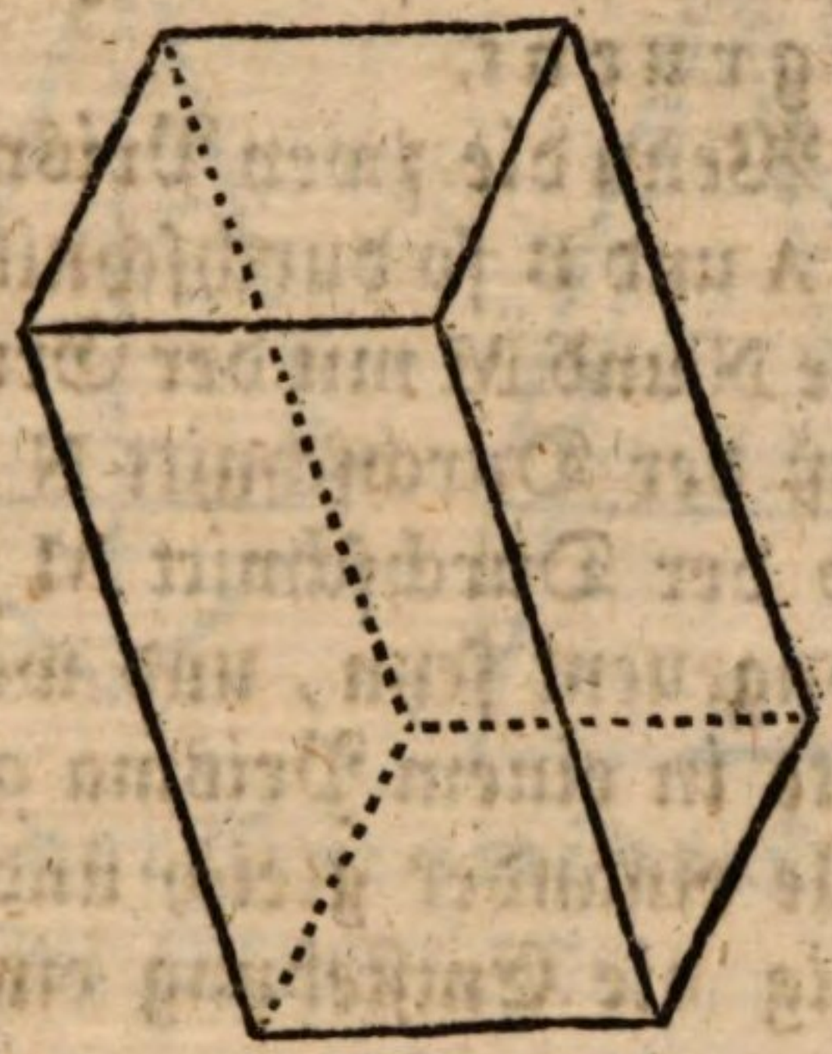
der Grundflächen Seiten hat, wie es die beygezeichneten Figuren A und B darthun.



Die zwey gleichen parallelen Flächen abc und def, ferner ghio und mnqp heißen die Grundflächen des Prismas; die übrigen Flächen, die Parallelogramme, adeb, adfc u. s. w. heißen Seitenflächen; die Entfernung der beyden Grundflächen heißt die Höhe des Prismas.

Dem Prisma kommen manche besondere Nahmen zu, nach der Lage der Seitenflächen, die größtentheils von der Gestalt der Grundfläche abhängt. Sind die Grundflächen Parallelogramme, so sind die gegenüber stehenden Seitenflächen parallel, und das Prisma heißt dann ein Parallelepipedum. Ein Parallelepipedum hat also sechs Parallelogramme zu seinen Gränzen, und wovon immer zwey und zwey, die einander gegenüber stehen, gleich sind. So ist B ein Parallelepipedum. Es ist ein senkrechtes, wenn die Seitenflächen auf der Grundfläche senkrecht stehen. Außerdem ist es ein schiefes oder geneigtes.

Zum Beyspiel.



Hat ein senkrechtes Parallelepipedum ein Rechteck zur Grundfläche, so ist es rechtwinkligt.

Sind sowohl die Seitenflächen, als die Grundflächen Quadrate, so ist es ein Würfel (Cubus). Der Würfel hat also sechs Quadrate zu seinen Gränzen, und gehört unter die Classe der rechtwinkligten Prismen, oder der Parallelepipeden. So viel Seiten oder Winkel die Grundfläche hat, eben so viel Seitenflächen hat das Prisma.

Es ist leicht verständlich, was ein dreyeckigtes, fünfeckigtes, sechseckigtes u.s.w. Prisma ist. Ob es senkrecht sey, hängt begreiflich davon ab, ob die Seitenflächen auf der Grundfläche senkrecht stehen.

Ist die Grundfläche ein reguläres Sechseck, so heißt das Prisma regulär.

§. 4.

Lehrsatz.

Alle möglichen Durchschnitte in einem jeden Prisma, welche in demselben parallel mit den Grundflächen gemacht wer-

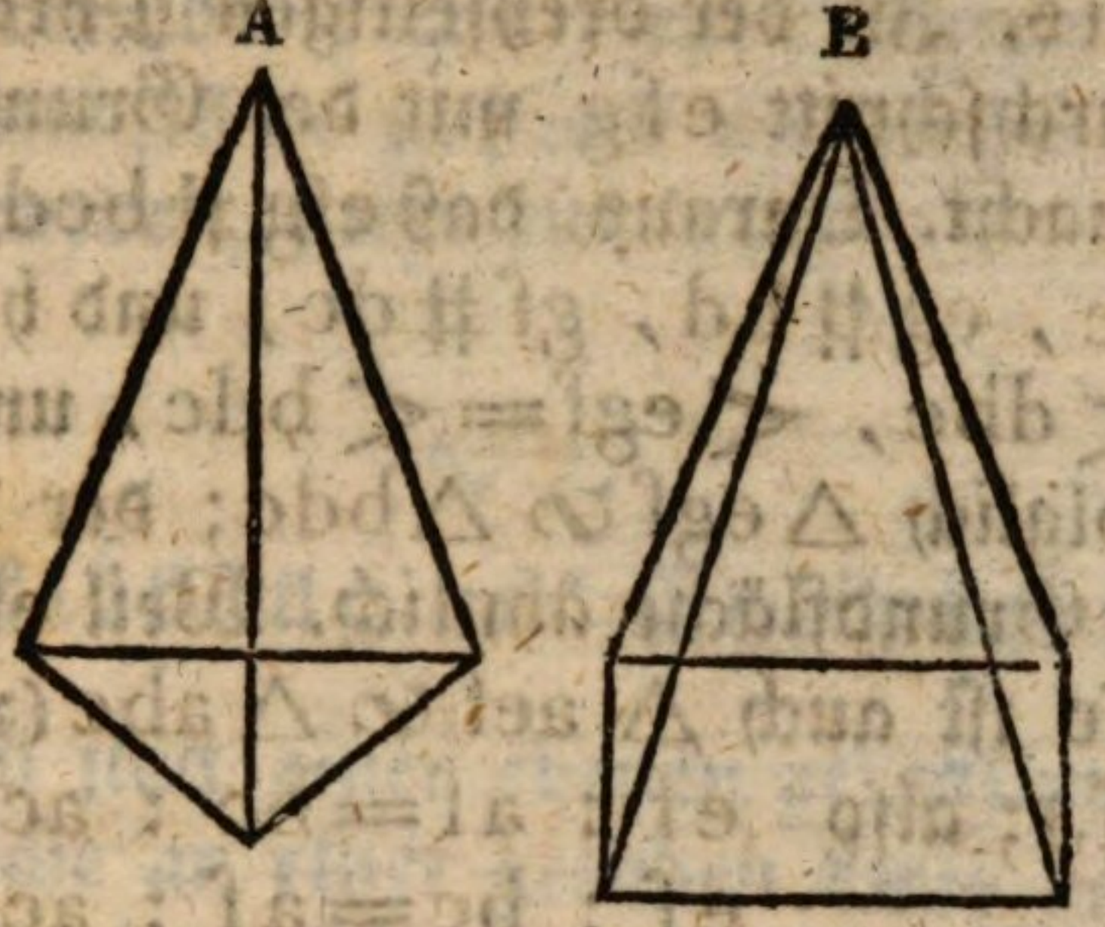
den, sind den beyden Grundflächen sowohl, als unter sich selbst gleich und ähnlich, d.i. congruent.

Beweis. Wenn die zwey Prismen in dem vorigen Paragraph A und B so durchschnitten werden, daß die Durchschnitte N und M mit der Grundfläche parallel sind; so muß der Durchschnitt N mit der Grundfläche def, und der Durchschnitt M mit der Grundfläche mnqp congruent seyn, und wenn mehrere solche Durchschnitte in einem Prisma gemacht würden, so wären sie alle einander gleich und congruent, wie dieß nothwendig die Entstehung eines Prisma mit sich bringt.

§. 5.

Wie eine Pyramide entsteht, und deren Erklärung.

Wenn von einem Puncte, der sich außerhalb einer geradlinigten Figur befindet, gerade Linien in die Spitzen der Winkel dieser Figur gezogen werden, so schließen die Dreyecke, die auf diese Art entstehen, mit dieser geradlinigten Figur einen körperlichen Raum ein, den man eine Pyramide oder eine Spitzsäule nennt. Eine Pyramide ist also ein solcher geometrischer Körper, dessen Grundfläche eine ebene, geradlinigte Figur ist, und dessen Seitenflächen ebene, geradlinigte Dreyecke sind, deren sämmtliche Spitzen in einem gemeinschaftlichen Puncte zusammen fallen. Die Pyramide hat also so viel Seitenflächen, als die Grundfläche Seiten oder Ecken hat. Nach dieser Anzahl der Seitenflächen theilt man sie in dreyseitige, vierseitige u. s. w., je nachdem nähmlich die Grundfläche ein Dreyeck, Viereck u. s. w. ist. Die Pyramide A ist eine dreyseitige oder dreyeckigte, B aber eine vierseitige oder viereckigte Pyramide.



Die Höhe der Pyramide ist die Entfernung der Spitze von der Grundfläche.

§. 6.

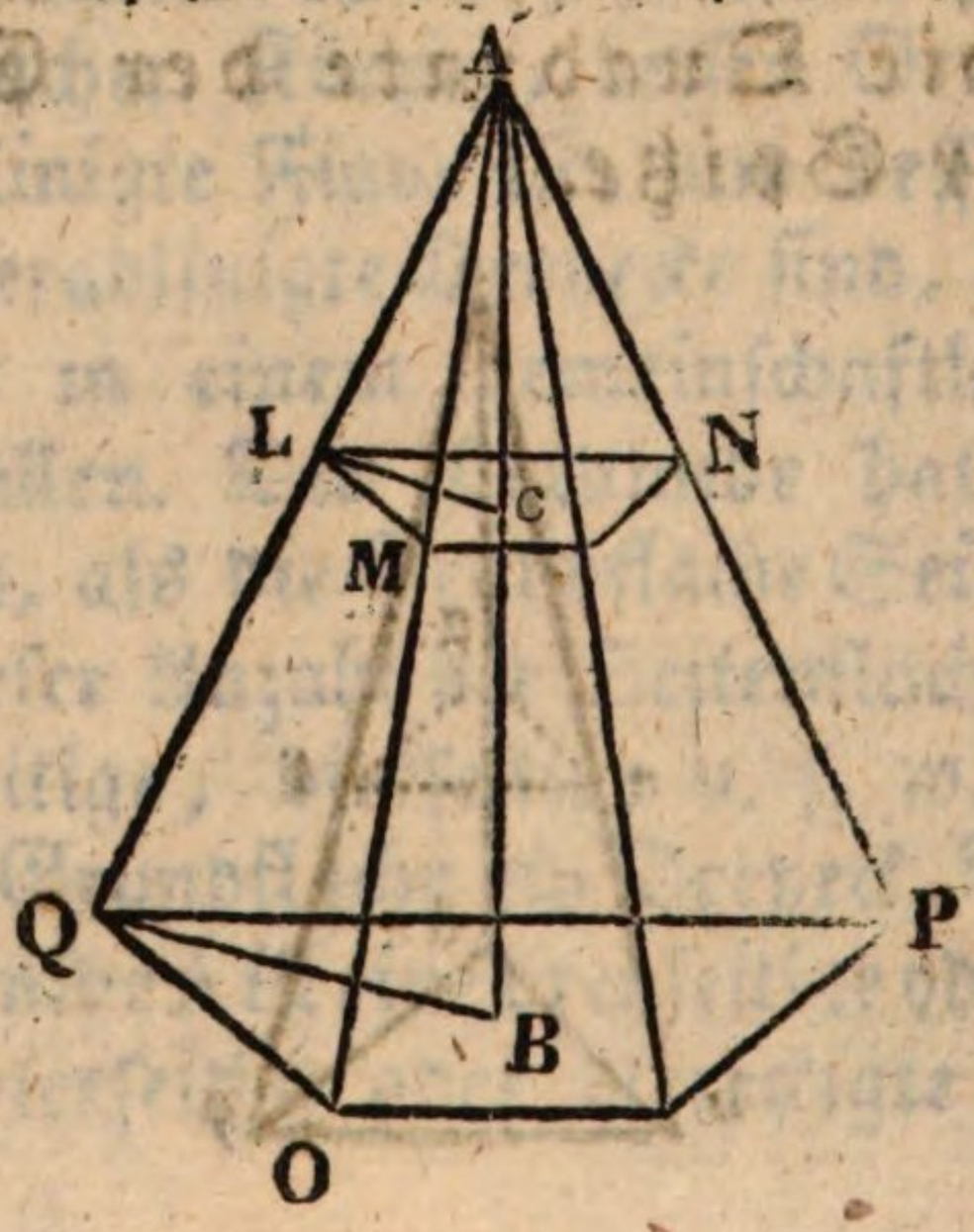
Lehrsatz.

Wenn man eine Pyramide mit der Grundfläche parallel schneidet, so erhält man zum Schnitt eine Figur, die der Grundfläche ähnlich ist, und das Verhältniß der gleichnahmigten Seiten dieser Figuren ist gleich dem Verhältnisse ihrer Entfernungen von der Spitze der Pyramide. Daher verhalten sich die Ebenen der Grundfläche und der Durchschnittsfigur, wie die Quadrate der Entfernungen von der Spitze.

Beweis. In der dreyseitigen Pyramide abcd sey der Durchschnitt efg mit der Grundfläche bcd parallel gemacht. Daraus, daß efg ∥ bcd, ergibt sich, daß ef ∥ bc, eg ∥ bd, gf ∥ dc, und hieraus, daß ∠ gef = ∠ dbc, ∠ egf = ∠ bdc, und ∠ gfe = ∠ dcb; folglich △ egf ∽ △ bdc; der Durchschnitt ist also der Grundfläche ähnlich. Weil ef mit bc parallel ist, so ist auch △ aef ∽ △ abc (zwölf. Absch. §. 9. 2. Zus.); also ef : af = bc : ac oder ef : bc = af : ac.

Weil gf ∥ dc, so ist auch △ agf ∽ △ adc; also gf : af = dc : ac, oder gf : dc = af : ac. Weil eg ∥ bd, so ist auch △ aeg ∽ △ abd; folglich eg : ag = bd : ad, oder eg : bd = ag : ad. Auf diese Weise ergibt sich die Proportionalität der Seiten.

Um darzuthun, daß die Seiten sich wie die Entfernungen von der Spitze der Pyramide verhalten, so fälle man in der unten beygezeichneten Figur AB senkrecht auf OP, so wird AC senkrecht auf MN. Man ziehe LC und QB, so ist AC : AB = AL : AQ, und da AL : AQ = LM : QO; so AC : AB = LM : QO. Dieß gilt auch von den übrigen Seiten. AC aber und AB sind die Entfernungen von der Spitze der Pyramide (zwölft. Absch. §. 22.). Also u. s. w.

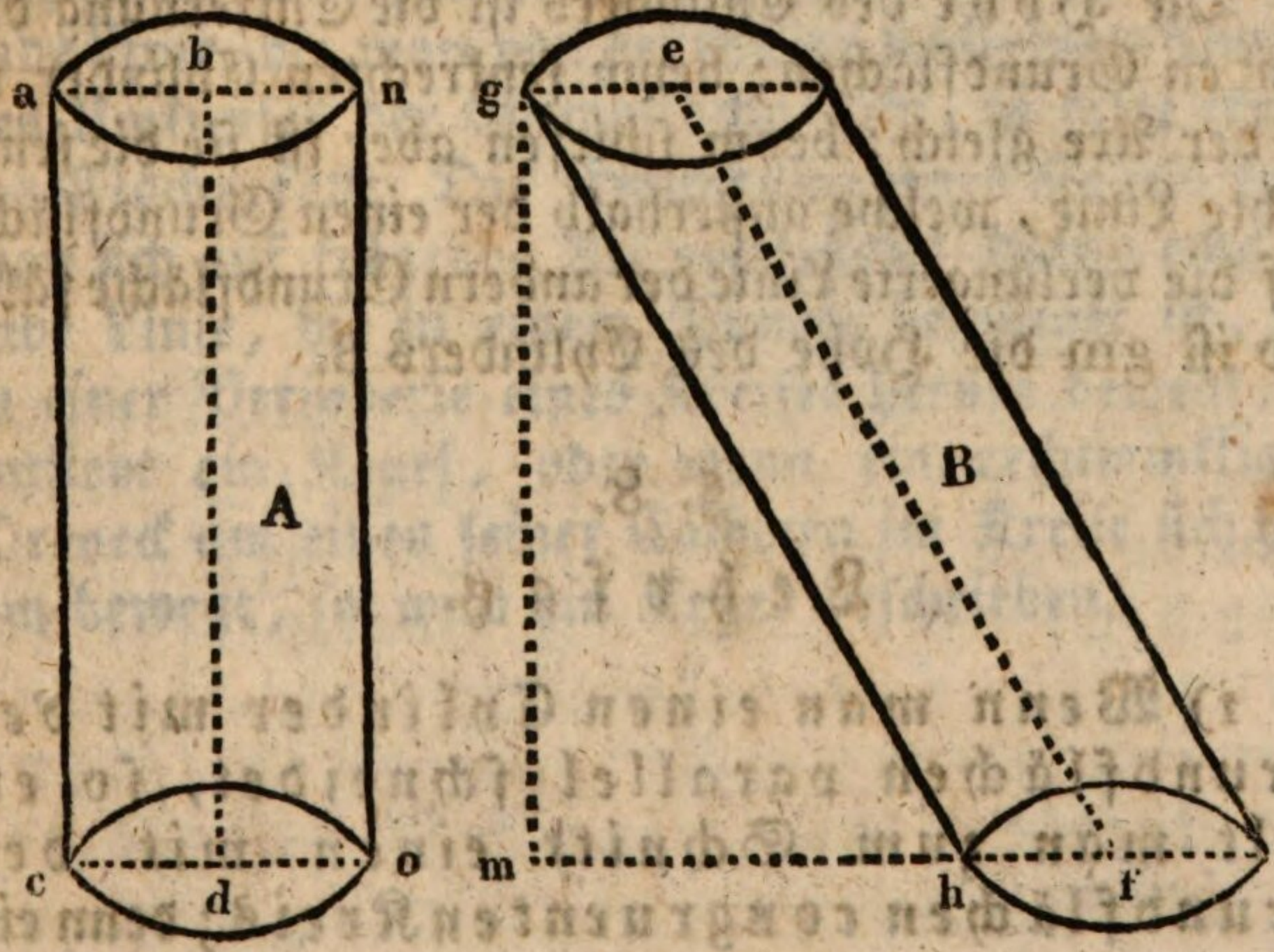


Eine Pyramide, von der ein Stück von der Spitze nach der Grundfläche zu, und mit dieser parallel abgeschnitten worden, heißt eine abgekürzte Pyramide.

§. 7.

Erklärung des Cylinders.

Wenn sich statt einer ebenen geradlinigten Figur eine Kreisfläche an einer geraden Linie parallel hinauf bewegt, so entsteht dadurch ein Prisma, das zwey Kreise zu seinen Grundflächen hat. Ein solches Prisma heißt ein Cylinder oder eine Walze. Ein Cylinder ist also ein solcher geometrischer Körper, der zu seinen Grundflächen Kreise hat, die mit einer krummen Fläche als Seitenfläche so verbunden und umgeben sind, daß, wenn von einem Puncte der Peripherie des einen Kreises eine gerade Linie bis zur Peripherie des andern Kreises mit der durch die Mittelpuncte gezogenen geraden Linie parallel zieht, diese in die krumme Seitenfläche fällt.



Da der Kreis als ein reguläres unendliches Vieleck betrachtet werden kann, so kann daher auch der Cylinder als ein Prisma von unzählig vielen Ecken angesehen werden.

Was wir oben von den prismatischen Körpern sagten, das gilt auch von den Cylindern; indem sie auch zu jenen gehören. Wenn man darauf sieht, wie die Seitenflächen auf den Grundflächen stehen, so gibt es geradstehende und schiefstehende Cylinder.

Figur A ist ein geradstehender, und Figur B ein schiefstehender Cylinder.

Die durch die Mittelpuncte der Grundflächen gezogene gerade Linie bd und ef heißt die Axe des Cylinders, die entweder senkrecht oder schief ist, je nachdem der Cylinder senkrecht oder schief steht. Die gerade Linie, welche auf der krummen Oberfläche parallel mit der Axe gezogen wird, und zwey Puncte der Grundflächen mit einander verbindet, wie Figur A. ac und Figur B. gh, heißt die Seite des Cylinders.

Die Höhe des Cylinders ist die Entfernung der beyden Grundflächen; beym senkrechten Cylinder ist sie der Axe gleich; beym schiefen aber ist sie die senkrechte Linie, welche außerhalb der einen Grundfläche auf die verlängerte Linie der andern Grundfläche fällt. So ist gm die Höhe des Cylinders B.

§. 8.

Lehrsatz.

1) Wenn man einen Cylinder mit den Grundflächen parallel schneidet, so erhält man zum Schnitt einen mit den Grundflächen congruenten Kreis; denn ein

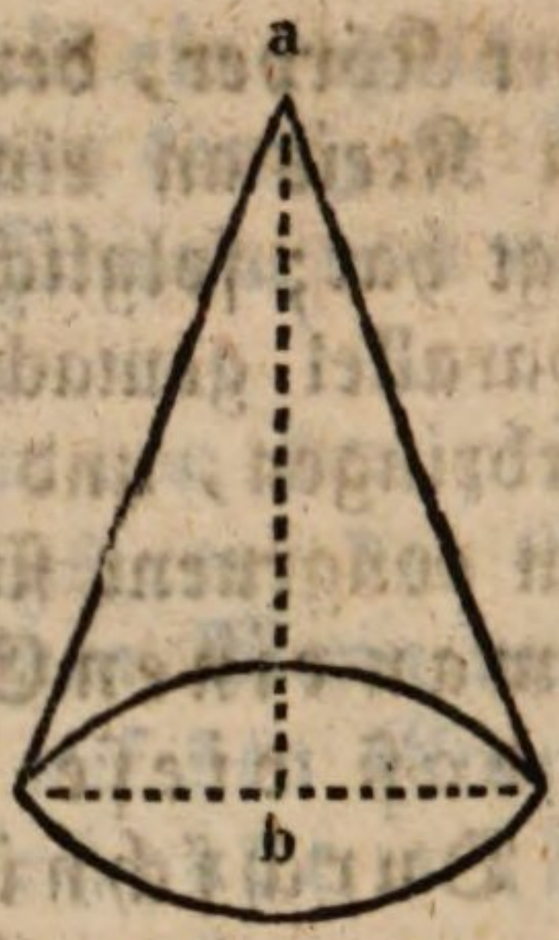
Cylinder ist ein solcher Körper, der dadurch entstanden ist, daß sich ein Kreis an einer geraden Linie parallel hinauf bewegt hat; folglich müssen alle mit den Grundflächen parallel gemachte Schnitte auch wieder Kreise hervorbringen, und zwar solche, die mit den Grundflächen congruent sind.

2) Schneidet man einen Cylinder durch eine Ebene so, daß diese durch die Axe geht, so ist der Durchschnitt ein Parallelogramm, und wenn der Cylinder senkrecht ist, ein Rechteck, wie es die Fig A. ausweiset, wo der Durchschnitt das Parallelogramm, anco hervor bringt, welches zugleich ein Rechteck ist, weil der Cylinder senkrecht ist.

§. 9.

Erklärung des Kegels.

Ein Kegel ist eine Pyramide, deren Grundfläche ein Kreis ist; wo aber statt der Seitenflächen eine einzige krumme Fläche ihn so begränzt, daß jede gerade Linie, die man von der Spitze nach einem Puncte des Umkreises der Grundfläche zieht, in diese krumme Fläche fällt. Die Entstehung eines Kegels kann man sich auf folgende Art vorstellen: Wenn eine gerade Linie, die in einem Puncte befestiget ist, sich in einer Peripherie eines Kreises herum bewegt, so entsteht ein Kegel, oder wenn ein rechtwinkligtes Dreyeck um einen seiner Catheten im Kreise sich herum bewegt, so wird ein Kegel beschrieben.



Der Kegel ist als eine Pyramide von unendlich viel Seiten zu betrachten, weil der Kreis, der die Grundfläche des Kegels ausmacht, als ein reguläres Vieleck von unendlich viel Seiten anzusehen ist.

Eine Linie, von der Spitze des Kegels auf den Mittelpunct der Grundfläche gezogen, heißt die Axe des Kegels, wie z. B. ab.

Der Kegel ist entweder senkrecht oder geneigt, je nachdem seine Axe senkrecht oder schief auf der Grundfläche steht.

Die Höhe des Kegels ist die Entfernung der Spitze von der Grundfläche; beym senkrechten Kegel ist es seine Axe.

§. 10.

Lehrsatz.

Wenn man einen Kegel mit der Grundfläche parallel schneidet, so ist der Durchschnitt ein Kreis. Der Halbmesser des Durchschnittes, und der Halbmesser der Grundfläche verhalten sich, wie die Entfernungen von der Spitze des Kegels, und die Kreise selbst, wie die Quadrate der Entfernungen.

Der Beweis dieses Lehrsatzes ergibt sich aus §. 6., indem man den Kegel als eine Pyramide von unendlich viel Seiten, und den Kreis als ein Polygon von unendlich viel Seiten ansieht.

Ein Kegel, von dem ein Stück von der Spitze nach der Grundfläche mit derselben parallel abgeschnitten worden, heißt ein abgekürzter Kegel.

Wenn der Schnitt des Kegels durch die Axe geht, so entsteht ein Dreyeck, und zwar, wenn der Kegel senkrecht ist, ein gleichschenkligtes Dreyeck.

Anmerkung. Von den andern drey Schnitten des senkrechten Kegels, nähmlich von der Ellipse, Parabel und Hyperbel, welche in die höhere Geometrie gehören, kann hier keine Meldung gemacht werden.

§. 11.

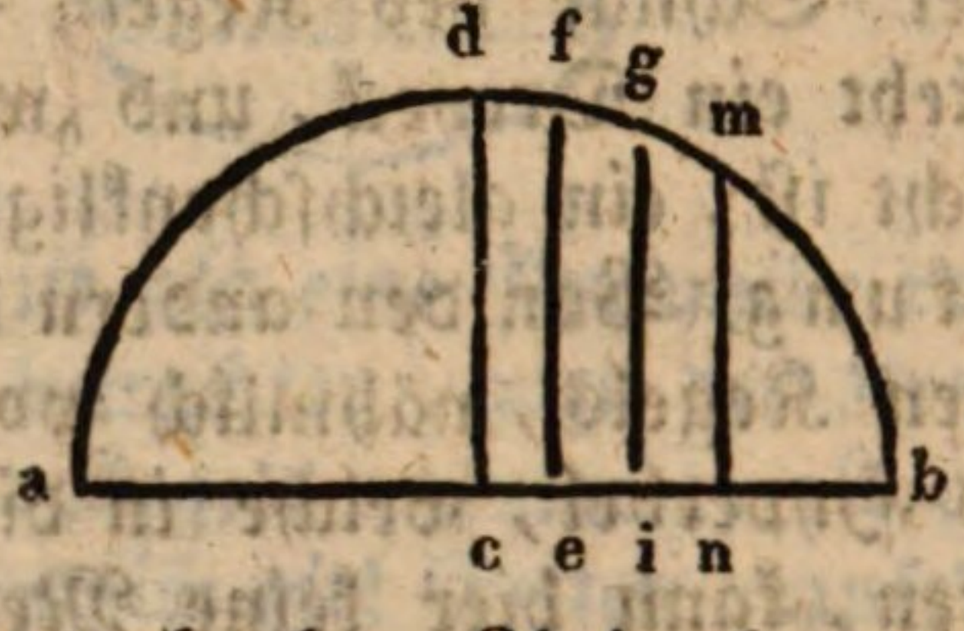
Erklärung der Kugel.

Eine Kugel oder Sphäre ist ein solcher Körper, der von einer einzigen Fläche so eingeschlossen ist, daß jeder Punct derselben von einem Puncte innerhalb gleich weit absteht. Dieser Punct heißt der Mittelpunct der Kugel. Die begränzende Fläche heißt die Kugelfläche. Eine gerade Linie, von dem Mittelpuncte bis an die Oberfläche der Kugel gezogen, heißt der Radius oder Halbmesser derselben; geht aber die gerade Linie durch den Mittelpunct von einem Puncte der Oberfläche bis zu dem andern, so heißt sie der Durchmesser der Kugel. Alle Halbmesser und Durchmesser einer und der nähmlichen Kugel sind sich gleich, wie leicht einzusehen ist.

Eine Kugel wird beschrieben, wenn sich ein halber Kreis so lange um seinen Durchmesser bewegt, bis er wieder in seine vorige Lage kommt. Die-

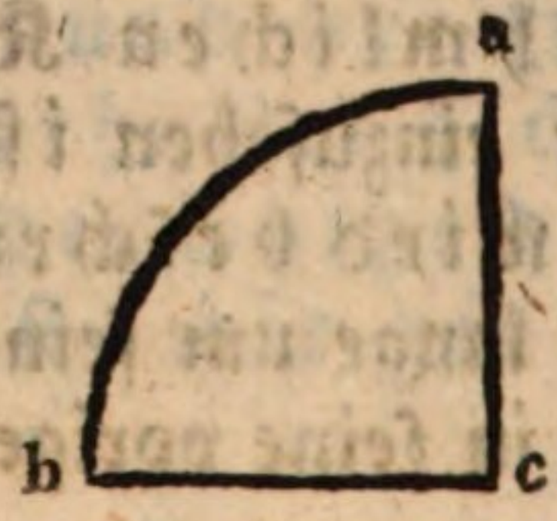
ser Durchmesser heißt die Axe der Kugel (Umdrehungslinie), und die beyden Puncte, welche in der Axe und zugleich in der Oberfläche der Kugel liegen, werden die Pole der Kugel genannt.

Wenn man auf dem Durchmesser des erzeugenden Halbzirkels sich senkrechte Linien bis an die Oberfläche der Kugel errichtet gedenket, z. B.

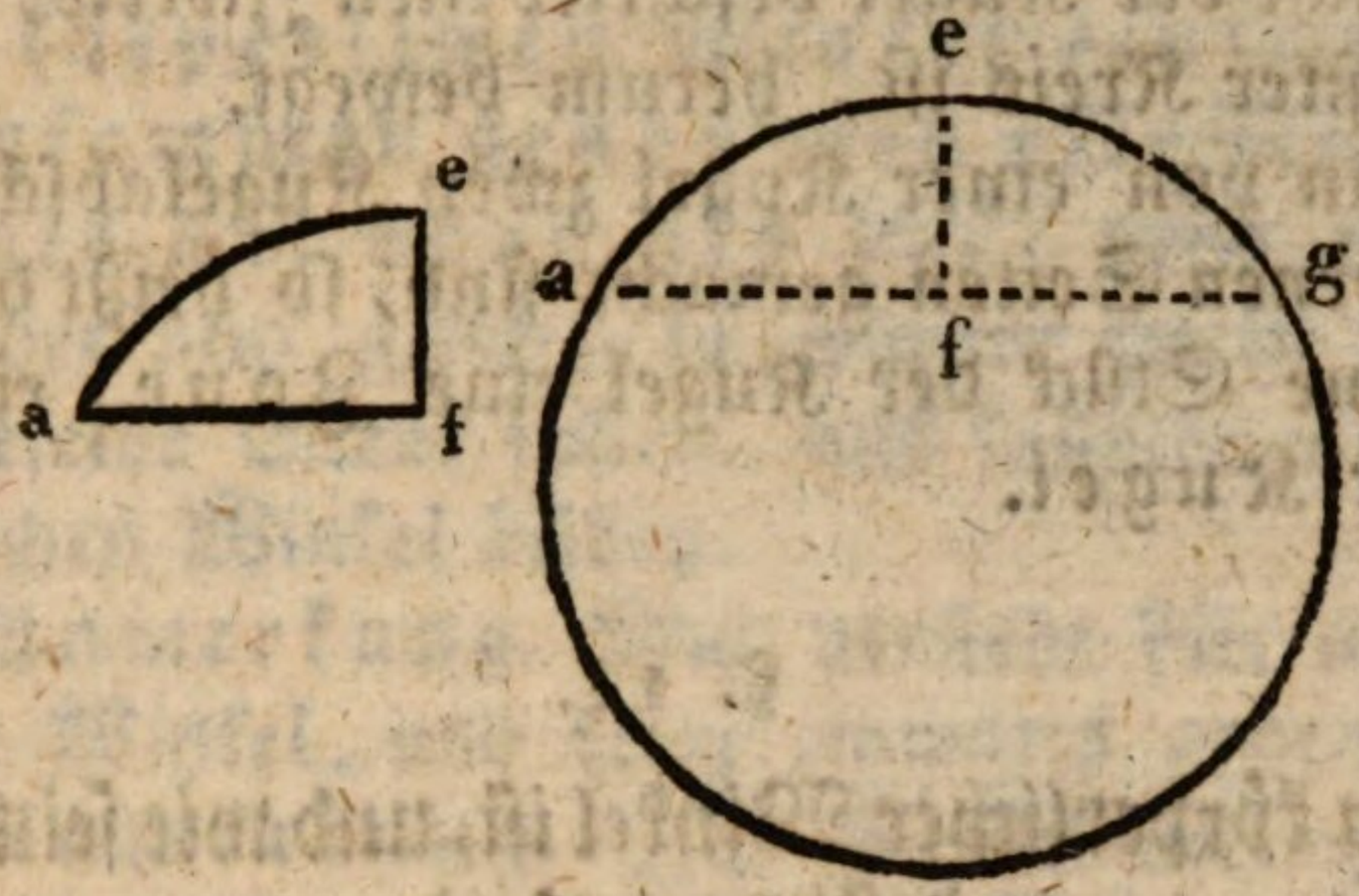


so werden diese senkrechten Linien bey der Umdrehung des Halbzirkels auf der Oberfläche Kreise beschrieben, die einander parallel liegen, weil die Radien, wodurch sie erzeugt werden, auch parallel liegen. Diese Kreise nennt man Parallelkreise, von denen diejenigen die größten sind, deren Radien dem Mittelpuncte am nächsten kommen. Der größte aus ihnen ist der, dessen Durchmesser durch den Mittelpunct geht. Dieser wird der größte Kugelkreis genannt. Wenn man nun auf der Ebene eines solchen Kugelkreises in dem Mittelpuncte eine senkrechte Linie errichtet, so wird diese durch den Mittelpunct aller Parallelkreise gehen.

Wenn sich der Quadrant abc um einen Halbmesser bc oder ac herum bewegt, so wird dadurch eine Halbkugel beschrieben.



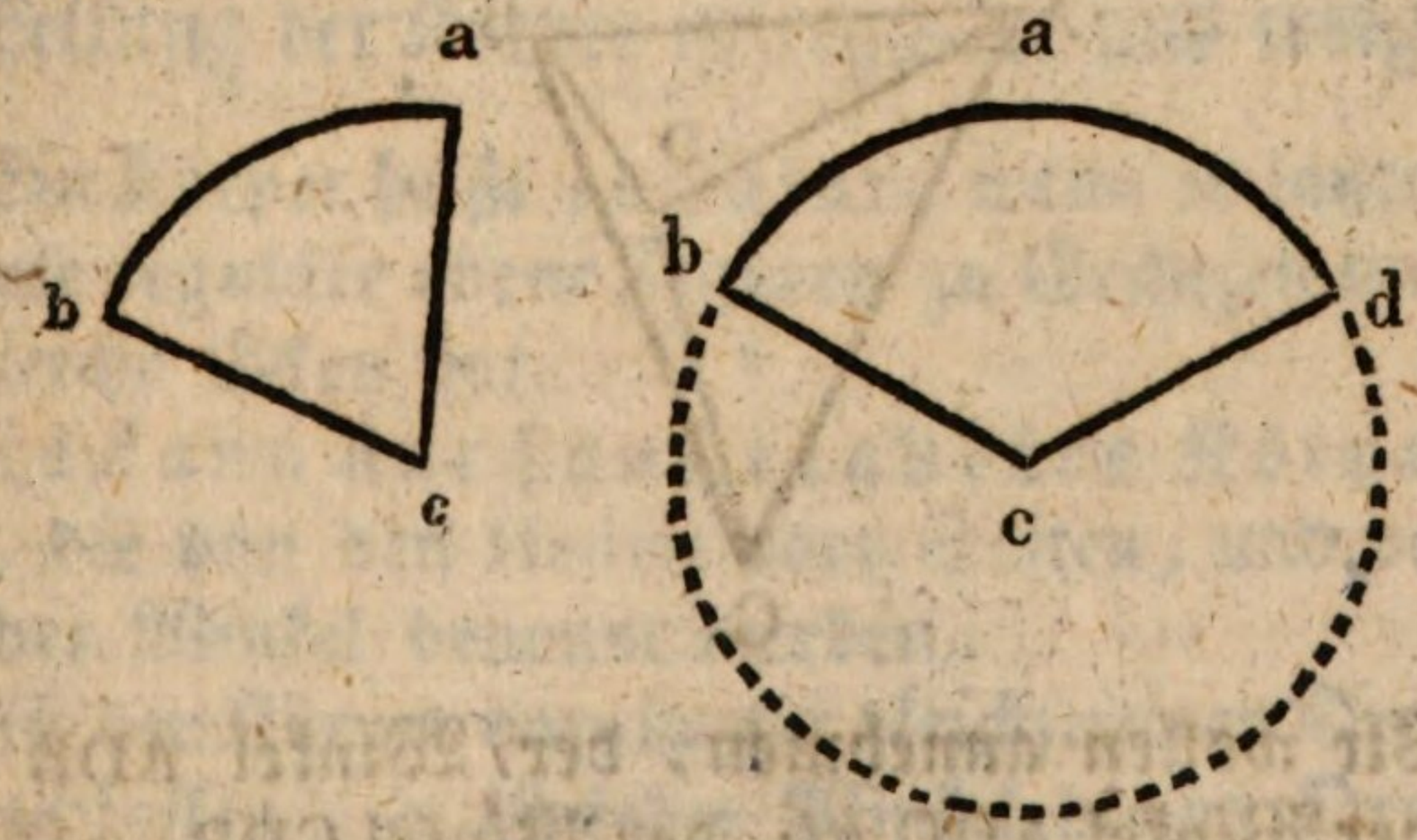
Wenn sich aef um die stillliegende Linie ef ganz herum bewegt, so wird dadurch der Abschnitt einer Kugel beschrieben.



aef stellt einen Kugelabschnitt vor, und ag ist der Durchmesser des Zirkels, wodurch derselbe von der Kugel abgeschnitten wird.

Der Abschnitt einer Kugel ist also ein Stück derselben, welches durch eine ebene Zirkelfläche von der ganzen Kugel abgeschnitten und getrennt wird.

Wenn sich ein Zirkelausschnitt z. B. abc um den stillliegenden Radius herum bewegt, so wird ein Stück der Kugel beschrieben, das man einen Kugelausschnitt nennt.



abcd stellt einen Ausschnitt einer Kugel vor. Diesen Körper können wir uns auch entstanden gedenken, in-

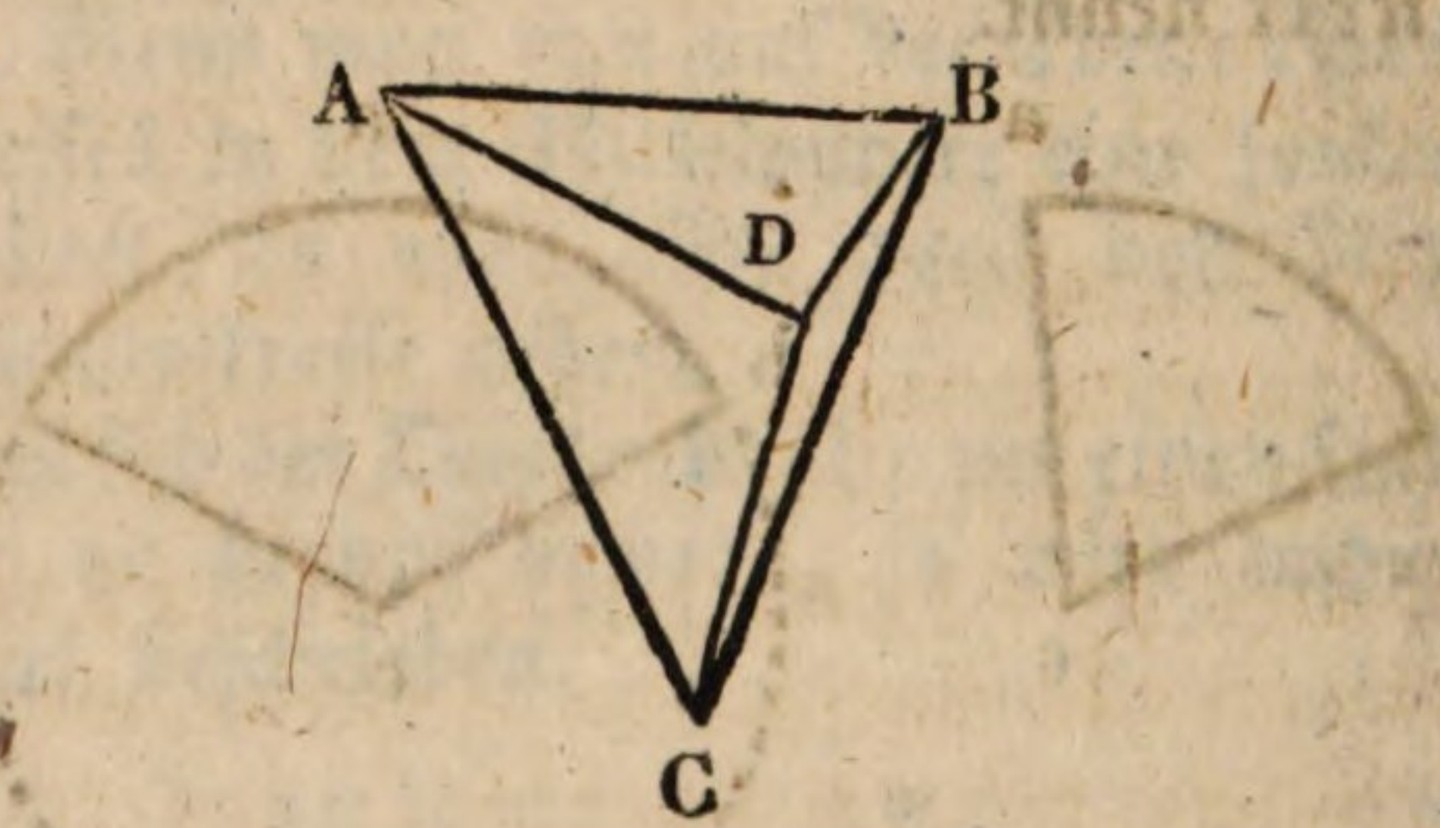
dem eine gerade Linie, welche mit dem einen Ende in dem Mittelpuncte einer Kugel befestigt ist, sich mit dem andern Ende um die Peripherie eines in der Oberfläche der Kugel beschriebenen Zirkels, der aber kein größter Kreis ist, herum bewegt.

Wenn von einer Kugel zwey Kugelabschnitte an verschiedenen Seiten gemacht sind, so heißt das übrig gebliebene Stück der Kugel eine Zone, ein Gürtel der Kugel.

§. 12.

Was ein körperlicher Winkel ist, und wie seine Größe bestimmt wird.

Ein körperlicher Winkel oder eine Ecke wird durch Ebenen gebildet, die in einem gemeinschaftlichen Puncte zusammen laufen. So ist ein jedes Eck in einem Zimmer ein körperlicher Winkel. Um einen körperlichen Winkel werden wenigstens drey ebene Winkel erfordert, die in verschiedenen Ebenen liegen. Die Größe eines körperlichen Winkels wird durch die ebenen Winkel bestimmt, aus denen er besteht.



Wir wollen annehmen, der Winkel ADB halte 92, der Winkel ADC 76, der Winkel CDB 20 Grade; so sagt man, der körperlicher Winkel D sey 92 + 76 + 20 = 188 Grade groß.

§. 13.

Lehrsatz.

Drey oder mehrere ebene Winkel, die einen körperlichen Winkel einschließen, sind zusammen genommen alle Mahl kleiner, als 4 R. oder als 360°; denn wären sie 4 R. oder 360° gleich, so würden sie in eine und eben dieselbe Ebene fallen, und könnten also keinen körperlichen Winkel bilden.

1. Anmerkung. Man versteht hier auswärtsgehende Winkel, und keine einwärts gehende.

2. Anmerkung. Zur Versinnlichung obigen Lehrsatzes zeichne man auf dem Papiere drey oder mehrere Winkel von solcher Größe, daß sie zusammen 360° betragen. Alsdann schneide man sie aus, und versuche aus ihnen einen körperlichen Winkel zu bilden. Man wird sogleich einsehen, daß sie sich unmöglich zu einem körperlichen Winkel vereinigen lassen; indem sie in eine Fläche zusammen fallen, wenn man ihre Spitzen verbindet.

§. 14.

Eintheilung der Körper in reguläre und irreguläre.

Ein Körper heißt regulär, wenn er lauter congruente reguläre ebene Figuren zu Gränzen und lauter gleiche Ecken hat.

Es kann nur fünf reguläre Körper geben, die von den Hedris oder Seiten, und der Anzahl der Winkel benennt werden.

Ist der Körper von lauter gleichseitigen Dreyecken eingeschlossen, so ist jeder Winkel dieses Dreyeckes $= 60°$, weil $180°$ durch 3 dividirt $= 60°$; läßt man jede Ecke dieses regulären Körpers aus drey Winkeln

bestehen (zusammen 180°); so erhält man ein Teträder, das von vier gleichseitigen Dreyecken eingeschlossen ist. Läßt man jede Ecke aus vier Winkeln bestehen (zusammen 240°, weil $4 \times 60 = 240$); so erhält man ein Oktäder, welches von 8 gleichen gleichseitigen Dreyecken eingeschlossen ist. Läßt man jede Ecke aus 5 Winkeln bestehen (zusammen 300°), so erhält man ein Ikosäder von zwanzig gleichen gleichseitigen Dreyecken eingeschlossen. Mehr als 5 solcher Winkel kann man nicht verbinden, weil man sonst nicht weniger als 360° erhielt, wo also nach §. 13. die Winkel bey ihrer Verbindung in eine Ebene zusammen fielen.

Macht man ein reguläres Viereck, ein Quadrat zur Gränze eines regulären Körpers, so ist dessen Winkel = 90°, drey derselben machen 270°, und so erhält man das Hexäder oder den Würfel (Kubus), der von 6 gleichen Quadraten eingeschlossen ist.

Vier Winkel eines Quadrats lassen sich unmöglich verbinden, weil sie in eine Ebene zusammen fallen (§. 13.).

Der Winkel eines regulären Fünfeckes ist = 108°, drey derselben lassen sich zu einem körperlichen Winkel verbinden, sie sind = 324°, und so entsteht das Dodekäder, welches von 12 gleichen regulären Fünfecken eingeschlossen ist. Mehr als drey Winkel eines Fünfeckes lassen sich nicht zu einer Ecke verbinden, weil sie zusammen größer sind, als 4 R. Der Winkel eines regulären Sechseckes ist = 120°, drey derselben betragen 360°, und taugen also zu keiner Ecke. Je größer die Anzahl der Seiten eines regulären Vieleckes wird, desto größer werden seine Winkel. Man kann also nicht mehr, als die fünf genannten regulären Körper bilden. Sie heißen von ihrem Erfinder Plato, die fünf platonischen Körper.

Anmerkung. Es wird gut seyn, wenn der Anfänger die besagten platonischen Körper sich aus Kartenpapier verfertiget.

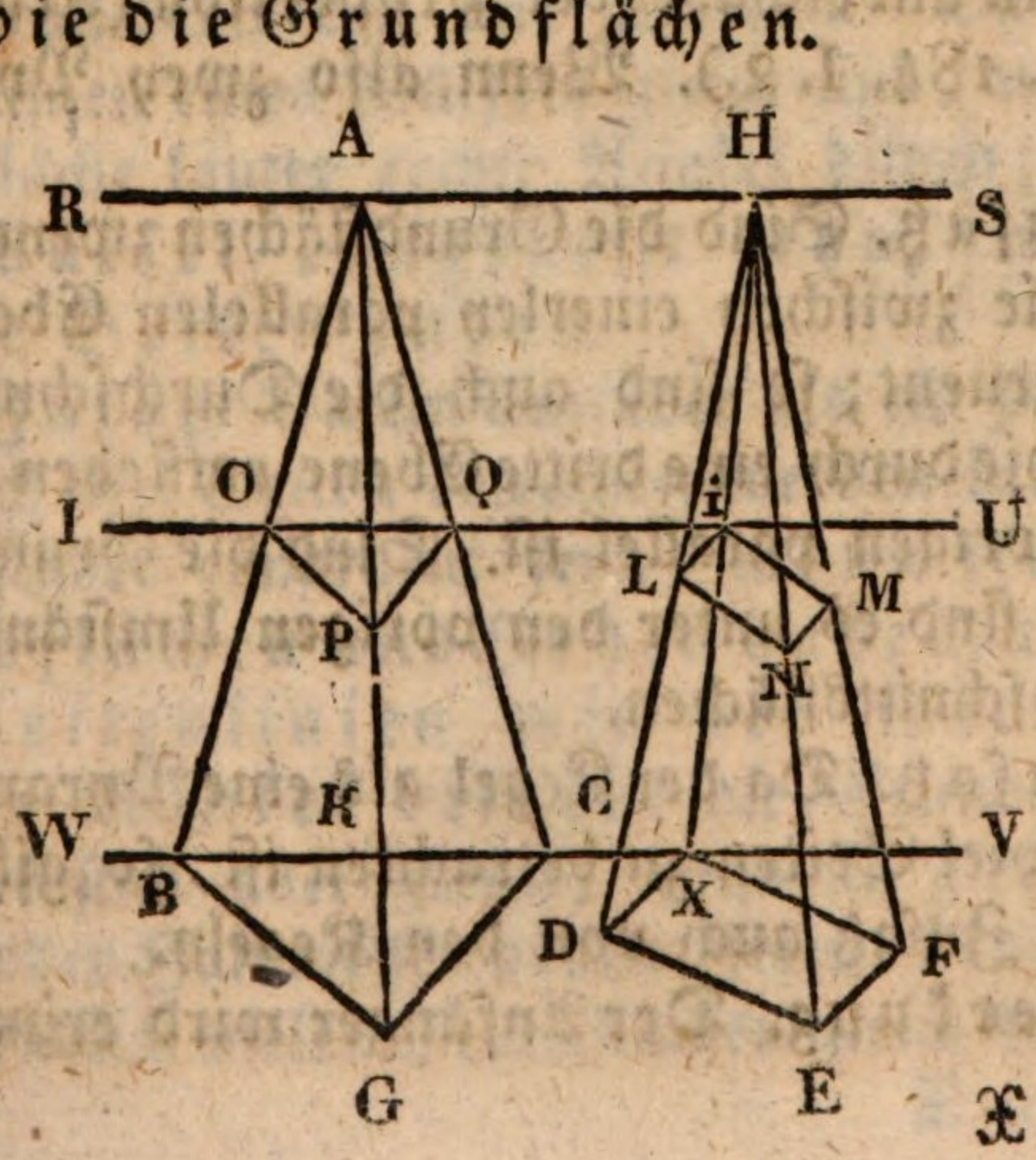
Dritter Abschnitt.

Vergleichung der geometrischen Körper unter einander.

§. 1.

Lehrsatz.

Wenn zwey Pyramiden zwischen zwey parallelen Ebenen stehen, und von einer dritten Ebene, die mit diesen parallelen Ebenen parallel ist, geschnitten werden, so verhalten sich die Durchschnittsflächen, wie die Grundflächen.



Erläuterung. Es stehe die dreyseitige und vierseitige Pyramide zwischen den parallelen Ebenen RS und WV, und IU sey eine Ebene, die beyde Pyramiden parallel zu RS und WV schneidet, so ist nach dem Lehrsatze: BKGC : DXFE = OPQ : LINM.

Beweis. Das △ OPQ ∽ △ BGC; denn wenn eine Pyramide zur Grundfläche parallel geschnitten wird, so ist der Abschnitt der Grundfläche ähnlich (erst. Absch. §. 6.). Ferner ähnliche geradlinigte Figuren verhalten sich, wie die Quadrate gleichliegender Seiten oder Diagonallinien (Geom. zwölf. Abschn. §. 22.); also △ BGC : OPQ = BG^2 : OP^2 = AB^2 : AO^2. Eben dieses gilt auch von der andern Pyramide, d. i. DXEF ∽ LINM; folglich DXEF : LIMN = DX^2 : LI^2 = HX^2 : HI^2. Nun ist aber AB^2 : AO^2 = HX^2 : HI^2; denn wenn zwey parallele Ebenen von einer dritten geschnitten werden, so sind auch die Durchschnittslinien parallel (erst. Abschn. §. 22.); folglich BGC : OPQ = DXEF : LINM (Arithmet. sechst. Absch. §. 185.); also BGCK : DXEF = OPQ : LINM; denn man kann die mittlern Glieder einer Proportion verwechseln unbeschadet der Proportion (Arith. sechst. Abschn. §. 184. I. 2.). Wenn also zwey Pyramiden u. s. w.

1. Zusatz. Sind die Grundflächen zweyer Pyramiden, die zwischen einerley parallelen Ebenen liegen, congruent; so sind auch die Durchschnitte congruent, die durch eine dritte Ebene entstehen, welche mit den vorigen parallel ist. Sind die Grundflächen gleich, so sind es unter den vorigen Umständen auch die Durchschnittsflächen.

2. Zusatz. Da der Kegel als eine Pyramide von unendlich viel Seiten zu betrachten ist, so gilt obiger Lehr- und Zusatz auch von den Kegeln.

Anmerkung. Der Anfänger wird erinnert, die

erwähnten Körper mit einer geschmeidigen Masse, z. B. mit weichem Thon nachzubilden, und die Schnitte daran vorzunehmen. Diese Erinnerung gilt fast für alle stereometrischen Sätze.

§. 2.

Lehrsatz.

Prismen, die congruente Grundflächen haben, deren Seitenlinien gleiche Winkel mit den Grundflächen bilden, und deren Höhen gleich sind, sind congruent.

Beweis. Denn unter diesen Umständen müssen sich die Prismen decken, wenn man sie in einander schiebt. Die Grundflächen decken sich, weil sie nach der Voraussetzung congruent sind; aber auch die Seitenflächen müssen zusammen fallen, weil ihre Neigungen gegen die Grundfläche gleich sind, und da die Höhen gleich sind, so müssen sie sich in allen Stücken decken.

1. Zusatz. Was von den Prismen gilt, gilt auch von Parallelepipeden und Würfeln. Da aber alle Seitenlinien eines Würfels gleich sind, und mit der Grundfläche lauter rechte Winkel bilden; so werden Würfel congruent seyn, wenn sie gleiche Seiten haben.

2. Zusatz. Da ein Cylinder als ein Prisma von unendlich viel Seiten betrachtet werden kann, so werden Cylinder congruent seyn, wenn sie gleiche Grundflächen und Höhen haben, und wenn die Seitenlinien mit der Grundfläche gleiche Winkel bilden; die Grundflächen der Cylinder sind aber gleich, wenn sie gleiche Durchmesser oder Halbmesser haben; ferner ist die Neigung der unendlich vielen Seitenflächen gleich der Neigung

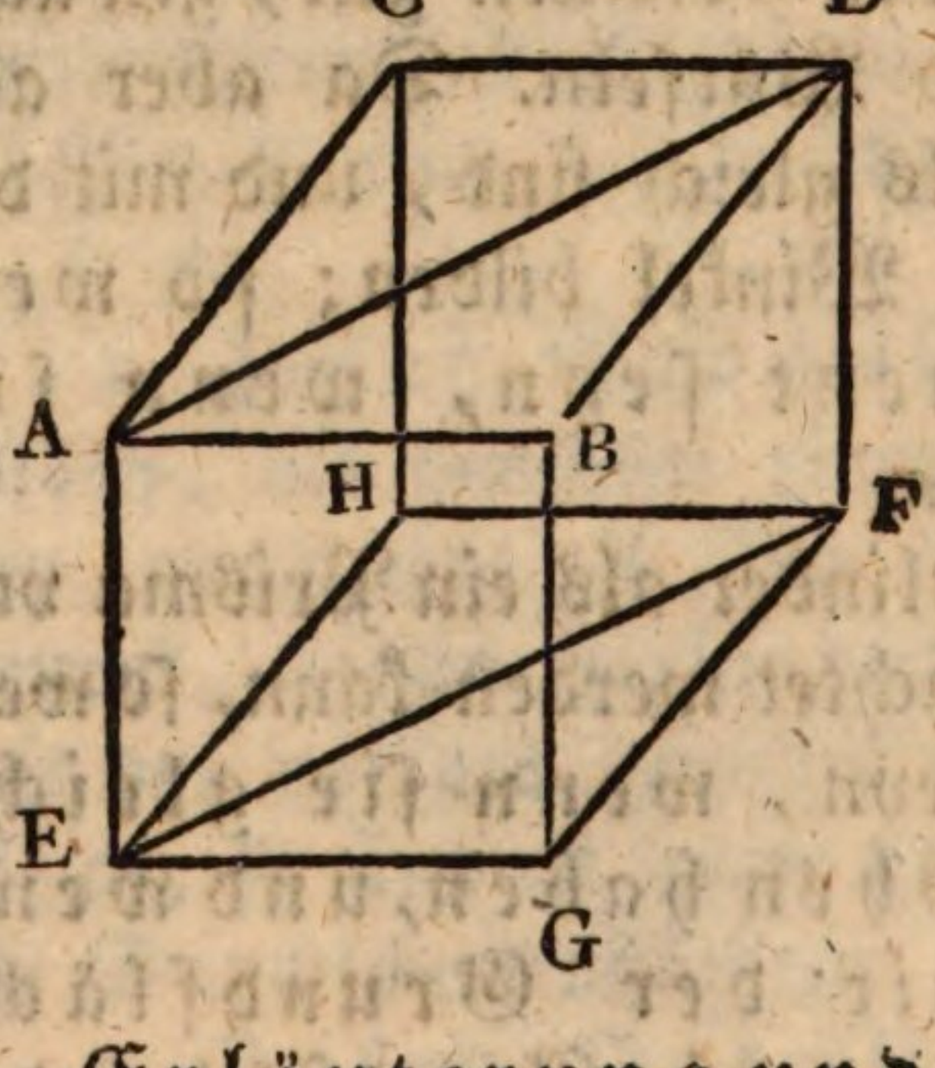
der Axe gegen ihre Grundflächen; also wird man von den Cylindern folgenden Satz für ihre Congruenz aufstellen können: Cylinder sind congruent, wenn ihre Grundflächen gleiche Durchoder Halbmesser und gleiche Axen haben, und die Neigung ihrer Axen zur Grundflächen gleich ist. Senkrechte Cylinder sind congruent, wenn bey ihnen die Axen und Durchmesser gleich sind.

§. 3.

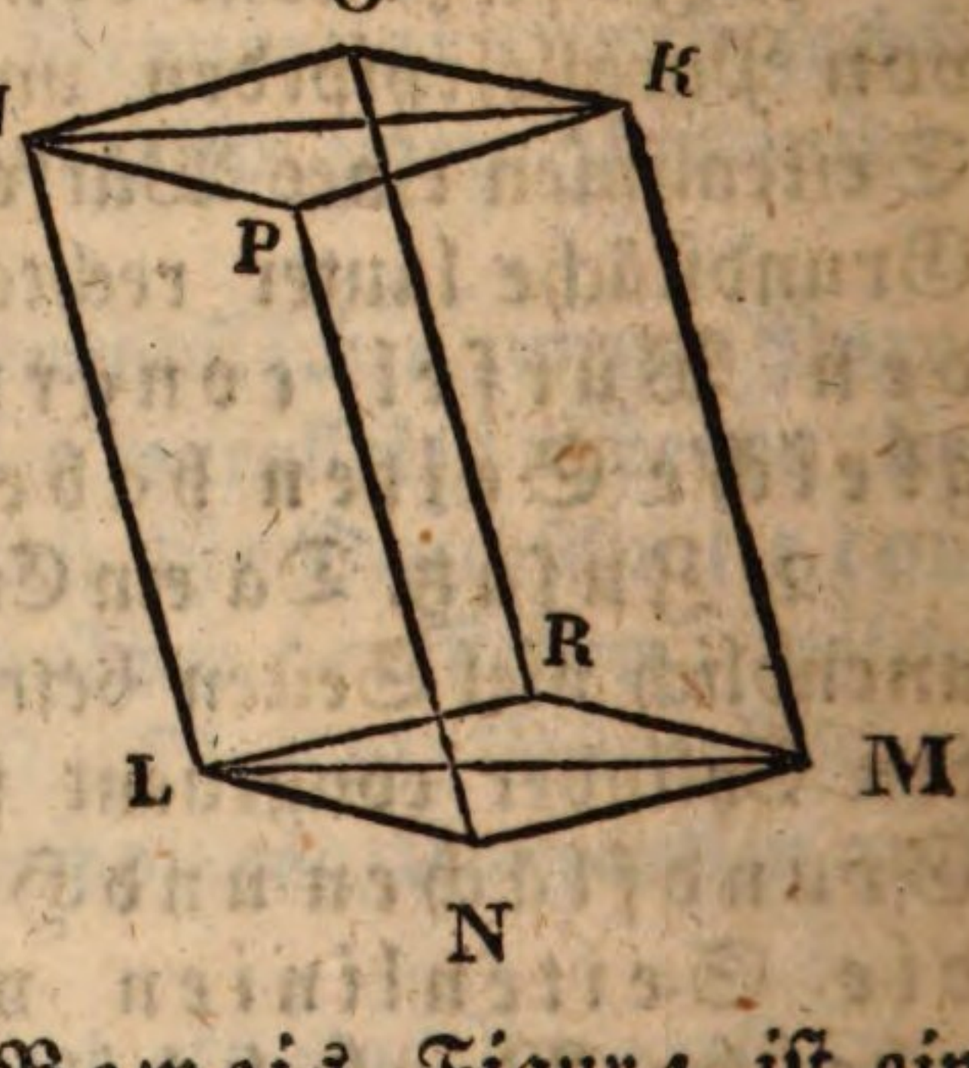
Lehrsatz.

Ein Parallelepipedum wird von einer Ebene, die zwey gegenüber stehenden Ebenen nach ihren Diagonalen schneidet, halbirt, d. i. in zwey gleiche dreyseitige Prismen getheilt.

Figur 1.



Figur 2.



Erläuterung und Beweis. Figur 1. ist ein rechtwinkligtes, und Figur 2. ist ein schiefwinkligtes Parallelepipedum. Man stelle sich vor, daß jedes derselben durch eine Ebene, welche durch die Diagona-

len bey Figur 1. durch AD und EF, und bey Figur 2. durch IK und LM geht, in zwey Theile getheilt sey; so erhält man bey Figur 1. und Figur 2. zwey dreyseitige Prismen, nähmlich AEHCD und AEGBDF, und ILNPKM und ILMROK. Beyde diese Prismen in jedem Parallelepipedum sollen nach dem Lehrsatze einander gleich seyn. Daß die zwey Prismen in dem rechtwinkligten Parallelepipedum gleich sind, liegt an dem Tage, und folgt aus dem vorigen Paragraph; daß aber auch die zwey Prismen von Figur 2. gleich sind, kann dadurch dargethan werden: Man kann das Parallelepipedum Figur 2. in ein rechtwinkligtes verwandeln, wenn man nähmlich die schiefen Winkel desselben in rechte verwandelt, und ihnen die nähmliche Höhe gibt, die das schiefwinkligte Parallelepipedum Figur 2. hat. Auf solche Art erhält man dann ein rechtwinkligtes Parallelepipedum, das dem schiefwinkligten gleich ist; denn was auf der einen Seite durch die senkrechten Linien von den schiefen Winkeln des schiefen Parallelepipedums abgeschnitten wird, das wird auf der entgegengesetzten Seite wieder ersetzt. So wie Parallelogramme, die gleiche Höhe und gleiche Grundlinie haben, einander gleich sind; so sind auch Parallelepipeden sich gleich, wenn sie gleiche Grundflächen und gleiche Höhe haben. Da es nun nur rechtwinkligte und schiefwinkligte Parallelepipeden gibt, und die letztern in die erstern verwandelt werden können; so folgt also, daß jedes Parallelepipedum von der Diagonalebene halbirt, d. i. in zwey gleiche dreyseitige Prismen getheilt wird.

Zusatz. Ein dreyseitiges Prisma ist also die Hälfte von einem Parallelepipedum, das mit ihm gleiche Höhe und eine noch ein Mahl so große Grundfläche hat.

Anmerkung. Man lasse sich aus Holz ein senkrechtes und ein schiefes Parallelepipedum verfertigen, und theile beyde nach der Diagonallinie; so wird das Gesagte ganz klar werden.

§. 4.

Lehrsatz.

Wenn man die Seite eines Prismas in lauter gleiche Theile theilt, und dann durch die Theilungspuncte das Prisma mit der Grundfläche parallel schneidet, so erhält man so viele gleiche Prismen, als die Seite Theile enthält.

Beweis. Denn so erhält man lauter solche Prismen, die gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben; folglich sind sie einander gleich (§. 2.).

Zusatz. Eben dieß gilt auch von dem Cylinder; auch dieser wird, wenn man eine Seite desselben in lauter gleiche Theile theilt, und durch die Theilungspuncte mit der Grundfläche parallel laufende Schnitte macht, in so viele gleiche Cylinder getheilt, als Schnitte gemacht wurden.

§. 5.

Lehrsatz.

Prismen, die congruente Grundflächen haben, und deren gleichliegende Seitenlinien einerley Neigung zur Grundfläche haben, verhalten sich, wie ihre Höhen.

Beweis. Aehnliche Dreyecke verhalten sich, wie ihre Höhen (zwölft. Absch. §. 2. Zus.); nun aber sind Prismen, die gleiche Grundflächen haben, und deren gleichliegende Seitenlinien einerley Neigung zur

Grundfläche haben, als ähnliche Dreyecke (aber als Flächendreyecke) zu betrachten; denn ihre Oberfläche besteht aus lauter Dreyecken, die einander ähnlich sind; also verhalten sich Prismen, die congruente Grundflächen haben u. s. w.

Anmerkung. Zur Versinnlichung nehme man hölzerne oder andere körperliche Prismen, die den Bedingungen des Lehrsatzes entsprechen, suche die Höhen, ziehe (nach erst. Absch. §. 27.) die Neigungswinkel der gleichliegenden Seitenlinien, so erhält man lauter ähnliche Dreyecke, wodurch obiger Lehrsatz anschaulich gemacht wird.

Zusatz. Hieraus ergibt sich, Cylinder von gleichen Grundflächen, und deren Axen gleiche Neigung zur Grundfläche haben, verhalten sich, wie ihre Höhen.

§. 6.

Lehrsatz.

Parallelepipeden von congruenten Grundflächen und gleichen Höhen sind einander gleich.

Beweis. Entweder sind sie senkrecht oder schief. Im ersten Falle liegt es am Tage, daß sie gleich seyn müssen. Sind sie hingegen schief, d. h. ist die Neigung der Seitenlinien zur Grundfläche der gleichseyn sollenden Parallelepipeden nicht gleich, so verwandle man sie in senkrechte, so wird man finden, daß die abgeschnittenen Stücke gleich sind; nun aber, wenn diese zu den senkrechten, d. i. Gleiches zu Gleichem addirt werden, so bleibt Gleiches; folglich gilt der Lehrsatz auch von den schiefen.

Anmerkung. Man kann sich auch von der Wahrheit obigen Lehrsatzes so überzeugen, wenn man sich

denkt, jedes Parallelepipedum bestehe aus lauter möglichst dünnen Flächen, die schichtenweise über einander liegen. Haben nun zwey Parallelepipeden, ein senkrechtes und ein schiefes, gleiche Grundflächen und gleiche Höhen, so sind wegen der Gleichheit der Grundflächen alle möglichst dünnen Flächen, aus denen beyde Körper bestehen, einander gleich; und da die Höhe bey beyden Körpern gleich ist, so muß auch die Anzahl dieser möglichst dünnen Flächen beyderseits gleich seyn; folglich müssen zwey oder mehrere Parallelepipeden, wenn sie gleiche Grundflächen und eine gleiche Höhe haben, ihrem körperlichen Inhalte nach gleich seyn.

§. 7.

Lehrsatz.

Alle prismatischen Körper, die congruente Grundflächen und gleiche Höhen haben, sind einander gleich.

Beweis. Sind die Prismen dreyseitig, so können sie als die Hälften von solchen Parallelepipeden angesehen werden, die mit ihnen gleiche Höhen und doppelt so große Grundflächen haben; da aber unter den gegebenen Bedingungen die Parallelepipeden gleich sind, so müssen es auch ihre Hälften, d. i. die Prismen seyn. Sind die Prismen mehr als dreyseitig, so theile man ihre Grundflächen durch Diagonallinien in Dreyecke, und lege durch diese Diagonalen Ebenen, so wird man lauter dreyseitige Prismen von congruenten Grundflächen und Höhen erhalten, die also einander stückweise gleich sind, folglich auch ihre Summen, d. i. die ganzen gegebenen Prismen; folglich sind alle prismatischen Körper einander gleich, wenn sie gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben.

Zusatz. Cylinder von gleichen Durchmessern und gleichen Höhen sind einander gleich.

Anmerkung. Die in dem vorigen Paragraph angeführte Anmerkung hat auch hier ihre Anwendung.

§. 8.

Lehrsatz.

Prismen von gleichen, wenn gleich nicht congruenten Grundflächen und gleichen Höhen, sind einander gleich.

Beweis. Man theile die Grundfläche solcher Prismen in so kleine Dreyecke, als möglich, je kleiner, desto gleicher werden sie in beyden Prismen seyn, und wenn man sie als unendlich klein sich vorstellt, so wird zwischen ihnen gar kein Unterschied mehr obwalten. Wenn man nun nach diesen Dreyecken die Prismen in kleine Prismen theilt, so wird die Summe derselben von dem einen Prisma der Summe von dem andern gleich seyn; folglich müssen die ganzen Prismen gleich seyn, welche gleiche Höhen und gleiche, obschon nicht congruente Grundflächen haben.

Zusatz. Alle Parallelepipeden von gleicher Grundfläche und Höhe sind einander gleich.

§. 9.

Lehrsatz.

Pyramiden von gleichen Grundflächen und gleichen Höhen sind einander gleich.

Beweis. Man kann eine Pyramide sich als eine Sammlung von unendlich vielen kleinen Prismen denken, die auf einander liegen; sind also zwey Pyramiden gleich hoch, und haben sie eine gleiche Grundfläche, obschon sie nicht congruent ist, so werden alle

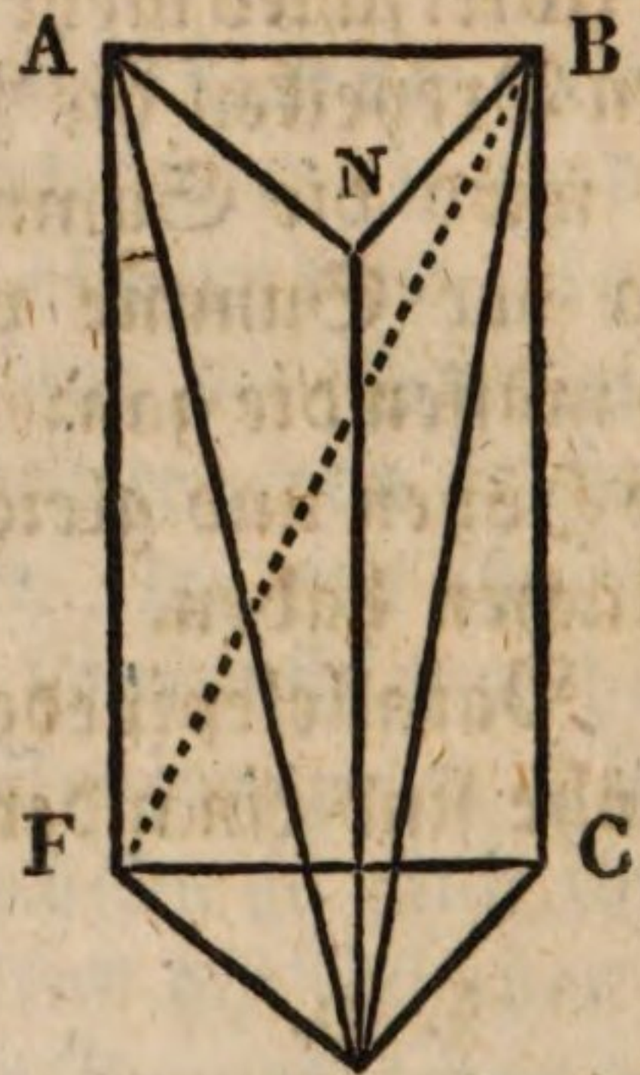
kleinen Prismen von beyden Pyramiden gleich seyn, und weil beyde nach der Voraussetzung eine gleiche Höhe haben, so werden in der einen Pyramide so viel solche Prismen seyn, als in der andern; folglich müssen sie einander gleich seyn; also u. s. w.

Zusatz. Alle Kegel, deren Grundfläche gleiche Halbmesser und gleiche Höhe haben, sind einander gleich.

§. 10.

Lehrsatz.

Jede Dreyeckigte Pyramide ist der dritte Theil eines Prismas, das mit ihm einerley Grundfläche und Höhe hat.



Beweis. Man zerschneide ein dreyeckigtes Prisma, z. B. ANBDFC durch eine Ebene, so, daß der Schnitt nach den Diagonallinien zweyer Seitenflächen, z. B. nach den Diagonalen AD und BD geht, so ist der auf solche Art abgeschnittene Theil ABDN eine Pyramide, welche mit dem dreyeckigten Prisma einerley Grundfläche und einerley Höhe hat. Hierauf zer-

theile man das andere Stück dieses Prismas nach der Diagonallinie der dritten Seitenfläche BF und der ersten BD, so entstehen die beyden Pyramiden BFDC und ABED. Die Pyramide BFDC hat ebenfalls einerley Grundfläche und Höhe mit dem Prisma, und also auch einerley Grundfläche und Höhe mit der vorigen Pyramide ABDN; folglich sind diese beyden Pyramiden einander gleich. Nimmt man nun in der ersten Pyramide ABDN das Dreyeck NBD zur Grundfläche an, so ist A die Spitze derselben, welches auch die Spitze der dritten Pyramide ABFD ist, wenn man das Dreyeck BDC als ihre Grundfläche betrachtet. Da nun diese beyden Grundflächen eine gemeinschaftliche Spitze, und folglich einerley Höhe haben, auch ihre Grundflächen, nähmlich die Dreyecke NBD und BDC, einander gleich sind (sieb. Absch. §. 1. 2. Zus.), so muß die Pyramide ABDN auch so groß seyn, als die Pyramide BFDC; folglich sind alle drey Pyramiden, in welche das dreyseitige Prisma zerschnitten wurde, gleich groß; also ist eine jede davon der dritte Theil, und folglich auch ABDN, d. i. eine Pyramide, die mit dem Prisma einerley Grundfläche und einerley Höhe hat, ist der dritte Theil davon.

Anmerkung. Man darf sich nur aus Holz, oder aus einer andern Materie ein dreyeckigtes Prisma schneiden, und solches dann durch die Diagonallinien der Seitenflächen zertheilen, so wird man drey gleiche Pyramiden bekommen, wodurch obiger Beweis augenscheinlich wird.

1. Zusatz. Jede Pyramide ist der dritte Theil eines Prismas, das mit ihm congruente Grundfläche und gleiche Höhe hat; denn man kann eine jede Pyramide in dreyseitige Pyramiden von einerley Höhe zertheilen, wenn man nähmlich ihre Grundfläche durch Diagonale in Dreyecke theilt, und durch diese Diago-

nalen, und die Spitze der Pyramide Ebenen legt; da nun von jeder dieser dreyseitigen Pyramide gilt, daß sie ein 1/3 des Prismas ist, das mit ihr congruente Grundfläche und gleiche Höhe hat; so gilt dieß auch von ihrer Summe, die die gegebene Pyramide ausmacht.

Sind die Grundflächen der Pyramide und des Prismas bloß gleich, ohne congruent zu seyn, so hat doch der Lehrsatz seine Richtigkeit, weil man die Grundflächen in lauter congruente Figuren eintheilen kann, wo, wenn man die Theile als sehr klein annimmt, der Unterschied der Theile und des Ganzen als Null betrachtet werden kann, und weil beyde Grundflächen, da sie gleichen Inhalt haben, auch gleich viel Theile in sich fassen müssen.

2. Zusatz. Jeder Kegel ist der dritte Theil eines Cylinders, der mit ihm gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat; denn der Kegel ist als eine Pyramide, und der Cylinder als ein Prisma zu betrachten.

§. 11.

Lehrsatz.

Prismen (also auch Parallelepipeden und Cylinder) und Pyramiden (also auch Kegel) von gleicher Grundfläche verhalten sich, wie ihre Höhen.

Beweis. Wenn zwey oder mehrere Prismen gleiche Grundflächen, aber verschiedene Höhen haben, und man theilt die Höhen derselben durch gleiche Durchschnitte, die mit den Grundflächen parallel laufen, so wird man bey dem größern (höhern) Prisma offenbar um so viel Mahl mehr Durchschnittsflächen (kleine Prismen), als bey dem kleinern (niedrigern) Prisma erhalten, um so viel Mahl dieses kleiner,

als das höhere ist. Da nun diese Durchschnittsflächen unter einander gleich sind; indem die Prismen nach der Voraussetzung gleiche Grundflächen haben (§. 8.), so muß also der ganze Inhalt des größten Prismas eben so viel Mahl größer seyn, als der ganze Inhalt des kleinen Prismas, d. h. sie müssen sich ihrer Größe nach gegen einander verhalten, wie ihre Höhen; also verhalten sich Prismen, die gleiche Grundflächen haben, wie ihre Höhen.

Da nun auch die Parallelepipeden und Cylinder (zweit. Absch. §. 7.) Prismen sind, so gilt der Beweis auch für die Parallelepipeden und Cylinder. Da ferner die Pyramide der dritte Theil eines Prismas ist, das mit ihm gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat, so müssen sich auch Pyramiden von gleicher Grundfläche verhalten, wie ihre Höhen. Und da endlich auch die Kegel als Pyramiden zu betrachten sind (dritter Absch. §. 9.), so verhalten sich also auch die Kegel, ihrem Inhalte nach, gegen einander, wie ihre Höhen, wenn sie gleiche Grundflächen haben.

1. Zusatz. Man nennt die Länge eines Parallelepipedums die eine Seite seiner Grundfläche, die Breite hingegen die senkrechte Linie, die man auf die Seite der Grundfläche, die man die Länge nennt, senkrecht errichtet, und bis zur gegenüber stehenden Seite der Grundfläche verlängert hat. Die Höhe des Parallelepipedums ist die senkrechte Linie, die man auf die Grundfläche errichtet, und bis zur gegenüber stehenden Fläche verlängert hat. Bey einem rechtwinkligten Parallelepipedum ist die eine Seite die Länge, eine andere die Breite, und eine dritte die Höhe. Man kann also bey einem rechtwinkligten Parallelepipedum Länge, Breite und Höhe unter einander verwechseln. Man kann also sagen: Parallel-

epipeden, die gleiche Länge und Breite haben, verhalten sich, wie ihre Höhen.

2. Zusatz. Ferner kann man sagen: Cylinder von gleichem Durch- oder Halbmesser verhalten sich, wie ihre Höhen. Weiter: Kegel, deren Grundflächen gleiche Durchmesser haben, verhalten sich, wie ihre Höhen.

§. 12.

Aufgabe.

Ein gegebenes schiefwinkligtes Parallelepipedum in ein rechtwinkligtes zu verwandeln, das mit ihm gleiche Länge, Breite und Höhe hat.

Auflösung. Man errichte auf der Grundfläche des Parallelepipedums in den vier Kanten derselben senkrechte Linien, lege durch diese Ebenen, und verlängere die der Grundfläche gegenüber liegende Ebene, bis sie diese vier Ebenen schneidet; so entsteht auf solche Art ein rechtwinkligtes Parallelepipedum, das dem schiefwinkligten gleich ist, weil es mit ihm gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat (§. 8.).

§. 13.

Lehrsatz.

Parallelepipeden von gleicher Höhe und Breite verhalten sich, wie ihre Längen.

Beweis. Entweder sind die Parallelepipeden, die gleiche Höhe und gleiche Breite haben, rechtwinkligt, oder sie sind schiefwinkligt. Im ersten Falle kann man ihre Längen als Höhen, und ihre Höhen als Längen betrachten. Parallelepipeden aber, die

gleiche Länge und Breite haben, verhalten sich, wie ihre Höhen (§. 11. 1. Zus.); folglich verhalten sich auch Parallelepipeden von gleicher Höhe (d. i. gleicher Länge) und Breite, wie ihre Längen (d. i. Höhen). Im zweyten Falle, wenn nähmlich die Parallelepipeden schiefwinkligt sind, so gilt obiger Lehrsatz auch, weil sich die schiefwinkligten Parallelepipeden in rechtwinkligte verwandeln lassen, so, daß diese den erstern gleich sind; also gilt der Lehrsatz für alle Parallelepipeden.

§. 14.

Lehrsatz.

Parallelepipeden von gleicher Länge und Höhe verhalten sich, wie ihre Breiten.

Beweis. Da bey rechtwinkligten Parallelepipeden die Länge mit der Höhe, und die Höhe mit der Breite verwechselt werden können (§. 11. 1. Zusatz), und da Parallelepipeden, die gleiche Länge und Breite haben, sich wie ihre Höhen verhalten; so verhalten sich also auch Parallelepipeden von gleicher Länge und Höhe (d. i. Breite), wie ihre Breiten (d. i. wie ihre Höhen). Und da alle schiefwinkligten Parallelepipeden sich in rechtwinkligte verwandeln lassen, die ihnen gleich sind, so gilt der Lehrsatz bey allen Parallelepipeden.

§. 15.

Lehrsatz.

Parallelepipeden stehen ihrem körperlichen Inhalte nach im zusammengesetzten Verhältnisse ihrer Längen, Breiten und Höhen, oder wie man sonst noch

sagt: sie verhalten sich, wie die Producte aus ihren Längen, Breiten und Höhen.

Beweis. Die beyden Parallelepipeden seyen A und E. Die Länge von A sey = L, von E = l; die Breite von A = B, von E = b; die Höhe von A = H, von E = h. So mache man ein Parallelepipedum C, das zur Länge l, zur Breite B, und zur Höhe H hat; ferner ein Parallelepipedum D, das zur Länge l, zur Breite b und zur Höhe H hat.

So ist A : C = L : l (nach §. 13.).
C : D = B : b (nach §. 14.).
D : E = H : h (nach §. 11.).

A × C × D × E = L × B × H : l × b × h
folglich A : E = B × L × H : l × b × h (Arith. §. 184. VII.), d.h. Parallelepipeden verhalten sich, wie die Producte aus ihren Längen, Breiten und Höhen, was zu erweisen war.

Hieraus folgt, daß zwey Parallelepipeden, deren Höhen gleich sind, sich wie ihre Grundflächen verhalten.

1. Zusatz. Da alle Dreyeckigte Prismen die Hälfte der Parallelepipeden sind, die mit ihnen gleiche Höhen und eine doppelte Grundfläche haben, so ergibt sich: dreyeckigte Prismen verhalten sich, wie die Producte aus ihren Längen, Breiten und Höhen. Da man ferner jedes Prisma in dreyseitige Prismen zerfällen kann, deren Summen der Grundflächen der Grundfläche des ganzen Prismas, und deren Höhen der Höhe des ganzen Prismas gleich sind, so kann man überhaupt von den Prismen sagen: Prismen verhalten sich, wie die Producte aus ihren Grundflächen und Höhen.

2. Zusatz. Weil bey den Würfeln, Länge, Breite

und Höhe gleich sind, so verhalten sich die Würfel, wie die Cubi ihrer Seiten.

3. Zusatz. Da Cylinder als Prismen zu betrachten sind, die zu ihren Grundflächen Kreisflächen haben, und da sich Kreise verhalten, wie die Quadrate ihrer Halbmesser oder Durchmesser (zwölft. Abschn. §. 23. Zusatz); so verhalten sich Cylinder, wie die Quadrate ihrer Durchmesser multiplicirt mit ihren Höhen.

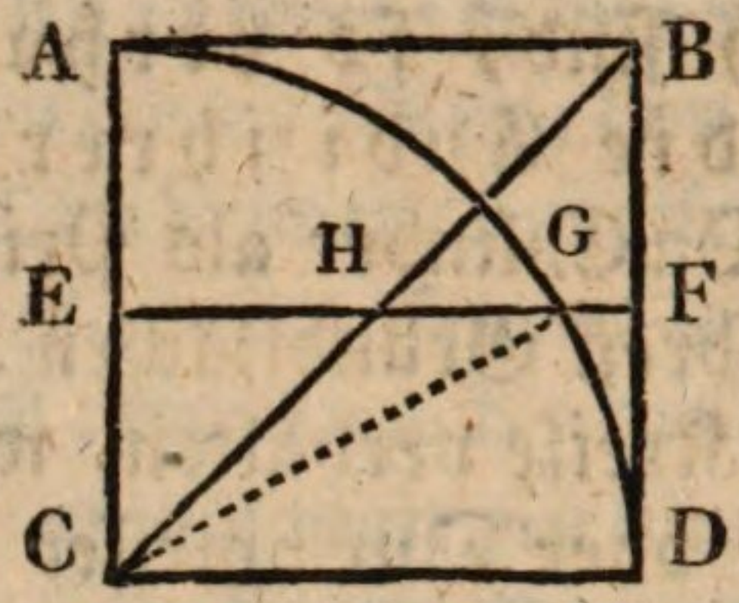
4. Zusatz. Da nach §. 10. jede Pyramide der dritte Theil eines Prismas ist, das mit ihm congruente Grundfläche und gleiche Höhe hat, so verhalten sich auch Pyramiden, wie die Producte aus ihren Grundflächen und Höhen.

5. Zusatz. Auch erhellet, daß sich die Kegel (denn sie sind als Pyramiden zu betrachten) verhalten, wie die Quadrate ihrer Halbmesser (oder Durchmesser) multiplicirt mit ihren Höhen.

§. 16.

Lehrsatz.

Eine Kugel verhält sich zum Cylinder, der denselben Durchmesser und dieselbe Höhe hat, wie 2 : 3. Oder was eines ist, eine Kugel ist zwey Drittheilen von einem Cylinder gleich, der mit ihr gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat. Oder, ein Kegel, eine Kugel und ein Cylinder, die gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben, verhalten sich zu einander wie 1, 2, 3.



Beweis. Es sey ABDC ein Quadrat, ADC ein Quadrant, und ABC ein gleichschenkligtes rechtwinkligtes Dreyeck. Man stelle sich vor, daß sich alle diese drey Figuren um die stilliegende Linie AC bewegen, bis sie wieder in ihre vorige Lage kommen; so beschreibt ADC eine halbe Kugel, ABC einen Kegel und das Quadrat ACDB einen Cylinder. Alle diese drey Körper, die durch die besagte Bewegung entstehen, haben gleiche Kreise zu Grundflächen und gleiche Höhen, und zwar ist ihre Höhe dem Radius ihrer Grundfläche gleich.

Um nun beweisen zu können, daß sich der Kegel, die Kugel und der Cylinder, wenn sie gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben, zu einander verhalten, wie 1, 2, 3; so schneide man diese drey Körper in E und F durch eine Ebene EF parallel zu CD. Die Durchschnitte, die man auf solche Art erhält, sind lauter Kreise. Der Durchschnitt des Kegels hat EH zum Radius, der der Kugel EG und der des Cylinders EF.

Wenn man nun in allen diesen drey Körpern Abschnitte macht von gleicher Dicke, so werden in einem jeden gleich viel herauskommen, weil sie gleiche Höhe AC haben. Alle diese Abschnitte sind Zirkelflächen; Zirkelflächen aber verhalten sich zu einander, wie die Quadrate ihrer Durchmesser (oder Halbmesser) (Geometrie zwölft. Absch. §. 23. Zus.); folglich verhalten sich die Zirkelflächen des Cylinders, der Kugel und des Kegels zu einander, wie EF^2, FG^2, und EH^2. Nun

ist AC = CD = EF; ferner ist CG = CD, weil es Radien des nähmlichen Zirkels sind; also

$$EF = CD$$
$$CG = CD$$

folglich $EF = CG$

Ferner weil EH ∥ AB ist, so ist AC : AB = EC : EH (Geom. zwölf. Absch. §. 9. 2 Zus.); AC = AB; folglich auch EC = EH. Nun aber verhalten sich die Abschnitte der drey Körper, wie vorher gezeigt wurde, wie EF^2, EG^2 und EH^2; EF aber ist = CG, und EH = EC; also verhalten sich die Abschnitte des Cylinders, der Kugel und des Kegels, wie CG^2, EG^2 und EC^2. Nun ist EGC ein rechtwinkligtes Dreyeck, bey welchem also $CG^2 = EG^2 + EC^2$ (Geom. acht. Absch. §. 11.). Man findet also EG^2, wenn man EC^2 von CG^2 abzieht, d. i. $EG^2 = EC^2 - CG^2$; ändert man diesen Ausdruck und setzt statt EC^2 den ihm gleichen Radius EH, und statt CG^2 den ihm gleichen Radius EF, so erhält man

$$EG^2 = EH^2 - EF^2.$$

EG, EH und EF sind also die Radien der Durchschnitte von der Kugel, vom Kegel und vom Cylinder, und da sich die Kreise verhalten, wie die Quadrate der Radien; so ist der Durchschnitt der Kugel gleich dem Durchschnitte des Cylinders weniger dem Durchschnitte des Cylinders; was nun bey diesem gemachten Durchschnitte EF bewiesen wurde, das gilt von allen übrigen Durchschnitten, die man mit der Grundfläche parallel macht; und da bey allen drey Körpern die Höhe gleich ist, so können in allen drey Körpern gleich viele Durchschnitte parallel mit der Grundfläche gemacht werden; der bewiesene Satz gilt also von allen möglichen Durchschnitten zusammen genommen, d. i. von den ganzen Körpern; die halbe Kugel ist also gleich dem Cylinder weniger den Kegel, wenn alle diese drey

Körper gleiche Höhe, und ihre Grundflächen gleichen Durchmesser haben; der Kegel aber ist der dritte Theil des Cylinders, der mit ihm gleiche Höhe und Grundfläche hat (§. 10. 2. Zus.); folglich ist die Halbkugel 2/3 des Cylinders gleich, der mit ihr gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat. Was von dem Halben gilt, das gilt auch von dem Ganzen; also verhält sich die ganze Kugel zu einem doppelt so großen Cylinder, der mit der Kugel gleiche Grundfläche und einerley Höhe hat, wie 2 : 3; die ganze Kugel ist also 2/3 von einem Cylinder, der mit ihr gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat; und wenn man noch den Kegel dazu nimmt, so verhalten sich der Kegel, die Kugel und der Cylinder, welche zusammen gleiche Höhe und Grundfläche haben, wie 1, 2, 3; die Kugel ist also doppelt so groß, wie der Kegel, der mit ihr gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat.

Anmerkung. Diesen Lehrsatz hat Archimedes erfunden, welcher darein so verliebt war, daß er befohlen haben soll, denselben auf seinen Grabstein zu stechen.

Vierter Abschnitt.

Vom Ausmessen der geometrischen Körper.

Vorerinnerung.

Es gibt zweyerley Größen an den Körpern, welche ausgemessen werden können, nähmlich die Ober-

fläche und der Inhalt derselben. Entweder will man den Umfang eines Körpers, oder den Inhalt wissen, den er vermöge seines Raumes einnimmt. Jenes betrifft die Oberfläche, und dieses den Inhalt des Körpers.

Was die Oberflächen der Körper anbelangt, deren Größen man wissen möchte, so findet dabey das Flächenmaß Statt; indem die Körper mit Flächen eingeschlossen sind. Sind die Seitenflächen eines Körpers lauter Ebenen, so läßt sich seine Oberfläche leicht berechnen; indem man den Inhalt einer jeden geradlinigten Figur nach dem zehnten Abschnitt der Geometrie bestimmen kann. Man darf nähmlich nur nach Anleitung des besagten Abschnittes den Inhalt der Seiten- und Grundflächen des zu berechnenden Körpers suchen, und ihn in eine Summe bringen; so ist diese die Oberfläche des Körpers. Schwerer zu berechnen sind die krummen Oberflächen; denn bey diesen kann kein unmittelbares Messen Statt haben. Die niedre Geometrie, die wir vortragen, zeigt bloß, wie man die Oberfläche der Kugel, des geraden Kegels und des geraden Cylinders findet.

Um den körperlichen Inhalt eines Körpers zu finden, muß man einen Körper zum Maßstabe annehmen; denn das Maß muß mit dem zu Messenden gleichartig seyn. Man muß also zur Ausmessung des körperlichen Inhaltes eines Körpers einen bestimmten Körper zum Maße annehmen, und dann untersuchen, wie oft dieser zur Einheit angenommene Körper in dem andern enthalten sey. Da der Würfel (Cubus) in Ansehung seiner Zusammensetzung die einfachste Oberfläche hat, so hat man ihn zum allgemeinen Maßstabe aller übrigen Körper angenommen, und dieses Maß der Körper das Cubikmaß genannt.

Ein unmittelbares Messen, indem man den Cu-

bus, welchen man zum Maßstabe angenommen hat, so oft in dem Körper herumträgt, als möglich ist, kann hier nicht Statt finden, sondern man wird, wie beym Ausmessen der Flächen, aus dem Messen durch das Längenmaß die gesuchte Größe durch Rechnung finden müssen.

Was nun das körperliche Maß betrifft, so legt man den Cubikfuß zum Grunde; ein Cubikfuß ist aber ein Würfel, bey dem jede Seite ein Fuß lang ist.

Dieses cubische Maß wird nun ebenfalls, wie das Linien- und Flächenmaß in Ruthen, Schuh, Zoll, Linien u. s. w. eingetheilt; und eine Cubikruthe ist ein Cubus, dessen Seitenlinien eine Ruthe lang sind u. s. w.

Die Größe eines gegebenen Körpers ausmessen heißt nun also untersuchen, wie viele Cubikruthen, Schuh, Zoll u. s. w. in dem gegebenen Körper enthalten sind. Von diesen cubischen Körpern wird nun nach der Größe des auszumessenden Körpers bald das eine, bald das andere Maß genommen. Sollen wir den Körperinhalt unserer Erde finden, so gebrauchen wir Cubikmeilen, sonst Cubikruthen u. s. w.

Die Bezeichnung des Körpermaßes ist mit dem Längenmaße völlig einerley.

Bey dem Cubikmaße findet auch, wie beym Längenmaße, das zehen- oder zwölftheilige Maß Statt. Im ersten Falle heißt das Maß geometrisch, im zweyten rheinländisch. Man theile bey einem Cubikfuß die Seite, die seine Länge vorstellt, in zehen gleiche Theile, und schneide den Würfel durch diese Theilungspuncte durch Ebenen senkrecht; eben so theile man seine Breite und Höhe in zehen gleiche Theile, und schneide sie wieder durch Ebenen, wie vorher, so wird man $10 \times 10 \times 10 = 1000$ Würfel

erhalten, deren Seiten einen geometrischen Zoll lang sind, jeder derselben heißt ein geometrischer Cubikzoll; ein geometrischer Cubikfuß enthält also 1000 geometrische Cubikzoll. Auf dieselbe Art findet man, daß ein geometrischer Cubikzoll 1000 geometrische Cubiklinien, und eine geometrische Cubiklinie 1000 Cubikscrupel enthält. Wenn also im Cubikmaße Ruthen zu Fuß, Fuß zu Zoll, und Zoll zu Linien gemacht werden sollen, so braucht man nur 3 Nullen an die Ruthen, Fuß, Zoll anzuhängen. Z. B. wie viele Cubikfuß enthalten 25 Cubikruthen? Antwort 25000 Cubikfuß. Wenn also im Cubikmaße die höhern Abtheilungen in untere verwandelt werden sollen, so hat man bloß für jede Abtheilung 3 Nullen anzuhängen. Und umgekehrt, wenn im Cubikmaße eine untere Abtheilung in eine höhere gebracht werden soll, so schneide man zur Rechten der untern Abtheilung 3 Ziffern ab; indem man dieselbe mit 1000 dividiren sollte, welches durch das Abschneiden dreyer Ziffern bewerkstelliget wird. Z. B. 4567823 sind Cubikzoll, um nun zu erfahren, wie viel sie Cubikfuß enthalten, so schneide man zur Rechten drey Ziffern ab; man erhält 4567 Cubikfuß und 823 Cubikzoll. Wie viele Ruthen, Fuß, Zoll u. s. w. machen 1304789241 Cubikzoll? Antw. $1^{c}\,304'\,789''\,241'''$ im Cubikmaße.

Im rheinländischen Maße hält, wie bekannt, eine Ruthe 12 Fuß, ein Fuß 12 Zoll u. s. w.; folglich gehen im rheinl. Cubikmaße $12 \times 12 \times 12 = 1728$ Fuß auf eine Ruthe, und 1728 Zoll auf einen Fuß u. s. w. Wenn also bey diesem zwölftheiligen Cubikmaße eine höhere Abtheilung in eine untere, oder eine untere in eine höhere verwandelt werden soll, so muß man im erstern Falle die höhere Abtheilung mit der Zahl 1728 multipliciren, im zweyten aber muß die untere Abtheilung mit eben dieser Zahl dividirt werden.

Beym Cubikmaße hat also die Decimaleintheilung gleiche Vortheile, wie beym Quadratmaße (Geom. zehnt. Absch. §. 4.).

Daß sich durch Hülfe der Regel de Tri das zehentheilige Cubikmaß in das zwölftheilige, und dieses in jenes verwandeln lasse, bedarf keiner besonderen Erinnerung.

§. 1.

Aufgabe.

Die Oberfläche eines Cubus zu finden.

Auflösung. Da der Cubus (Würfel) 6 gleiche Quadrate zu seiner Oberfläche hat, so darf man nur eine Seite dieser Quadrate messen, und dann die gefundene Länge mit sich selbst multipliciren (zum Quadrate erheben), so gibt das Product davon den Flächeninhalt der einen Seitenfläche des Cubus. Multiplicirt man nun dieses Product noch mit der Zahl 6, so bekommt man die ganze Oberfläche des Cubus. Wenn z. B. die eine Seite des gegebenen Cubus, dessen Oberfläche man finden soll, $2' 3''$ beträgt, wie groß ist seine Oberfläche im rheinländischen und geometrischen Maße?

Anmerkung. Wenn man die Oberfläche des Cubus allgemein S und die Seite desselben L nennt, so ist $S = L^2 \times 6$, welches eine allgemeine Formel zur Berechnung der Oberfläche eines jeden Cubus ist. Es lassen sich auch für die Berechnungen der übrigen Körper solche Formeln aufstellen, die von großem Nutzen sind.

§. 2.

Aufgabe.

Die Oberfläche eines Parallelepipedums zu finden.

Auflösung. Die Gränzen eines Parallelepipedums sind 6 Parallelogramme, deren alle Mahl zwey und zwey, und zwar jedes Mahl die gegenüber stehenden einander gleich sind; um also den Inhalt der Oberfläche eines Parallelepipedums zu finden, darf man nur den Flächeninhalt von 3 Parallelogrammen suchen, und zwar von der Grundfläche und von zwey Seitenflächen, die an einander gränzen; den gefundenen Flächeninhalt aller dieser drey Parallelogramme addire man, und die Summe davon multiplicire man mit 2, so ist das Product der Inhalt der Oberfläche des Parallelepipedums.

§. 3.

Aufgabe.

Den Inhalt der Oberfläche eines Prismas zu finden.

Auflösung. Da bey einem jeden Prisma die Grundflächen einander gleich sind, so suche man zuerst den Inhalt der Oberfläche der einen Grundfläche, diesen multiplicire man mit 2, so hat man den Flächeninhalt der Grundflächen; nun suche man auch noch den Flächeninhalt der Seitenflächen, einer jeden insbesondere, addire sie zusammen, die Summe davon addire man dann zum Flächeninhalte der Grundflächen, so gibt diese Summe den Inhalt der Oberfläche des Prismas.

§. 4.

Aufgabe.

Den Inhalt der Oberfläche einer Pyramide zu finden.

Auflösung. Man suche zuerst den Flächenin-

halt der Grundfläche, dann von den Seitenflächen, und zuletzt addire man beyde zusammen, so erhält man den Inhalt der Oberfläche der Pyramide.

§. 5.

Aufgabe.

Den Inhalt der Oberfläche eines geraden Cylinders zu berechnen.

Auflösung. Die Oberfläche eines geraden Cylinders besteht aus zwey gleichen Kreisen, nähmlich aus den Grundflächen, um die ein Rechteck gewickelt ist, dessen eine Seite die Höhe, und die andere die Peripherie der Grundfläche ist; um also den Inhalt der Oberfläche eines geraden Cylinders zu finden, darf man nur den Inhalt der Grundfläche suchen, diesen mit 2 multipliciren; alsdann suche man den Inhalt der Seitenfläche, d. i. des Rechteckes, das um die Grundflächen liegt, und addire es zu den Grundflächen, so hat man die Oberfläche des Cylinders.

Zusatz. Um den Flächeninhalt eines geraden Cylinders zu finden, braucht man also nur den Durchmesser der Grundfläche und die Höhe des Cylinders zu wissen. Aus dem gegebenen Durchmesser sucht man die Peripherie nach der Proportion: $7 : 22 = d : x$, oder $100 : 314 = d : x$, diese multiplicirt man mit der Höhe, so gibt das Product die Seitenfläche; addirt man nun zu diesem Producte noch die gefundenen Grundflächen, so hat man die ganze Oberfläche des Cylinders.

Die Höhe sey 15′ 7″, der Durchmesser 2′ 6″, so ist der Inhalt der Oberfläche = 1 D. R., 28 D. F., 17 D. Z., 48 D. L.

§. 6.

Aufgabe.

Den Inhalt der Oberfläche eines geraden Kegels zu finden.

Auflösung. Die Oberfläche eines Kegels besteht aus der Grundfläche, die eine Zirkelfläche ist, und sich aus dem gegebenen Durchmesser leicht finden läßt, und aus einem rechtwinkligten Dreyecke, das um diese Zirkelfläche gewickelt ist; folglich wird man die Oberfläche eines geraden Kegels finden, wenn man aus dem gegebenen Durchmesser der Grundfläche die Peripherie sucht, diese sodann mit der halben Seite, oder was eines ist, die ganze Seite mit der halben Peripherie multiplicirt; dieses Product gibt die Seitenfläche des Kegels; addirt man nun noch die Grundfläche dazu, so gibt die Summe den ganzen Inhalt der Oberfläche des Kegels.

Die Höhe des geraden Kegels sey 8′, der Durchmesser der Grundfläche 6′, so ist der Inhalt der gesammten Oberfläche = 1 D. R., 8 D. F., 33 D. Z. nach geometrischem Maße.

Man findet den Inhalt der Oberfläche eines abgekürzten Kegels, wenn man den Inhalt der krummen Oberfläche des ganzen Kegels berechnet, und von ihm den Inhalt der krummen Oberfläche des abgeschnittenen Stückes abzieht. Sollen die beyden Zirkelflächen dazu gerechnet werden, so findet man sie leicht nach Geomet. eilft. Absch. §. 2.

§. 7.

Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt eines Cubus zu finden.

Auflösung. Man messe eine Seite des auszumessenden Cubus, und erhebe diese zum Cubus, d. h. man multiplicire ihre Länge mit sich selbst, und das Product davon wieder mit eben derselben Länge; so ist dieses letztere Product im Cubikmaße genommen, der körperliche Inhalt des Cubus.

Beweis. Den körperlichen Inhalt eines Cubus finden, heißt nichts anders, als angeben, wie oft der kleine zum Maßstabe angenommene Cubus in dem größern enthalten ist. Multiplicirt man nun eine Seite des zu berechnenden Cubus mit sich selbst, und läßt man dieses Product als Cubikruthen, Cubikschuh u. s. w. gelten, so bekommt man gerade so viele kleine Würfel, als in einer Fläche des Cubus neben einander stehen können. Wird nun dieses Product wieder mit der vorigen Seite multiplicirt, so enthält dieses letztere Product im Cubikmaße genommen, alle Cubus, die in dem auszumessenden Cubus Platz haben, d. i. der ganze Raum wird erschöpft; folglich u. s. w.

Zusatz. Um aus dem gegebenen körperlichen Inhalte eines Cubus dessen Seite zu finden, darf man nur aus diesem Inhalte die Cubikwurzel ziehen, so ist diese das Maß der Seite des Cubus.

Anmerkung. Nennt man den Inhalt des Cubus allgemein S (nach dem lateinischen Ausdrucke Soliditas), und die Seite (von Latus) L, so ist $S = L^3$, welches die Formel zur Berechnung des Inhaltes des Cubus ist.

Die Seite eines Würfel sey $= 8° 6' 4''$, so ist sein körperlicher Inhalt =

$$\begin{array}{r} 864 \\ \hline 746496 \\ 864 \\ \hline \end{array}$$

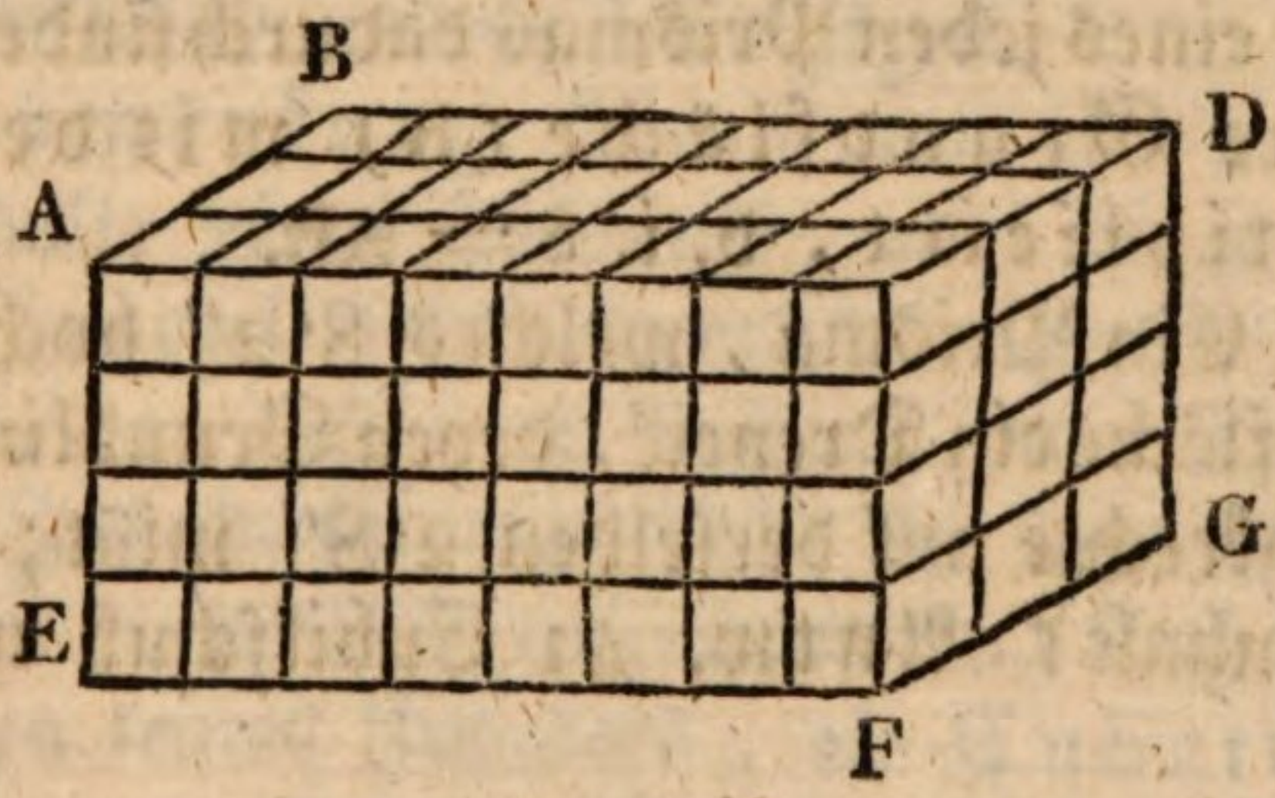
644° 972' 544'' im Cubikmaße.

§. 8.

Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt eines Parallelepipedums zu finden.

Auflösung. Man multiplicire die Grundfläche mit der Höhe, oder was eines ist, die Länge, Breite und Höhe, so gibt das Product im Cubikmaße genommen, den Inhalt des Parallelepipedums.



Es sey das beygezeichnete Parallelepipedum auszumessen, dessen Länge 7″, dessen Breite 3″, und dessen Höhe 4″ beträgt; man wird also auf die Grundfläche 7 Mahl 3 Cubikzoll hinstellen können; auf die zweyte darauf folgende Fläche wieder so viel, auf die dritte ebenfalls so viel, und auf die vierte auch so viel; folglich im Ganzen 7 × 3 × 4 Cubikzoll; der körperliche Inhalt dieses Parallelepipedums beträgt also 84 Cubikzoll. Hieraus ergibt sich, daß man also den Inhalt eines Parallelepipedums dadurch erhält, wenn man seine Länge, Breite und Höhe mit einander multiplicirt.

Ein Parallelepipedum ist 3′ 7″ lang, 2′ 11″ breit und 4′ hoch; wie viel Cubikfuß faßt es in sich? Antwort. 41 Cubikfuß und 1392 Cubikzoll.

§. 9.

Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt eines gegebenen Prismas zu finden.

Auflösung. Da ein dreyseitiges Prisma die Hälfte eines Parallelepipedums ist, das mit ihm gleiche Höhe, und eine doppelt so große Grundfläche hat, und da überdieß alle Prismen in dreyseitige verwandelt werden können, so ergibt sich hieraus, daß man den Inhalt eines jeden Prismas dadurch findet, wenn man seine Grundfläche (B) mit der Höhe (A) multiplicirt, d. i. S = AB.

Z. B. Ein Prisma, welches 8′ 2″ hoch ist, hat zur Grundfläche ein Dreyeck, deren Grundlinie 3′ 10″ und die senkrechte auf derselben 2′ 8″ mißt; wie groß ist sein Inhalt? Antw. 41 Cubikschuh und 1280 Cubikzoll.

§. 10.

Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt eines Cylinders zu finden.

Auflösung. Einen Cylinder kann man als ein Prisma betrachten von unendlich viel Seiten und Ecken; folglich findet man den körperlichen Inhalt eines Cylinders, wenn man seine Grundfläche mit der Höhe multiplicirt, d. i. aus dem gegebenen Durchmesser der Grundfläche des Cylinders sucht man dessen Grundfläche, und multiplicirt dann diese mit der Höhe des Cylinders.

Z. B. Es sey die Peripherie der Grundfläche eines Cylinders = 9734‴, der Durchmesser = 310″,

so ist der Inhalt der Grundfläche $= 9734''' \times \frac{351}{4}^{310''}$

d. i. mit $775'''$

$$\begin{array}{r} 9734''' \\ 775''' \\ \hline 7543850''', \end{array}$$

welches der Flächeninhalt der Grundfläche ist, diese nun mit der Höhe $= 478''$ multiplicirt, gibt $3595960\,3''$ im Cubikmaße, d. i. 35 Cubikruthen, 959 Cubikschuh und 603 Cubikzoll.

1. Anmerkung. Wenn man aus dem körperlichen Inhalte eines Prismas, oder eines Cylinders die Cubikwurzel zieht, so erhält man die Seite eines Würfels, der mit dem Prisma oder Cylinder von gleichem Inhalte ist. Auf solche Art läßt sich also jeder Körper in einen Cubus verwandeln. Daher heißt dieses Finden seines Inhaltes, die Cubatur.

2. Anmerkung. Wenn man den körperlichen Inhalt einer Röhre (eines cylindrischen Ringes) finden soll, so denke man sich die Aushöhlung derselben als ausgefüllt. Auf solche Art hat man dann einen Cylinder, dessen körperlicher Inhalt sich leicht berechnen läßt, und da die Aushöhlung derselben auch die Gestalt eines Cylinders hat, so kann auch diese ihrem Inhalte nach berechnet werden. Um nun den körperlichen Inhalt des cylindrischen Ringes zu finden, darf man nur den Inhalt der Cylinderaushöhlung von dem Inhalte des ganzen Cylinders abziehen.

§. 11.

Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt einer Pyramide und eines Kegels zu finden.

Auflösung. Eine Pyramide ist der dritte Theil eines Prismas, das mit ihm gleiche Höhe und gleiche Grundfläche hat (dritt. Absch. §. 10.); man wird also den Inhalt einer Pyramide finden, wenn man ihre Höhe mit der Grundfläche multiplicirt, und dann das Product davon durch die Zahl 3 dividirt, oder wenn man den dritten Theil der Höhe mit der ganzen Grundfläche, oder umgekehrt den dritten Theil der Grundfläche mit der ganzen Höhe vervielfältiget ($S = \frac{BA}{3}$).

Eben dieses gilt auch von dem Kegel, weil er als eine Pyramide betrachtet werden kann.

Die große egyptische Pyramide zu Memphis, hatte zur Grundfläche 693 Fuß, und zur Höhe 481 Fuß, wie groß war ihr körperlicher Inhalt?

Es sey z. B. die Höhe eines Kegels $= 4^\circ\,2'\,3''$, und der Durchmesser der Grundfläche $= 3^\circ\,5'\,4''$; so verhält sich $100 : 314 = 3^\circ\,5'\,4'' :$ Peripherie

$$\begin{array}{r} 314 \\ \hline 111156 \\ \hline 100) \end{array}$$

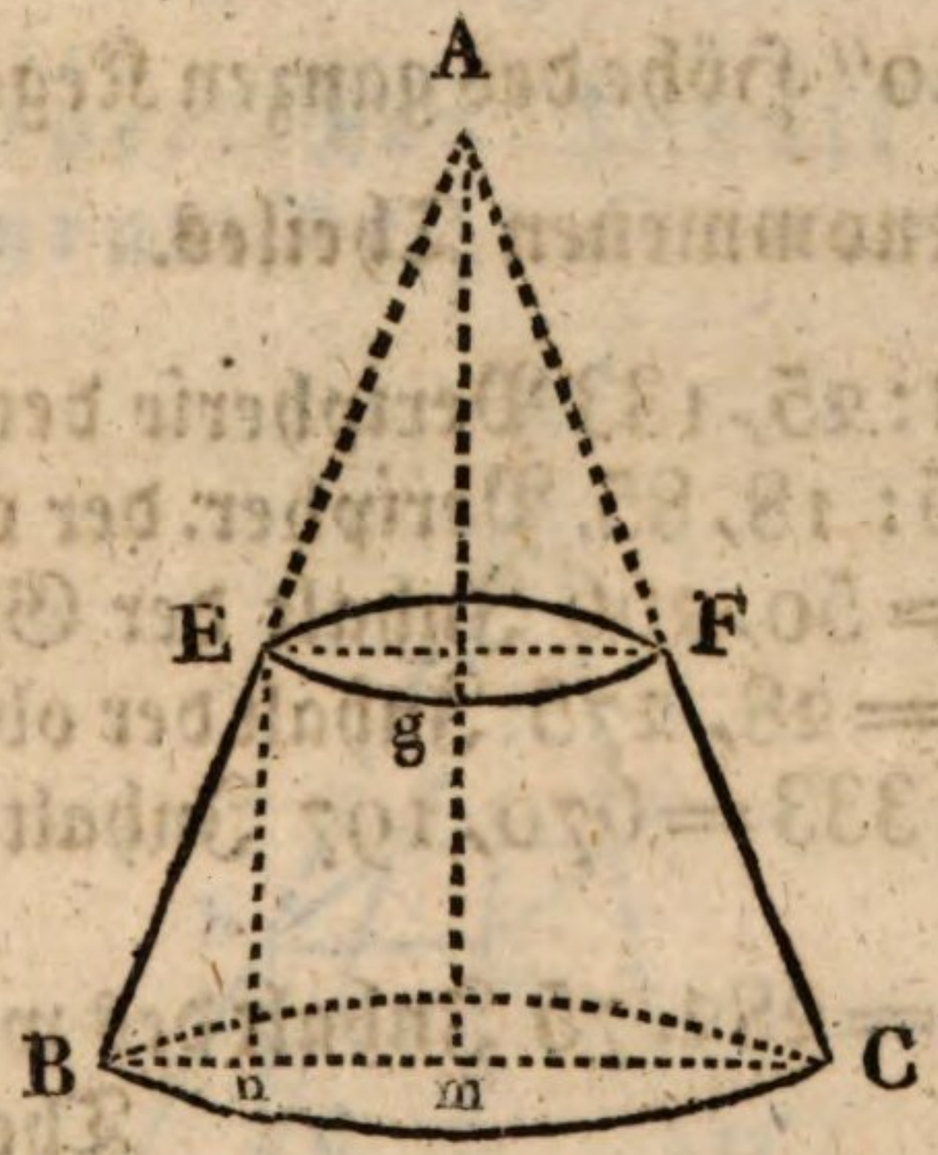
die Peripherie =	$11^\circ\,1'\,1''\,5'''\,6^{IV}$
1/4 Durchmesser =	$8'\,8''\,5'''\,0^{IV}$
die Grundfläche =	$9^\circ\,83'\,73''\,06'''$
1/3 Höhe =	$1^\circ\,4'\,1''\,0'''$
also ist der Inhalt des Kegels =	$13^\circ\,870'\,601''\,460'''$

§. 12.

Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt eines abgestumpften Kegels zu finden.

Auflösung. Um den körperlichen Inhalt eines abgekürzten Kegels zu finden, so suche man zuerst den Inhalt des ganzen Kegels. Hat man diesen, so suche man dann noch den Inhalt des abgebrochenen Stückes des Kegels, ziehe diesen von jenem ab, so gibt der Rest den Inhalt des abgekürzten Kegels. Um den Inhalt des ganzen Kegels finden zu können, muß man nebst der Grundfläche desselben auch seine Höhe wissen. Wie findet man nun die Höhe eines abgekürzten Kegels? Die Höhe eines abgekürzten Kegels, z. B. des Kegels ABC, wovon nur das Stück EFBC bekannt ist, findet man auf folgende Art:



Man ziehe zu gm, welches die Höhe des abgestumpften Kegels EFBC ist, und auf BC senkrecht steht, aus dem Puncte E die Linie En parallel, so sind die zwey rechtwinkligten Dreyecke AmB und EnB einander ähnlich; folglich Bn : nE = Bm : mA, d. i. es verhält sich der Unterschied der beyden Radien des abgekürzten Kegels zu der unbekannten Höhe desselben, wie der Radius der größern Grundfläche zu der Höhe des ganzen Kegels; denn Bn ist die Hälfte von Bm; Bn wird also aus dem Durchmesser BC gefunden. Man suche nun aus dem gege-

benen Durchmesser und der gefundenen Höhe den Inhalt des ganzen Kegels. Alsdann ziehe man gm von mA ab, so erhält man die Höhe von dem Abschnitte des Kegels AEF, nähmlich gA; aus dieser und dem Durchmesser EF suche man den körperlichen Inhalt von EAF, und ziehe ihn dann von dem vorher gefundenen Inhalte des ganzen Kegels ab, so bekommt man den körperlichen Inhalt von dem abgekürzten Kegel EFBC.

Es sey BC = 8 Zoll, EF = 6 Zoll, gm = 10 Zoll, so ist Bm = 4″, Eg = 3. Bn = Bm — nm = Bm — Eg = 1. Bn : nE = Bm : mA, d. i. 1″ : 10″ = 4″ : 40″ Höhe des ganzen Kegels — $\frac{10}{30}$ Höhe gA des weggenommenen Theiles.

113 : 355 = 8 : 25, 133 Peripherie der Grundfläche.
113 : 355 = 6 : 18, 85 Peripher. der obersten Fläche.
25, 133 × 2 = 50, 266 Inhalt der Grundfläche.
18, 85 × 1.5 = 28, 275 Inhalt der obersten Fläche.
50, 266 × 13. 333 = 670, 197 Inhalt des ganzen Kegels.
28, 275 × 10 = 282. 75 Inhalt des weggenommenen Theiles.
670, 197 — 282. 75 = 387″. 447‴ Inhalt des abgestutzten Kegels.

1. Anmerkung. Diese aufgestellte Theorie von der Berechnung eines abgestumpften Kegels, läßt sich auf sehr viele Fälle des gemeinen Lebens anwenden. Darnach kann z. B. der körperliche Inhalt eines Kornhaufens, eines Baumstammes, eines Weinfasses, das aber als ein doppelter abgestumpfter Kegel zu betrachten ist, berechnet werden.

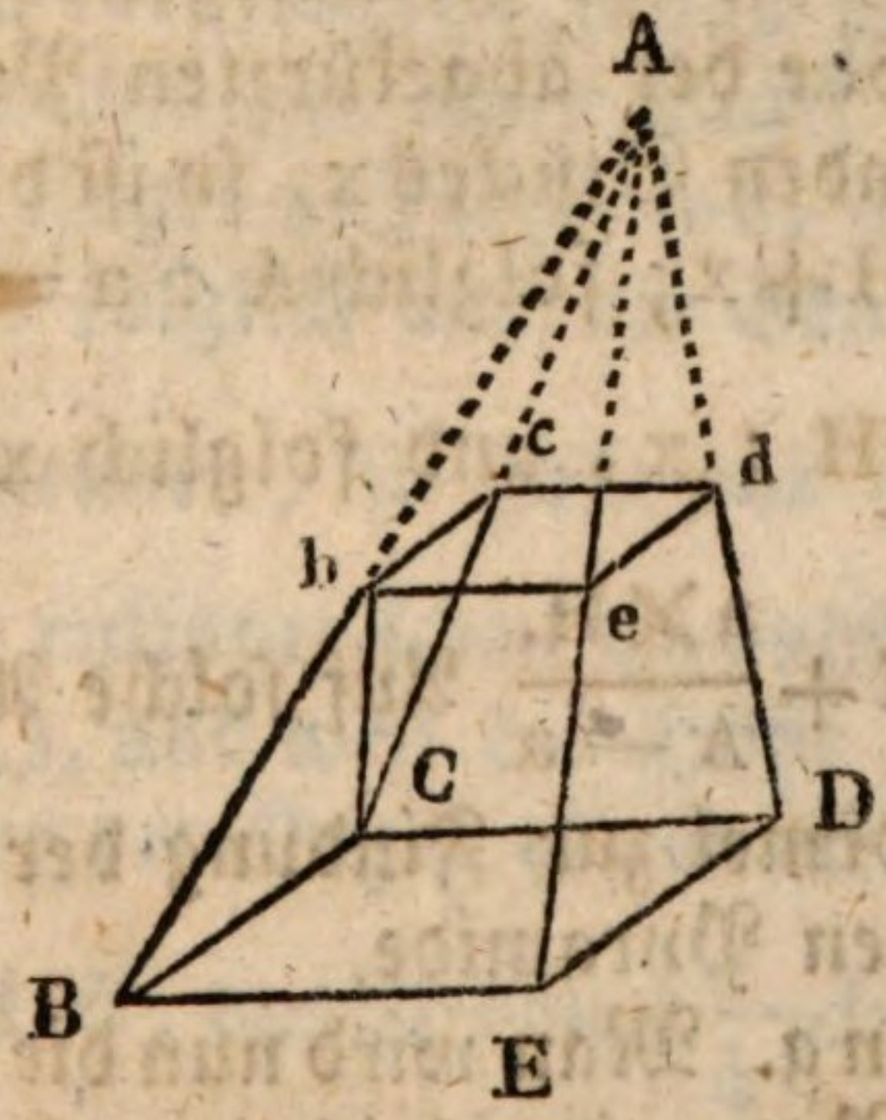
2. Anmerkung. Um die Oberfläche des abgekürzten Kegels zu erhalten, ziehe man die Größe der

krummen Seitenfläche des kleinen Kegels von der Größe der krummen Seitenfläche des ganzen Kegels ab, so bekommt man die krumme Seitenfläche des abgekürzten Kegels, zu der man noch die beyden Grundflächen addiren muß (§. 6.). Die Höhe des abgekürzten Kegels sey 14″ 16‴, der Halbmesser der Grundfläche 8″ 6‴, der Halbmesser des Durchschnittes 7″, wie groß ist die Oberfläche des abgekürzten Kegels im geometrischen Maße?

§. 13.

Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt einer abgekürzten Pyramide zu finden.



Auflösung. Man sucht zuerst den Inhalt der ganzen Pyramide, und dann von dem abgeschnittenen Stücke (bcde A), dieses zieht man alsdann von dem ganzen Inhalte der Pyramide ab, so hat man den verlangten Inhalt der abgekürzten Pyramide. Wie findet man nun die Höhe der abgekürzten Pyramide?

Da die Durchschnittsfläche (bcde) mit der Grundfläche (BCDE) in einer abgekürzten Pyramide ähnlich

ist, so ist das Verhältniß der gleichnahmigen Seiten dieser Figuren gleich dem Verhältnisse ihrer Entfernungen von der Spitze der Pyramiden, d. i. bc : BC = bC : bA, d. i. zu x (zweyt. Absch. §. 6.); man findet also die Höhe einer abgestutzten Pyramide, wenn man zwey gleichnahmige Seiten der Durchschnittsfläche und Grundfläche, z. B. bc und BC, und die Höhe der abgestutzten Pyramide bC mißt, und dann diese drey Größen in die Proportion setzt: Wie sich zwey gleichnahmige Seiten der Durchschnittsfläche und der Grundfläche zu einander verhalten, so verhaltet sich auch die Höhe der abgestutzten Pyramide zur unbekannten Höhe der ganzen Pyramide.

1. Anmerkung. Eine Seite der Grundfläche der Pyramide heiße A, die ihr gleichliegende des Durchschnittes a, die Höhe der abgekürzten Pyramide H, die Höhe des fehlenden Stückes x, so ist die Höhe der ganzen Pyramide H + x; folglich A : a = H + x : x; also A — a : a = H : x, und folglich $x = \frac{a \times H;}{A - a}$

folglich $H + x = H + \frac{a \times H.}{A - a}$ Auf solche Art hat man eine allgemeine Formel zur Findung der unbekannten Höhe der ganzen Pyramide.

2. Anmerkung. Man wird nun die Oberfläche einer abgestutzten Pyramide leicht zu finden wissen (§. 6. §. 12. 2. Anmerk.)

§. 14.

Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt einer Kugel zu finden.

Auflösung. Da (nach dritt. Absch. §. 16.) eine Kugel zwey Drittheilen von einem Cylinder gleich ist, der mit ihr denselben Durchmesser und dieselbe Höhe hat, und da man aus dem gegebenen Durchmesser und der gegebenen Höhe eines Cylinders seinen körperlichen Inhalt berechnen kann (§. 10.), so läßt sich der körperliche Inhalt einer Kugel dadurch finden, wenn man den körperlichen Inhalt eines Cylinders sucht, dessen Höhe und Durchmesser dem Durchmesser der Kugel gleich ist, und dann von diesem gefundenen Inhalte des Cylinders 2/3 nimmt. Man nimmt nähmlich den Durchmesser der Kugel als Durchmesser der Grundfläche, und Länge der Höhe eines Cylinders an, berechnet daraus den Inhalt des Cylinders, und sucht hieraus den körperlichen Inhalt der Kugel. Wir wollen den Durchmesser einer Kugel und des Cylinders, wovon die Kugel 2/3 seyn soll, d, die Peripherie der Kugel, und folglich auch die Grundfläche dieses Cylinders p nennen, so stellt das Product $\frac{1}{4}$dp den Inhalt der cylinderischen Grundfläche (Geom. eilft. Absch. §. 2.), und weil die Höhe des Cylinders dem Durchmesser der Kugel gleich gesetzt wird, und also ebenfalls d ist, das Product $\frac{1}{4}$dpd $= \frac{1}{4}pd^2$ den körperlichen Inhalt des Cylinders vor. Der dritte Theil von $\frac{1}{4}pd^2$ ist $\frac{1}{12}pd^2$, und folglich zwey Drittel davon, nähmlich $\frac{2}{12}pd^2 = \frac{1}{6}pd^2$ der Inhalt der Kugel (dritt. Absch. §. 16.). Hieraus ergibt sich also die Regel, daß man den körperlichen Inhalt einer Kugel dadurch finde, wenn

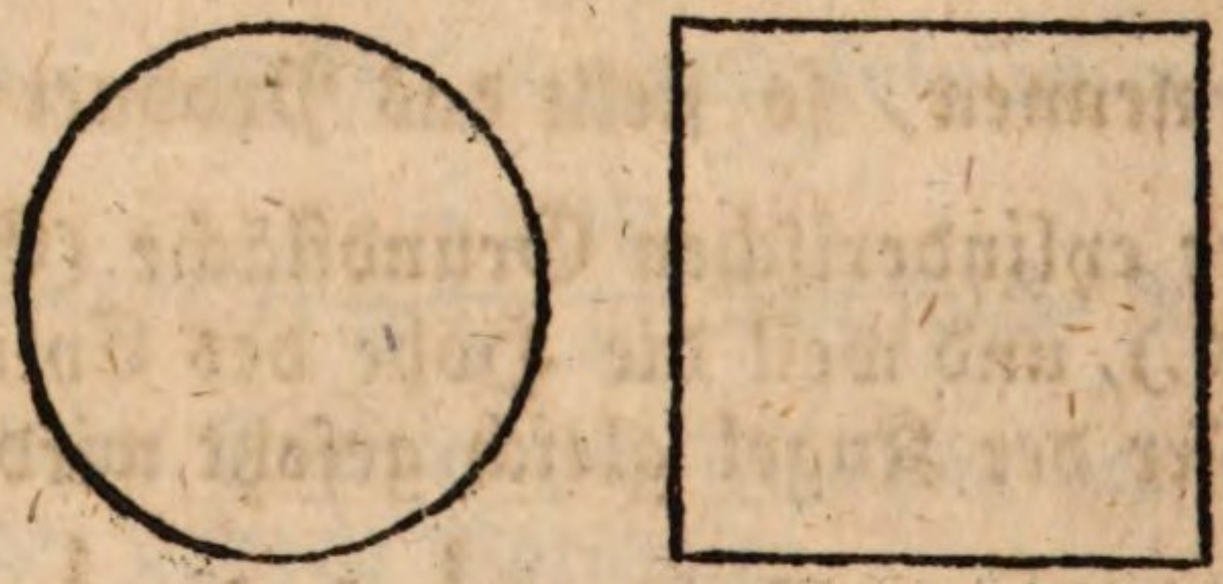
man das Quadrat ihres Durchmessers in die Peripherie multiplicirt, und dieses Product durch 6 dividirt.

Es sey z. B. d, d. i. der Durchmesser einer Kugel 100 Zoll lang, so ist p oder die Peripherie derselben 314″ (eilft. Absch. Vorerinnerung), und daher der körperliche Inhalt $\frac{314 \times 100^2}{6} = \frac{3140000}{6} =$

$523323\frac{1''}{3}$ im Cubikmaße.

Eine steinerne Kugel hält 18″ im Durchmesser, was wiegt sie, wenn der Cubikschuh Stein 120 Pfund schwer ist? Zuerst berechne man den körperlichen Inhalt dieser Kugel, und hernach suche man ihr Gewicht, welches, wenn richtig gerechnet wird, zwey Zentner 12 1/7 Pfund beträgt.

Eine andere Auflösung.



Diese runde Figur stelle eine Kugel vor, und die viereckigte einen Cubus, der den Durchmesser der Kugel zur Seite hat. Man kann also diesen Cubus den Cubus des Diameters der Kugel nennen. Wie verhält sich nun die Kugel zu dem Cubus ihres Durchmessers? Wenn der Durchmesser der Kugel 100 gleiche Theile, z. B. Zolle faßt, so enthält die Peripherie eines größten Zirkels der Kugel 314 solcher

Theile. So ist nun auch die Peripherie der Grundfläche des Cylinders = 314
1/4 Durchmesser = 25

Also die Grundfläche des Cylinders = 7850
Die Höhe desselben = 100

Folglich der Inhalt des Cylinders = 785000
Hieraus 2/3 gibt für den Inhalt der Kugel $523333\frac{1}{3}$

Da der Durchmesser der Kugel = 100 ist, so ist der Cubus des Durchmessers der Kugel = 1000000; also verhält sich die Kugel zum Cubus des Durchmessers, wie $523333\frac{1}{3}$ zu 1000000 = 1570000 zu 3000000 = 157 : 300; nach vorgenommener Abkürzung erhält man also 300 : 157 = Cubus des Durchmessers : Kugel, nähmlich es verhält sich der Cubus des Durchmessers zum körperlichen Inhalte der Kugel, wie 300 : 157. Vermittelst dieser Proportion läßt sich nun der körperliche Inhalt einer jeden Kugel = x leicht berechnen. Man darf bloß den Durchmesser der Kugel messen, denselben dann cubiren; alsdann verhält sich 300 : 157 = Cubus d. Durchm. : Kugel, d. i. zu x.

Es sey z. B. der Durchmesser einer Kugel = 256‴; so ist der Cubus des Durchmessers 16777216‴; und es verhält sich

300 : 157 = 16777216 : Kugel

157

2634022912

300)

der Inhalt der Kugel = 8′ 780″ 076‴ 373ᴵⱽ.

Anmerkung. Da sich aber das Verhältniß 300 : 157 auf das Verhältniß 100 : 314 gründet, welches, wie bekannt, nicht vollkommen richtig ist; so kann auch jenes nicht für ganz vollkommen richtig angenommen werden.

Zusatz. Durch Hülfe des vorigen Verhältnisses läßt sich auch aus dem gegebenen Inhalte einer Kugel ihr Durchmesser finden. Wir können nähmlich vermittelst desselben den Cubus des Durchmessers berechnen, aus dem man dann nur die Cubikwurzel ziehen darf, so gibt diese den Durchmesser der Kugel. Es sey der Inhalt einer Kugel = 8'780''076'''373^{IV}, so verhält sich

157 : 300 = 8780076373 : Cubus d. Durchm.

300

---

157) 2634022912

Cubus d. Durchm. = 16777216, daraus die Cubikwurzel gezogen, gibt 256''', welches der Durchmesser ist.

§. 15.

Aufgabe.

Die Oberfläche einer Kugel zu finden.

Auflösung. Die Oberfläche einer Kugel findet man, wenn man ihre Peripherie mit dem Durchmesser multiplicirt, und das so entstandene Product im Quadratmaße nimmt. Nennt man allgemein die Oberfläche der Kugel s, die Peripherie p, und den Durchmesser d, so ist s = pd.

Beweis. Man kann sich die Oberfläche der Kugel als eine Sammlung von unendlich kleinen ebenen Flächen, z. B. von lauter kleinen Vierecken vorstellen, und denkt man sich, daß von allen Puncten des Umfanges einer jeden dieser Flächen gerade Linien nach

dem Mittelpuncte der Kugel gezogen seyen; so entstehen lauter Pyramiden, welche lauter gleiche, und zwar unendlich kleine Grundflächen und einerley Höhe, nähmlich den Radius der Kugel haben. Alle diese unendlich kleinen Grundflächen der Pyramiden machen zusammen genommen, die ganze Oberfläche der Kugel aus. Es heiße ein solcher unendlich kleiner Theil von der Oberfläche der Kugel g, die Anzahl derselben n, und die Oberfläche der Kugel selbst s, so ist

$$g \times n = s.$$

Der Radius der Kugel, und also die Höhe der kleinen viereckigten Pyramide, die zusammen genommen die ganze Kugel ausmachen, heiße r, so ist der körperliche Inhalt einer solchen Pyramide, weil g die Grundfläche bedeutet

$$\frac{1}{3} r \times g \text{ (§. 11.)}$$

und weil n die Anzahl derselben vorstellt, die Summe aller dieser Pyramiden, folglich der Inhalt der Kugel

$$\frac{1}{3} r \times g \times n, \text{ d. i. } \frac{1}{3} r \times s$$

weil $g \times n = s$ vermöge der angenommenen Bedingung. Hieraus folgt, daß man auch den Inhalt der Kugel erhält, wenn man den dritten Theil des Radius mit der Oberfläche derselben multiplicirt. Weil nun der Radius die Hälfte des Durchmessers, und folglich $\frac{1}{3}$ des Radius, $\frac{1}{6}$ des Durchmessers ist, so pflegt man diesen Satz auch so auszudrücken: Das Product aus der Oberfläche der Kugel in den sechsten

Theil des Durchmessers, oder der sechste Theil des Productes aus der Oberfläche in den Durchmesser der Kugel ist dem körperlichen Inhalte derselben gleich. Nennt man den Durchmesser, wie vorher, d; so ist also

$$\frac{1}{3} r s = \frac{1}{6} d s.$$

Vergleicht man diesen Satz mit dem vorhergehenden, so ergibt sich, wie man den Inhalt der Oberfläche der Kugel finden kann; denn da nach §. 14. der Inhalt der Kugel durch das Product $\frac{1}{6} p d^2$, und nach dem obigen Satze auch durch das Product $\frac{1}{6} d s$ ausgedrückt werden kann, so folgt hieraus, weil der Buchstabe d einerley Bedeutung hat, daß

$$\frac{1}{6} p d^2 = \frac{1}{6} d s$$

$$6 \times \frac{1}{6} p d^2 = 6 \times \frac{1}{6} d s \text{ (Einleit. §. 8. 5.).}$$

$$\frac{p d^2}{d} = \frac{d s}{d} \text{ (Einleit. §. 8. 7.),}$$

d. i. $p d = s$, d. h. weil d dem Durchmesser, p die Peripherie, und s die Oberfläche der Kugel bedeutet, die Oberfläche einer Kugel wird gefunden, wenn man ihre Peripherie mit dem Durchmesser multiplicirt.

Zusatz. Weil der größte Kreis einer Kugel mit ihr einerley Mittelpunct, und einerley Durchmesser hat (zweyt. Absch. §. 11.), folglich auch einerley Peripherie hat; so können die Buchstaben d und p auch

den Durchmesser und die Peripherie des größten Kreises bedeuten. Das Product $\frac{1}{4}$ p d würde also die Fläche des größten Kreises vorstellen (Geometrie, eilft. Abschn. §. 2.). Nun ist die Oberfläche der Kugel = p d, und p d beträgt vier Mahl mehr, als $\frac{1}{4}$ p d, folglich ist die Oberfläche der Kugel vier Mahl größer, als die Fläche des größten Kreises. Wenn man also das Product aus der Peripherie, und aus dem Durchmesser einer Kugel noch ein Mahl mit dem sechsten Theil des Durchmessers multiplicirt, so bekömmt man dadurch den körperlichen Inhalt der Kugel, und umgekehrt, wenn man den körperlichen Inhalt einer Kugel mit dem sechsten Theil des Durchmessers dieser Kugel dividirt, so gibt der Quotient die Oberfläche der Kugel.

Beyspiele.

Erstes Beyspiel. Es sey der Durchmesser einer Kugel 50 Schuh lang, und man soll die Oberfläche dieser Kugel finden, so suche man zuerst die Peripherie

100 : 314 = 50′ : x

50

100) 15700 = 157′ = der Peripherie.

Um nun die Oberfläche zu erhalten, multiplicire man die Peripherie mit dem Durchmesser, d. i. 157′ × 50′ = 7850 Quadratschuh. Wollte man noch den körperlichen Inhalt der Kugel finden, so müßte man die Oberfläche 7850□′ mit dem sechsten Theil von dem Durchmesser 50, oder mit 50 multipliciren,

und dann das Product mit sechs dividiren. Man erhält $65416\frac{2}{3}$ Cubikschuh, welche den körperlichen Inhalt der obigen Kugel ausmachen.

Zweytes Beyspiel. Eine Kugel habe zwölf Zoll im Durchmesser, wie groß ist ihre Oberfläche?

Antwort. 45' 24'' im Quadratmaße. Wie groß wird ihr körperlicher Inhalt seyn?

Drittes Beyspiel. Die Erdkugel hält im Durchmesser 1720 geographische Meilen, wie groß ist ihre Oberfläche in Quadratmeilen?

Antwort. $9297828\frac{4}{7}$ Quadratmeilen. Wenn ihr körperlicher Inhalt berechnet wird, so müssen $2665377047\frac{16}{21}$ Cubikmeilen heraus kommen.

1. Anmerkung. Soll man die Oberfläche eines regulären Körpers berechnen, so ist dieses leicht; man darf nur den Flächeninhalt einer Fläche desselben suchen, und dann dieselbe, da alle Flächen eines regulären Körpers einander gleich sind, mit der Anzahl aller Flächen, die den Körper einschließen, multipliciren; das gefundene Product enthält dann im Quadratmaße die ganze Oberfläche des Körpers. Uebrigens ist zu merken, daß das Teträdrum als eine Pyramide angesehen, und folglich seinem körperlichen Inhalte nach, eben so berechnet wird. Das Oktädrum ist eine doppelte Pyramide, das Ikosädrum ist eine Sammlung von Pyramiden, und das Dodecädrum ist ebenfalls eine Sammlung von zwölf Pyramiden; folglich werden diese Körper nach Art der Pyramiden berechnet.

2. Anmerkung. Um die Oberfläche eines irregulären Körpers zu finden, hat man kein anderes Mittel, als daß man die ganze Oberfläche desselben in lauter geradlinigte Figuren abtheile, den Inhalt einer jeden insbesondere berechne, und zuletzt alle in eine Summe bringe.

§. 16.

Aufgabe.

Einen irregulären Körper seinem Inhalte nach auszumessen.

Auflösung. 1) Man nehme ein ordentliches vollkommenes hohles Parallelepipedum, welches das Wasser hält, und stelle es durch Hülfe der Bleywage horizontal.

2) Man lege dann den zu berechnenden Körper hinein, und übergieße ihn nach Beschaffenheit desselben mit Wasser oder feinem Sande bis an eine innerhalb der Seitenflächen mit der Grundfläche gezogene Parallele.

3) Man hebe hierauf sorgfältig den Körper heraus, und bemerke, wie viel Schuh, Zoll u. s. w. das Wasser oder der wieder geebnete Sand sich gesetzt hat.

4) Mit dieser Höhe multiplicire man die Grundfläche des Parallelepipedums; so ist das Product im Cubikmaße genommen der körperliche Inhalt des irregulären Körpers.

Beweis. Denn der Raum, um den sich das Wasser oder der geebnete Sand setzt, ist dem Raume gleich, den der irreguläre Körper einnimmt.

Anmerkung. Ist der Körper zu groß, als daß er in ein solches Gefäß gelegt werden kann, z. B. eine Statue; so errichte man um denselben ein Parallelepipedum oder ein viereckigtes Prisma, fülle den leeren Raum aus, und verfahre übrigens, wie oben gezeigt wurde.

Dritter Theil.

Ebene Trigonometrie.

Einleitung.

§. 1.

Erklärung der Trigonometrie.

Die Trigonometrie (Dreyeckslehre oder Ausmessungslehre der Dreyecke) ist die Wissenschaft, welche lehret, aus drey gegebenen Stücken eines Dreyeckes, worunter aber wenigstens eine Seite seyn muß, die übrigen durch Rechnung finden.

1. Anmerkung. Bey einem jeden Dreyecke kommen 3 Winkel und 3 Seiten vor. Sind nun 3 von diesen sechs Stücken eines Dreyeckes gegeben, so lehret die Trigonometrie, wie man die 3 übrigen unbekannten Stücke durch Rechnung (durch eine angestellte Proportion) finden kann. Wenn mir z. B. eine Seite sammt zwey Winkeln eines Dreyeckes gegeben sind, so setzt mich die Trigonometrie in den Stand, die übrigen zwey Seiten und den dritten Winkel dieses Dreyeckes durch Rechnung vermittelst der Proportionslehre aus den gegebenen Stücken zu finden.

2. Anmerkung. Daß nothwendig eine Seite unter den gegebenen Stücken vorkommen müsse, erhellet daraus, weil 3 Winkel verschiedene Seiten haben, und unendlich vielen Dreyecken gemein seyn können; folglich wären in diesem Falle, wenn 3 Winkel eines Dreyeckes gegeben würden, die gegebenen Stücke nicht bestimmt, und man könnte also daraus die drey Seiten des Dreyeckes nicht bestimmt herleiten; man will aber die Seiten bestimmt wissen.

Daß gerade 3 Stücke von einem Dreyecke, worunter wenigstens eine Seite seyn muß, gegeben werden müssen, um die übrigen Stücke des Dreyeckes durch Rechnung finden zu können, gründet sich auf die Lehre von der Congruenz und Aehnlichkeit der Dreyecke, die wir in der Geometrie abhandelten. — Die drey Stücke des Dreyeckes werden entweder in Zahlen, oder allgemein in Buchstaben gegeben.

§. 2.

Unterschied zwischen der Trigonometrie und der Geometrie.

Die Geometrie setzt uns auch in den Stand, aus 3 bestimmenden Stücken eines Dreyeckes die 3 übrigen unbekannten Stücke zu finden; allein dieses geschieht durch Verzeichnung eines gleichen oder ähnlichen Dreyeckes. Die Trigonometrie hingegen lehret die unbekannten Stücke eines Dreyeckes bloß durch Rechnung finden, ohne daß man nöthig hat, ein gleiches oder ähnliches Dreyeck zu verfertigen. Beyde diese Wissenschaften unterscheiden sich also durch die Art und Weise, wodurch sie das Unbekannte eines Dreyeckes aus dem Bekannten finden.

§. 3.

Eintheilung der Trigonometrie, in die ebene und sphärische.

Die Dreyecke, womit sich die Trigonometrie beschäftiget, sind entweder in einer Ebene, oder auf einer Kugelfläche verzeichnet. Dieses hat Veranlassung gegeben, die Trigonometrie in die ebene und sphärische einzutheilen. Sie heißt eben, wenn die Dreyecke, die sie betrachtet, in einer Ebene, d. i.

geradlinigte Dreyecke sind; sphärisch, wenn sie auf einer Kugelfläche verzeichnet sind; die sphärische Trigonometrie gibt sich also mit sphärischen Dreyecken ab, d. i. mit solchen, deren Seiten Bögen größter Cirkel auf der Oberfläche einer Kugel sind. Die sphärische Trigonometrie gehört zur Astronomie. Wir handeln hier nur die ebene Trigonometrie ab.

§. 4.

Nutzen der Trigonometrie.

Um den großen Nutzen der Trigonometrie einzusehen, darf man nur bedenken, wie vielen Fehlern man beym Verzeichnen der Figuren ausgesetzt ist, theils aus Schwäche unserer Sinne, theils wegen der Unvollkommenheit der Werkzeuge, die man dazu braucht. Wenn man nun die an einem Dreyecke vorkommenden Stücke nicht anders, als durch Hülfe der Geometrie berechnen könnte; indem man nähmlich jederzeit die Dreyecke verzeichnen müßte, so würde nothwendig manche Berechnung fehlerhaft ausfallen. Um dieses noch besser einzusehen, so bedenke man nur Folgendes: Oft sind an dem Himmel Linien auszumessen, die viele tausend Millionen Meilen betragen. Wollte man nun, um sie auszumessen, Dreyecke verfertigen, und darauf durch Hülfe des verjüngten Maßstabes ihre Längen auftragen; so müßte eine Linie, die etwa einen Zoll lang ist, 1000 und noch mehr Millionen Meilen bedeuten. Wenn man nun hier nur um den 1000sten Theil eines Zolles fehlen würde, welches doch leicht geschehen könnte, so betrüge dieser Fehler schon Millionen Meilen. Und daß dieser Fehler, und wohl noch größere Fehler bey der geometrischen Berechnung gar leicht geschehen können, ist leicht zu denken, weil man die Winkel, und überhaupt die Figu-

ren niemahls so scharf und genau wegen der Schwäche unserer Sinne, und wegen der Unvollkommenheit der Werkzeuge verzeichnen kann. Hier kömmt uns nun die Trigonometrie zu Hülfe, indem sie lehret, ohne Verzeichnung der Figuren aus drey gegebenen Stücken eines Dreyeckes die übrigen durch bloße Rechnung zu finden. Es ergibt sich also aus dem Gesagten der große Nutzen, den diese Wissenschaft hat, um die Größen richtig auszumessen.

§. 5.

Was man unter trigonometrischen Linien versteht.

Wenn man aus den drey gegebenen Stücken eines Dreyeckes die übrigen fehlenden Stücke durch bloße Rechnung finden soll, so kann wohl dieses nicht anders geschehen, wie man leicht einsehen wird, als durch Hülfe der Proportionslehre. Man muß nähmlich aus den drey gegebenen Stücken des Dreyeckes eine Proportion herleiten, und dann das vierte unbekannte Glied berechnen. Da aber die Winkel in einem Dreyecke mit den gegenüber stehenden Seiten in keiner Proportion stehen, so lassen sich aus den drey gegebenen Stücken eines Dreyeckes, aus den Winkeln und Seiten desselben, die unbekannten Stücke allein nicht herleiten. Die Mathematiker haben daher gewisse gerade Linien erfunden, welche sich statt der Winkel und ihrer Bögen setzen lassen, und welche mit den Seiten der Dreyecke in einer Proportion stehen. Man nennt diese erfundenen Linien, weil sich die Trigonometrie derselben zur Berechnung der Dreyecke bedient, trigonometrische Linien. Sie haben aber noch ihre besondern Nahmen, als: Sinus, Cosinus, Tangente, Secante und Cosecante. Diese Linien nun müssen wir vor allen Dingen kennen lernen.

Anmerkung. Die ganze Kunst der Trigonometrie besteht darin, daß man die Eigenschaften dieser Linien kennt, und die Fälle weiß, in welchen diese oder jene trigonometrischen Linien statt der Winkel zu gebrauchen sind, damit man die verlangten drey Glieder der Proportion bekommt, um so im Stande zu seyn, daraus das vierte unbekannte Glied berechnen zu können.

Erster Abschnitt.

Erklärung der trigonometrischen Linien und Darstellung ihrer Eigenschaften.

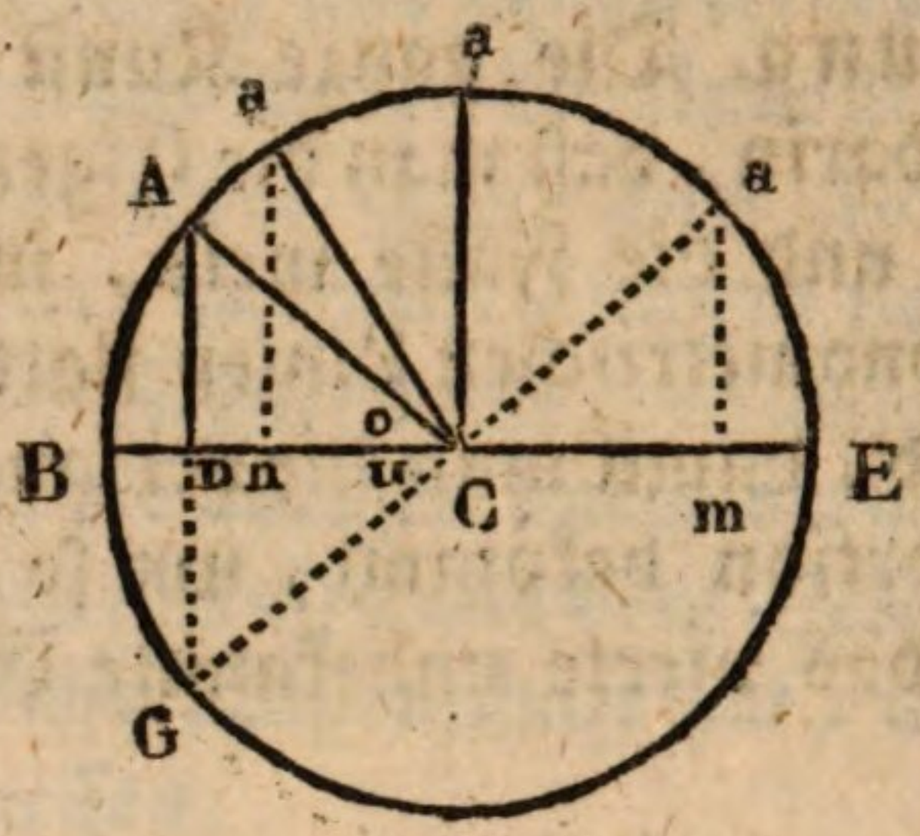
I.

Vom Sinus und Cosinus.

§. 1.

Erklärung.

Wenn man aus der Spitze eines Winkels zwischen seinen Schenkeln einen beliebigen beschreibt, der die Schenkel schneidet, und dann aus dem einen Schneidungspuncte auf den andern Schenkel des Winkels eine senkrechte errichtet, so ist diese der Sinus des Winkels und des Bogens.



So ist z. B. die senkrechte Linie AD der Sinus des Bogens AD, und des Winkels o. Das Zeichen, womit man den Sinus bezeichnet, ist der erste Buchstabe, oder die drey ersten Buchstaben dieses Wortes. Das angeführte Beyspiel würde man daher so schreiben:

AD = s. o = s. A C, oder
AD = sin. o = sin. AC.

1. Zusatz. Der Sinus eines und des nähmlichen Winkels kann kleiner oder größer seyn, je nachdem der Radius des beschriebenen Kreises größer oder kleiner ist; unterdessen aber behalten alle Sinus immer gleiches Verhältniß zum Radius, wie es aus der Aehnlichkeit der Dreyecke erhellet; denn der Sinus bildet jederzeit mit den zwey Schenkeln desjenigen Winkels, von dem er der Sinus ist, ein rechtwinkligtes Dreyeck. Der Sinus mag nun größer oder kleiner gezogen werden, je nachdem der Bogen der zwischen den Schenkeln des Winkels beschrieben wird, größer oder kleiner ist, so ist alle Mahl das durch das Ziehen des größern Sinus entstandene rechtwinkligte Dreyeck, dem andern durch das Ziehen des kleinern Sinus entstandenen rechtwinkligten Dreyeck ähnlich, weil in beyden Dreyecken zwey gleiche Winkel vorkommen, nähmlich der gemeinschaftliche Winkel, und der rechte Winkel, den jedes Dreyeck hat; folglich behält der Sinus immer gleiches Verhältniß zum Radius,

er mag groß oder klein seyn. Man sehe obige Figur an.

2. Zusatz. Wenn man den Schenkel BC fest liegen läßt, den andern aber um den Mittelpunct C bewegt, ihn anfänglich auf BC legt, und nach und nach fortrückt, so, daß er in Lagen AC, aC, aC, aC und EC gelangt; so sieht man ein, daß die Sinus mit den Winkeln wachsen, bis der Winkel = 90° wird. Nun ist der Sinus aC dem Halbmesser gleich. Mit dem weitern Wachsthume des Winkels nimmt der Sinus ab, und ist ganz verschwunden, wenn der Winkel = 180° geworden ist. Hieraus ergeben sich folgende zwey Sätze:

1) Wenn der Winkel bis 90° wächst, so wächst auch sein Sinus. Ist der Winkel 0 (Null), so ist der Sinus gleichfalls 0; wird der Winkel = 90°, so ist der Sinus dem Radius gleich.

2) Wächst der Winkel über 90°, wird der Winkel stumpf, so nimmt sein Sinus immer mehr und mehr ab, und wird 0, wenn der Winkel = 180°.

3. Zusatz. Der Sinus eines stumpfen Winkels ist dem Sinus seines Nebenwinkels gleich; mit andern Worten: Der Sinus eines stumpfen Winkels ist dem Sinus seines Supplements gleich, d. i. AD = sin. ACB = sin. ACE; ferner an = sin. aCB = sin. aCE; denn von dem Endpuncte des Radius AD und an kann auf den Radius CE keine andere senkrechte gefällt werden, als diejenige, die auf den rückwärts nach B verlängerten Radius sich fällen läßt, nähmlich wieder AD und an. Zwey Nebenwinkel haben also einerley Sinus.

4. Zusatz. Der Sinus eines Winkels kann nie größer werden, als der Radius, daher auch der Radius den Nahmen sinus totus führt. Man zeigt ihn auch durch den Buchstaben R oder r an. Weil kein Sinus

größer werden kann, als der sinus totus, so kann man die Sinus als eigentliche Brüche des sinus totus oder des Radius ansehen, der als Maßstab angenommen wird.

5. Zusatz. Wenn man in einem rechtwinkligten Dreyecke die eine Cathete als den Sinus des gegenüber stehenden Winkels betrachtet, so ist die Hypothenuse der Radius. Man sehe obige Figur an.

§. 2.

Lehrsatz.

Die Hälfte der Sehne eines Bogens oder Winkels ist der Sinus der Hälfte des Bogens oder Winkels.

Beweis. Wenn man den Sinus AD in gerader Richtung verlängert, bis er den Zirkel in G schneidet; so entsteht eine Sehne AG, wovon AD die Hälfte ist, so wie AB die Hälfte des Bogens ABG seyn muß (neunt. Absch. § 3. Geomet.); denn DC steht senkrecht auf AG, weil der Winkel ADC ein rechter ist; folglich theilt die Linie CB die Sehne AG und auch den Bogen ABG in zwey gleiche Theile. Die zwey Dreyecke ADC und DGC sind sich gleich, weil in beyden drey gleiche Seiten vorkommen, AD = DG, DC = DC, und AC = CG; folglich $< o = < n$, und der $< GDC = ADC$; ADC ist aber ein rechter Winkel; folglich ist auch GDC ein rechter Winkel; DG, d. i. die halbe Sehne ist also der Sinus des Winkels n, d. i. der Hälfte des Winkels ACG.

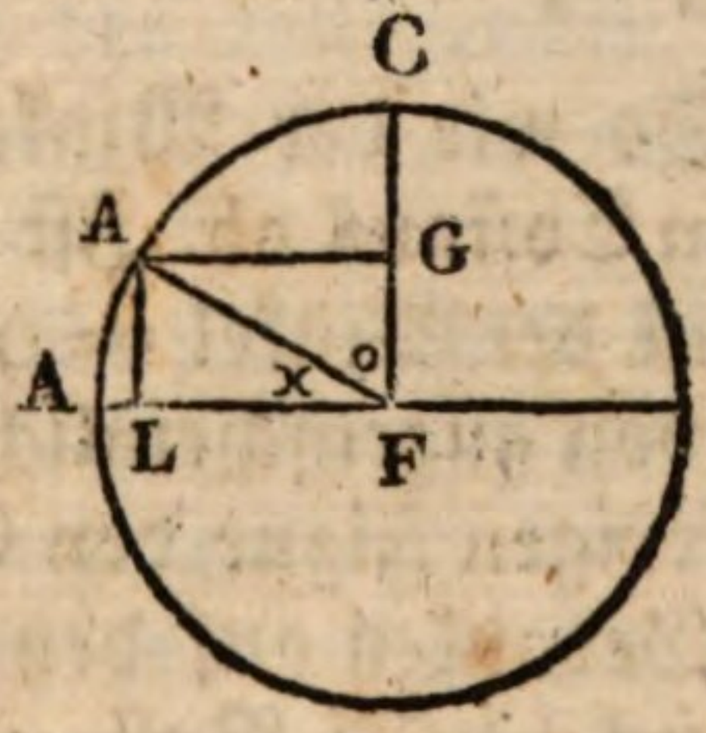
Zusatz. Da (nach Geomet. neunt. Absch. §. 31.) die Sehne eines Winkels von $60° = r$; so ist also

$$\text{sin. } 30° = \text{sin. } 150° = \frac{1}{2} r \text{ (§. 1. 3. Zus.).}$$

§. 3.

Erklärung.

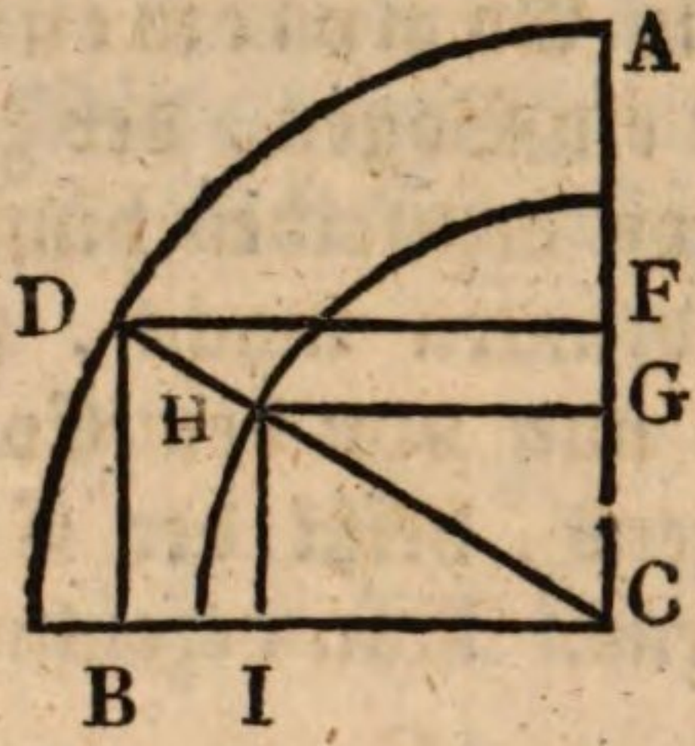
Ein Winkel, der zu einem andern hinzugefügt oder weggenommen, denselben zu einem rechten Winkel macht, heißt sein Complement (Ergänzungswinkel). Eben so ist ein Bogen, der zu einem andern hinzugefügt oder von demselben hinweg genommen, ihn zu einem Quadranten macht, sein Complement. Der Sinus nun von dem Complement eines Winkels oder Bogens, heißt der Cosinus dieses Winkels oder Bogens. Man bezeichnet ihn mit cos.



So ist z. B. der ∠ x das Complement zu dem ∠ o, und umgekehrt der ∠ o ist das Complement zu dem Winkel x. Eben so ist der Bogen AD das Complement zu dem Bogen DC, und umgekehrt der Bogen DC ist das Complement zu dem Bogen AD. DG ist der Sinus des Winkels o und der Cosinus von dem Winkel x. DL ist der Sinus des Winkels x und der Cosinus des Winkels o.

1. Zusatz. Um den Complementswinkel eines gegebenen Winkels zu bekommen, darf man nur diesen von 90° abziehen. Beträgt z. B. der gegebene Winkel 40°, so ist sein Complementswinkel = 90° — 40° = 50°. In einem rechtwinkligten Dreyecke sind daher die beyden spitzigen Winkel, weil sie zusammen 90° ausmachen, Complementswinkel zu einander.

2. Zusatz. Was oben §. 1. 1. Zus. vom Sinus gesagt wurde, das gilt auch vom Cosinus. Auch der Cosinus eines und des nähmlichen Winkels behält immer gleiches Verhältniß zum Radius, d. i. DF : DC = HG : HC, weil △ DFC ∽ △ HGC.



3. Zusatz. So wie der Winkel von o bis 90° wächst, nimmt sein Cosinus ab. Ist der Winkel o, so ist der cos. = r; ist der Winkel = 90° so ist der cos. = o. Um sich hiervon augenscheinlich zu überzeugen, lege man in der vorigen Figur den Schenkel DC des Winkels BCD in Gedanken auf den Schenkel BC, so ist offenbar der Winkel BCD Null, und sein Cosinus ist = r. Erhebt man den Schenkel DC über den stillliegenden Schenkel BC, so nimmt sein Cosinus immer mehr ab, je größer der Winkel wird. Kommt der Schenkel DC in die Linie AC, und bildet er mit BC einen rechten Winkel, so ist sein cos. = o.

4. Zusatz. Wächst der Winkel über 90°, so wächst der Cosinus gleichfalls, und er wird = r, wenn der Winkel = 180°. Dieses läßt sich nach dem vorher Gesagten leicht einsehen.

5. Zusatz. Der Cosinus eines Winkels kann nie größer werden, als der Radius.

6. Zusatz. Der Cosinus eines Winkels ist dem Theile des Radius gleich, der zwischen dem Sinus und dem Mittelpuncte des Kreises liegt. Man sehe obige Figur an, wo der Cosinus DF = BC, und der Cosinus

HG = IC. Wenn also der Radius und der Sinus eines Bogens gegeben sind, so läßt sich daraus der Cosinus finden; er ist nähmlich die Quadratwurzel der Differenz der Quadrate des Radius und des Sinus nach dem pythagoreischen Lehrsatze, d. i. wenn HC und HI gegeben sind, so läßt sich daraus der Cosinus HG = IC finden; denn $HC^2 = HI^2 + IC^2$, $HI^2 = HI^2$; folglich $HC^2 - HI^2 = IC^2 = \sqrt{HC^2 - HI^2} = IC^2$. Eben so läßt sich aus dem Radius und Cosinus der Sinus finden.

7. Zusatz. Wenn die Hypothenuse eines rechtwinkligten Dreyeckes als Radius betrachtet wird, so ist jede Cathete der Sinus des gegenüber stehenden, und der Cosinus des anliegenden spitzigen Winkels. DC sey der Radius, so ist DB = sin. C = cos. D, und BC = sin. D und cos. C.

8. Zusatz. Positiv heißt bey einer Figur, was gegen die eine, negativ was gegen die andere Seite zu liegt, oder umgekehrt, so, daß beyde Größen einander gerade entgegen gesetzt sind. Nennt man nun bey den trigonometrischen Linien die Lage, die sie bey einem spitzigen Winkel haben, positiv, und die entgegengesetzte negativ; so bleiben die Sinus immer + (plus), die Cosinus hingegen für stumpfe Winkel werden — (minus).

9. Zusatz. Aus der Geometrie ist bekannt, daß die Sehne eines Winkels von 60° = dem Radius ist; folglich ist der Sinus von einem solchen Winkel = 30° (§. 2). Daraus folgt nun weiter, daß der Cosinus von 60° = sin. 30°, und also $= \frac{1}{2}r$.

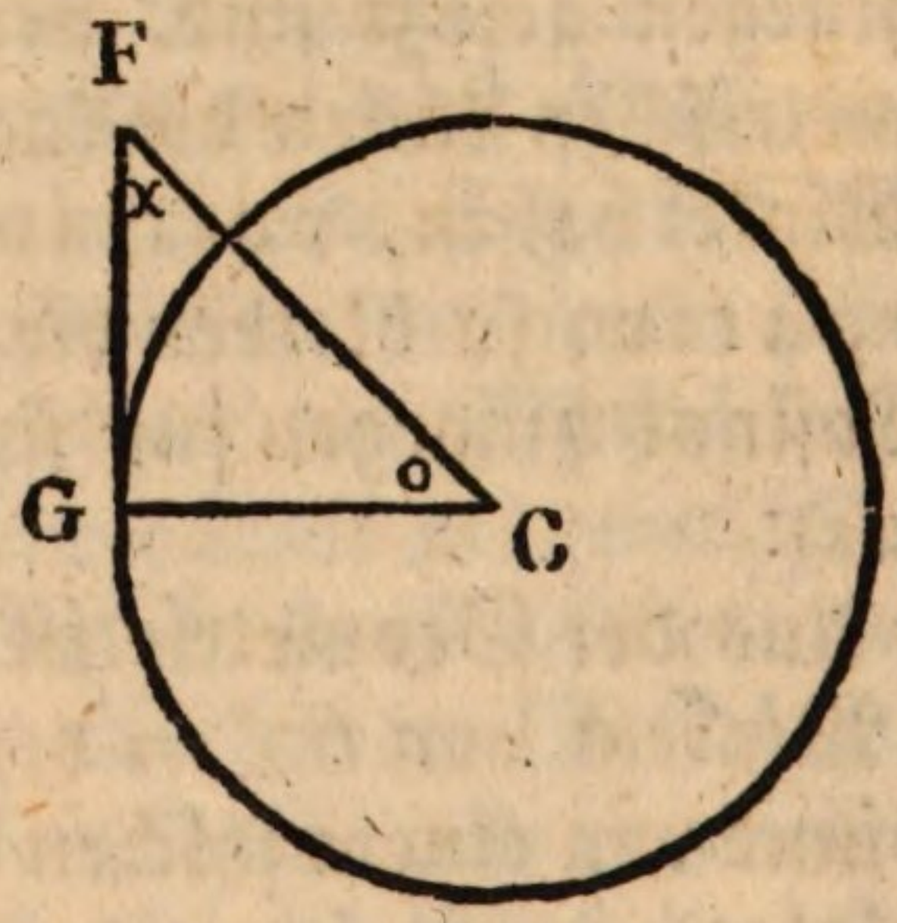
II.

Von der Tangente und Secante.

§. 4.

Erklärung.

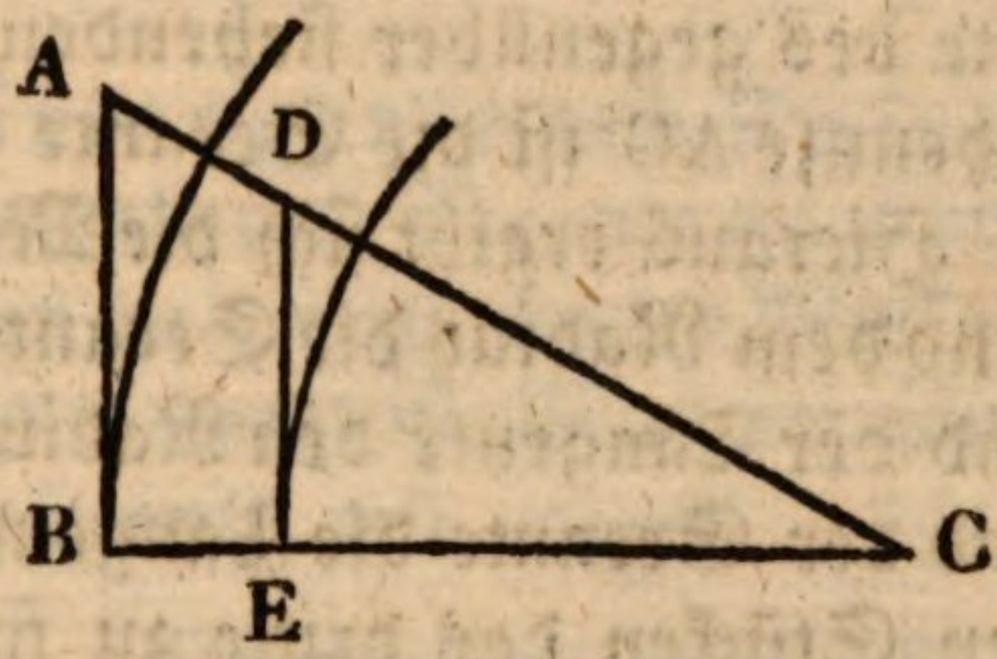
Wenn man aus der Spitze eines Winkels mit einem seiner Schenkel einen Kreis beschreibt, und dann auf den Endpunct dieses Schenkels, welcher der Radius ist, eine senkrechte errichtet, und dann den anderen Schenkel verlängert, bis er die senkrechte schneidet; so heißt die senkrechte Linie die Tangente des Winkels, und der verlängerte Schenkel desselben, der die Tangente schneidet, heißt die Secante. Tangente bezeichnet man mit tg., und Secante mit sec.



So ist z. B. FG die Tangente, und FC die Secante des Winkels o.

Anmerkung. Der Nahme Tangente (von tangere, berühren) kommt daher, weil diese Linie den Kreis nur berührt, aber nicht schneidet. Die Secante schneidet die Tangente, daher hat sie den Nahmen Secante (von secare, schneiden).

1. Zusatz. Die Tangenten und Secanten eines Winkels, die von verschiedener Größe seyn können, je nachdem der Bogen zwischen den Schenkeln des Winkels mit einem kleinern oder größern Radius beschrieben wird, verhalten sich, wie die Radien des Kreises, d. i. AC : BC = DC : EC; ferner AB : BC = DE : EC; denn △ ABC ∽ △ DEC.



2. Zusatz. Ist der Winkel o, so ist tg. = o, und sec. = r.

3. Zusatz. Wächst der Winkel bis 90°, so wächst auch die Tangente und Secante. Wird der Winkel = 90°, so stehen die Tangente und Secante senkrecht neben einander, und sind unter sich parallel; daher läßt sich für einen Bogen oder Winkel von 90° weder eine Tangente, noch eine Secante bestimmen, oder in der Sprache der Mathematiker zu reden, die Tangente und Secante eines Winkels von 90° sind unendlich groß, d. i. die Tangente und Secante eines Winkels von 90° = ∞.

4. Zusatz. Wächst der Winkel über 90°, so nehmen die Tangenten und Secanten ab, und werden negativ; wird der Winkel = 180°, so ist die tg. = o, und sec. = — r.

5. Zusatz. Die Secante kann nie kleiner werden, als der Radius; denn wäre sie kleiner, so könnte sie die Tangente nicht schneiden.

6. Zusatz. Wenn man in einem rechtwinkligten Dreyecke eine Cathete als den Radius, und die Spitze

eines spitzigen Winkels als Centrum annimmt, so wird die andere Cathete die Tangente des gegenüber stehenden spitzigen Winkels, und die Hypothenuse die Secante desselben, d. i. wenn in der vorigen Figur die Cathete BC des rechtwinkligten Dreyeckes ABC als Radius, und die Spitze C des spitzigen Winkels ACB als Centrum angenommen wird, so ist die andere Cathete AB die Tangente des gegenüber stehenden Winkels C, und die Hypothenuse AC ist die Secante eben desselben Winkels C. Hieraus ergibt sich die Methode, aus der Tangente und dem Radius die Secante, oder aus der Secante und der Tangente den Radius, oder aus dem Radius und der Secante die Tangente, also aus zwey gegebenen Stücken das dritte zu finden. Man darf nähmlich nur darauf den pythagoreischen Lehrsatz anwenden.

7. Zusatz. Die tg. $45° = r$; denn in diesem Falle beträgt der Winkel am Mittelpuncte 45°, und der Winkel, den die Tangente mit dem Radius bildet, beträgt 90°; da aber in einem Dreyecke alle drey Winkel zusammen 180° betragen, so bleibt unter dieser Voraussetzung für den dritten Winkel, den die Secante mit der Tangente bildet, 45°; folglich ist (sieh die vorletzte Figur an) der $\angle o = \angle x$; also muß das Dreyeck GFC ein gleichschenkligtes seyn; FG ist also $=$ GC; wenn also die Tangente $= 45°$ ist, so ist sie $= r$.

8. Zusatz. Zwey Nebenwinkel haben gleich große Tangenten und Secanten, nur daß sie für den spitzigen Winkel $+$ und für den stumpfen $-$ sind. Was oben (§. 1. 3. Zusatz) von den Sinus gesagt wurde, gilt auch von den Tangenten und Secanten.

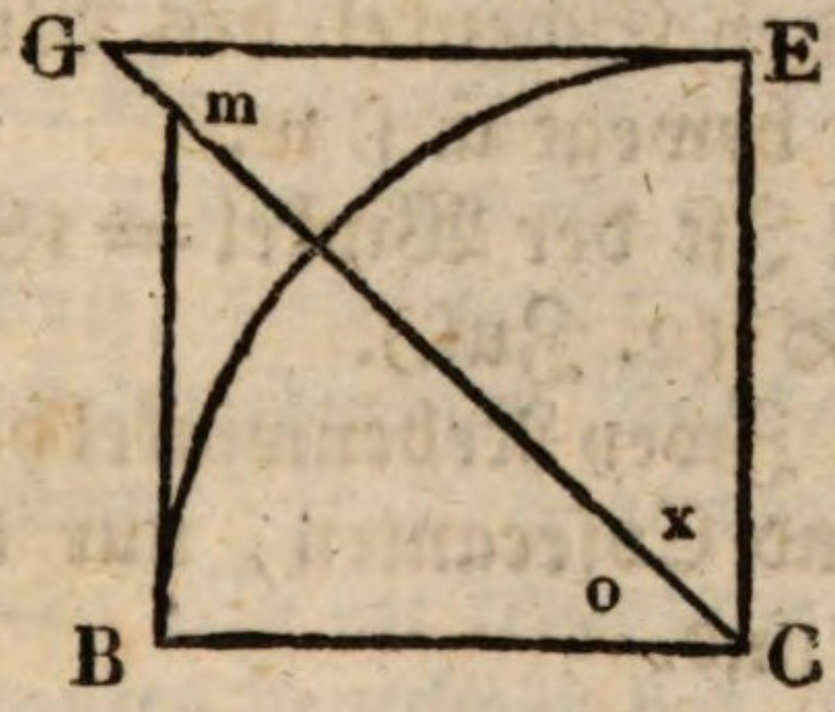
III.

Von den Cotangenten und Cosecanten.

§. 5.

Erklärung.

Unter Cotangente und Cosecante versteht man die Tangente und Secante eines andern Winkels, der den ersten zu einem rechten Winkel ergänzt, der also sein Complement ist. Man bezeichnet Cotangente mit cot., Cosecante mit cosec.



So ist z. B. GE die Cotangente des Winkels o, Bm ist die Cotangente des Winkels x. Die Secante des Winkels o, nähmlich GC, ist die Cosecante des Winkels x, und umgekehrt. Abgekürzt ausgedrückt: tg. x = cot. o, sec. x = cos. o, und tg. o = cot. x, sec. o = cos. x.

1. Zusatz. Die cot. und cosec. eines Winkels verhalten sich, wie die Radien, welches aus der Aehnlichkeit der Dreyecke folget (§. 4.).

2. Zusatz. Die cot. und cosec. von o ist unendlich groß, d. i. = ∞; denn die cot. und cosec. eines Winkels von Null Graden sind senkrecht, und laufen parallel, und können daher nicht bestimmt werden; sie sind also = ∞.

3. Zusatz. Wächst der Winkel bis 90°, so nimmt die Cotangente ab, und bey 90° wird sie = 0; die Cosecante nimmt auch ab, und bey 90° wird sie = r, wie man leicht einsehen wird, wenn man in der vorigen Figur die Linie GC in Gedanken nach und nach gegen EC bewegt, wobey der Winkel o immer größer und endlich 90° wird, wenn GC auf EC zu liegen kommt. Bey diesem Wachsen des Winkels o nehmen offenbar die cot. GE und cosec. GC ab, und zwar wird die cot. bey 90° = o, die cosec. aber wird = r.

4. Zusatz. Wächst der Winkel über 90°, so wächst die cotg., wird aber —; die cosec. wird > r, wie man leicht einsehen wird, wenn man EBC ergänzt, und dann EC, den Schenkel des Winkels BCE, im Kreise abwärts bewegt u. s. w.

5. Zusatz. Ist der Winkel = 180°, so sind cot. und cosec. = ∞ (2. Zus.).

6. Zusatz. Zwey Nebenwinkel haben gleich große Cotangenten und Cosecanten, nur daß sie einander entgegengesetzt sind.

Zweyter Abschnitt.

Berechnung der trigonometrischen Linien.

Vorerinnerung.

Da wir nun die trigonometrischen Linien ihrer Natur nach kennen, so haben wir noch darzuthun, wie sie berechnet werden, in was für einem Verhältnisse sie zu einander und zu den Winkeln stehen, bey

denen sie als Hülfslinien zur Berechnung der Dreyecke gebraucht werden.

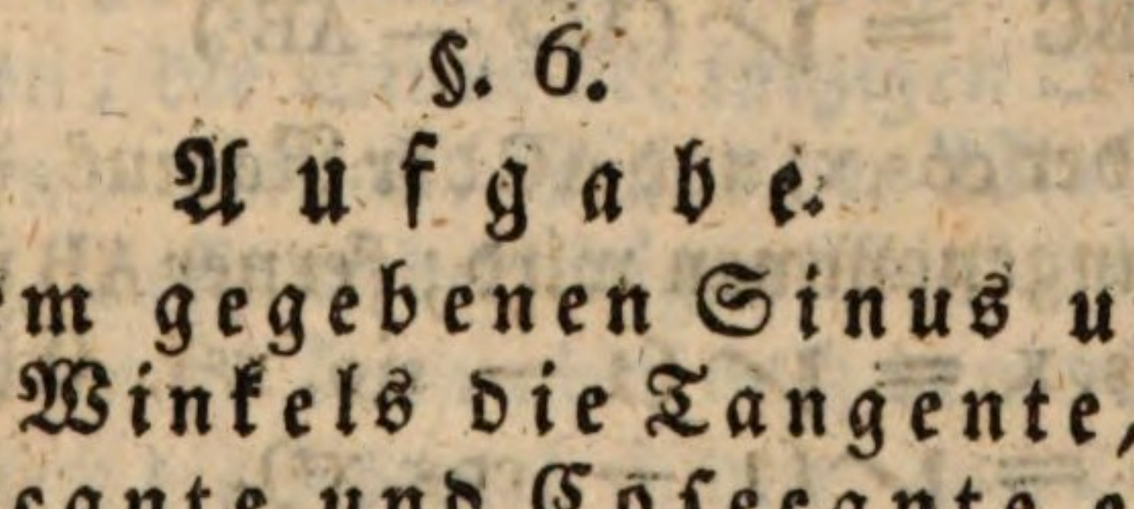
Was nun das Verhältniß der trigonometrischen Linien unter einander anbelangt, so läßt sich dasselbe leicht bestimmen; denn alle zu einem Winkel gehörigen trigonometrischen Linien verhalten sich, wie die Radien (erst. Absch.); folglich stehen sie mit einem und demselben Radius, auch unter einander im Verhältnisse; denn welche mit einem dritten im Verhältnisse stehen, stehen auch unter sich im Verhältnisse.

Nimmt man nun den Radius als Maß oder = 1 an, so kann man also das Verhältniß der trigonometrischen Linien unter einander bestimmen. Ferner ergibt sich aus den vorhergehenden Paragraphen, daß, wenn nur von dem Verhältnisse der trigonometrischen Linien der absoluten Größe nach (d. h. ohne darauf Rücksicht zu nehmen, ob sie + oder — sind), die Rede ist, man bloß auf die spitzigen Winkel zu sehen hat, weil alle Supplemente gleiche trigonometrische Linien haben. Wenn man also die trigonometrischen Linien im ersten Quadranten berechnet hat, so sind auch die übrigen Linien des zweyten Quadranten bekannt.

§. 6.

Aufgabe.

Aus dem gegebenen Sinus und Cosinus eines Winkels die Tangente, Cotangente, Secante und Cosecante eben dieses Winkels zu finden.



Auflösung. In der beygezeichneten Figur ist AB = sin. x, BC = cos. x (§. 3. 6. Zuſ.), DE = tg. x, und DC = sec. x. Da nun △ ABC ∽ △ DEC, ſo iſt DE : EC = AB : BC, d. i. tg. x : 1 = sin. x : cos. x;

also iſt $\text{tg. x} = \frac{\text{sin. x}}{\text{cos. x}}$, und sin. x = cos. x × tg. x,

ferner $\text{cos. x} = \frac{\text{sin. x}}{\text{tg. x}}$. Man findet alſo die Tangente eines Winkels, wenn man den Sinus desſelben durch den Coſinus dividirt. Ferner, weil AB zu DE parallel iſt, ſo iſt (Geom. zwölft. Abſch. §. 9. 2. Zuſ.)

BC : AC = EC : DC, d. i.

cos. x : 1 = 1 : sec. x,

alſo $\text{cos. x} = \frac{1}{\text{sec. x}}$, und $\text{sec. x} = \frac{1}{\text{cos. x}}$.

Da der ∠ ABC = R, und da in einem rechtwinligten Dreyecke das Quadrat der Hypothenuſe = den Quadraten der beyden Catheten, ſo iſt

$$BC^2 = AC^2 - AB^2$$

$$BC = \surd (AC^2 - AB^2)$$

BC iſt aber der cos. x, und AC der Radius, der als Maß, d. i. als 1 angenommen wird; ferner AB iſt der sin. x; folglich $\text{cos. x} = \surd (1 - \text{sin. x}^2)$. Eben ſo findet man $\text{sin. x} = \surd (1 - \text{cos. x}^2)$.

Ferner iſt $CD^2 = DE^2 + EC^2$, und alſo CD oder $\text{sec. x} = \surd (DE^2 + EC^2)$; nun iſt CD der secant, DE der tag. und EC der Radius; alſo iſt der $\text{sec. x} = \surd (\text{tg. x}^2 + 1)$.

Iſt der ∠ r das Complement von x, ſo iſt FG der cotg., und GC der cos. von x.

Da nun GFC = R, ſo ergibt ſich $\text{cosec. x} = \surd (1 + \text{cetg. x}^2)$.

Da das △ GFC ∽ △ ABC, weil in beyden zwey gleiche Winkel sind, so ist CG : CF = AC : AB, und folglich cosec. x : 1 = 1 : sin. x; also cosec. x = $\frac{1}{\sin. x}$, und sin. x = $\frac{1}{\text{cosec. } x}$.

§. 7.

Aufgabe.

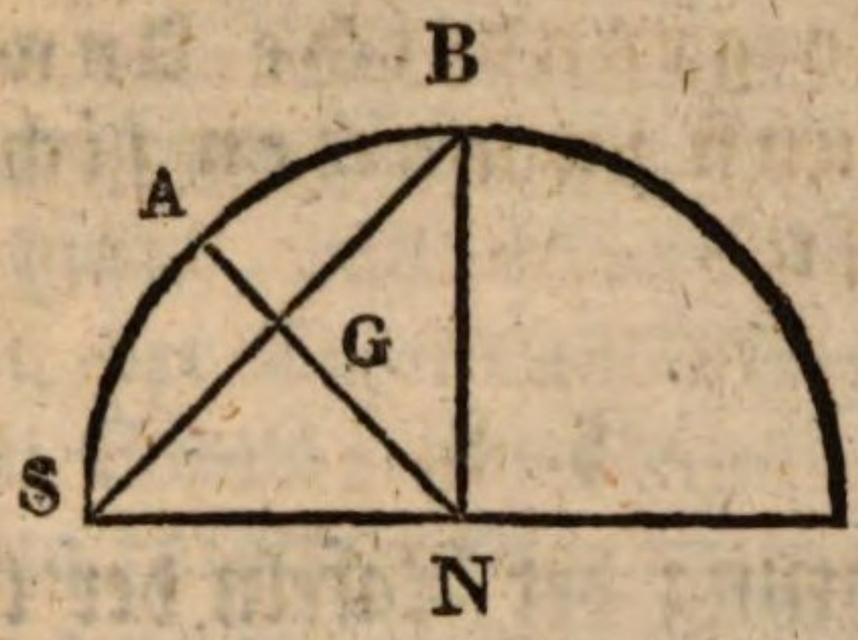
Die trigonometrischen Linien für alle Winkel zu berechnen, d. h. das Verhältniß derselben zum Radius in Zahlen bestimmt anzugeben.

Auflösung. Es erhellet aus dem vorigen Paragraph, daß man vermittelst des Sinus und Cosinus eines Winkels die Tangente, Cotangente, Secante und Cosecante eben dieses Winkels finden kann; man hat also nur den Sinus und Cosinus zu berechnen. Die Berechnung darf sich nur auf die spitzigen Winkel erstrecken; weil die stumpfen Winkel eben die Sinus und Cosinus haben, wie die spitzigen Winkel, die mit ihnen 180° ausmachen. Ferner wird man nur nöthig haben, die Sinus der spitzigen Winkel bis 45° zu berechnen, weil alle Sinus der Winkel, die über 45° halten, Cosinus derjenigen Winkel sind, die unter 45° sind; man kann aber nach dem vorigen §. den Cosinus durch die Formel finden: cos. x = $\sqrt{}$ (1 — sin. x^2). So ist z. B. sin. 46° = cos. 44° = $\sqrt{}$(1 — sin. $44°^2$); denn 46° + 44° = 90°; der sin. 60° = cos. 30°; sin. 89° = cos. 1° u. s. w.

Anmerkung. Es würde zu weitläufig seyn, hier die ganze Berechnung der Sinus und Cosinus für alle Winkel bis auf 45 Graden anzuführen. Wir begnügen uns, den Weg einigermaßen anzuzeigen, welchen man eingeschlagen hat, diese äußerst mühsame Rechnung

vornehmen zu können, welche schon vollendet in den sogenannten Sinustabellen gefunden wird, in denen die Sinus, Cosinus, Tangente und Cotangente für alle Winkel in Graden und Minuten berechnet sind, wie wir weiter unten hören werden. Man ging dabey so zu Werke: Man hat den Halbmesser (Radius) in den gewöhnlichen Tafeln (Tabellen) in 10000000, und in den größern in 10000000000 Theile getheilt, und dann berechnet, wie viel solcher Theile auf die Sinus, Tangenten und Secanten der spitzigen Winkel gehen. Dieses geschah auf folgende Art: Man dachte sich, die Seite eines Sechseckes ist dem gleich, und weil der Radius der sinus totus ist, so ist sie auch diesem gleich. Da nun die Seite des Sechseckes als eine Sehne angesehen werden kann, und eine jede Sehne ein doppelter Sinus ist (§. 2.); so fand man leicht, daß der Sinus von 30°, oder von der Hälfte des der Sehne am Mittelpuncte entgegen stehenden Winkels die Hälfte des sinus totus sey. Aus diesem gefundenen Sinus, der $\frac{10000000}{2} = 5000000$ und der Sinus eines Bogens oder Winkels von 30 Graden ist, hat man dann nach der Formel $\cos. x = \sqrt{(1. - \sin. x^2)}$ den Cosinus gefunden, indem man das Quadrat des Sinus von dem Quadrate des Halbmessers abzog, und aus dem Reste die Quadratwurzel zog. Hat man nun den Cosinus eines Winkels von 30 Graden berechnet, so hat man zugleich den Sinus eines Winkels von 60 Graden gefunden. Eben so wird man leicht einsehen, wie man den Sinus und Cosinus eines Winkels von 15 Graden habe berechnen können, wenn man den Sinus und Cosinus eines Winkels von 30° gefunden hat, und wie ferner aus dem Sinus und Cosinus eines Winkels von 15° der Sinus und Cosinus eines Winkels von 7 1/2 Graden u. s. w.

gefunden worden ist. Der Sinus und Cosinus von 45° wurden auf eine ähnliche Art berechnet.



Es sey der Radius BN senkrecht auf dem Radius SN, und also BS die Seite eines Quadrates, das sich in den Kreis, wovon BN und SN Radien sind, beschreiben läßt; so ist, wenn aus dem Mittelpuncte N die Linie NA senkrecht auf BS gezogen wird, BG = 1/2 BS, und der Bogen BA = 1/2 Bog. BAS (Geomet. neunt. Absch. §. 2.). Da nun der ganze Bogen BAS 90° beträgt, so muß der halbe Bogen BA, dessen Sinus BG ist, 45° ausmachen; nun ist $BS^2 = BN^2 + SN^2$, und da BN = SN, so ist $BS^2 = 2BN^2$; folglich $BS = \sqrt{2BN^2}$, und da 1/2 BS = BG, so ist $BG = 1/2 \sqrt{2BN^2}$; BG = sin. 45°; folglich sin. 45° = $1/2 \sqrt{2BN^2}$; man findet also den Sinus eines Winkels von 45°, wenn man das Quadrat des Halbmessers durch zwey multiplicirt, aus diesem Producte die Quadratwurzel zieht, und davon die Hälfte nimmt. Nachdem man auf die gezeigte Art den Sinus von 45° berechnet hat, so ist es ein leichtes gewesen, den Sinus eines Winkels von 22°, 30′, und aus diesen wieder den Sinus eines Winkels von 11°, 15′ u. s. w. zu finden. Und so sind die Sinus und Cosinus, und aus diesen (nach §. 6.) die Tangenten, Cotangenten, Secanten und Cosecanten berechnet, und in Tabellen zusammen getragen worden.

Anmerkung. Die Kunstgriffe, deren man sich bediente, um sich diese schweren Rechnungen zu er-

leichtern, kann ich hier nicht anführen. Wer mehr hierüber zu wissen begehrt, der schaffe sich folgendes Werkchen an: J. C. Schulze's Taschenbuch für diejenigen, so gründliche Anwendungen für die Meßkunst zu machen sich vorsetzen. Zweytes Heft.

§. 8.

Von der Einrichtung der Tafeln der trigonometrischen Linien.

Es gibt kleinere und größere Sinustafeln. Bey den kleinern, welche man gewöhnlich braucht, hat man den zum Grunde gelegten Radius = 10 Millionen, und bey den größern 10000 = Millionen angenommen. Es ist aber bey vielen Rechnungen vortheilhaft, den sinus totus (den Radius) = 1 zu setzen. Alsdann verwandeln sich alle Sinus und Cosinus in Decimalbrüche. Hat man nun Tafeln, welche für den Radius = 10000000 berechnet sind; so darf man nur alle darin vorkommende Linien mit 10000000 dividiren, um sie auf den Radius = 1 zu reduciren. Diese Division ist leicht, und besteht bloß darin, daß man von der rechten Hand gegen die linke 7 Decimalstellen von denselben abschneidet. Es sey z. B. in solchen Tafeln sin. 40° 10′ = 6450132, so ist für r = 1 sin. 40° 10′ = 0,6450132. Weil die Rechnung mit so großen Zahlen, als die trigonometrischen Linien enthalten, beschwerlich ist, so hat man zugleich in den Tafeln die Logarithmen derselben aufgestellt. In Rücksicht dieser Logarithmen ist zu bemerken, daß sie in allen Tafeln so stehen, als wenn sie für den r = 10000000000 berechnet wären. Die zugehörigen Zahlen müssen daher mit 10^{10} dividirt werden, um sie auf den Radius = 1 zu reduciren. Von den Logarith=

men der trigonometrischen Linien hat man also Log. $10^{10} = 10$ abzuziehen. In den Tafeln steht z. B. Log. sin. 40° 10′ = 9.809569. Für r = 1 ist sin. 40° 10′ = 9.809569 − 10. Umgekehrt hat man den Log. einer trigonometrischen Linie für den sin. tot. = 1, so addirt man 10 hinzu, um den Logarithmus derselben für den sin. tot. der Tafeln zu bekommen.

Unter allen Sinus- und Logarithmentafeln verdienen unstreitig folgende den Vorzug: Logarithmische, trigonometrische und andere zum Gebrauche der Mathematik eingerichtete Tafeln und Formeln. Herausgegeben von Georg Vega, Unterlieutenant und Lehrer der Mathematik bey dem k. k. 2ten Feldartillerie Regiment. Wien 1783, gr8. 2 fl.

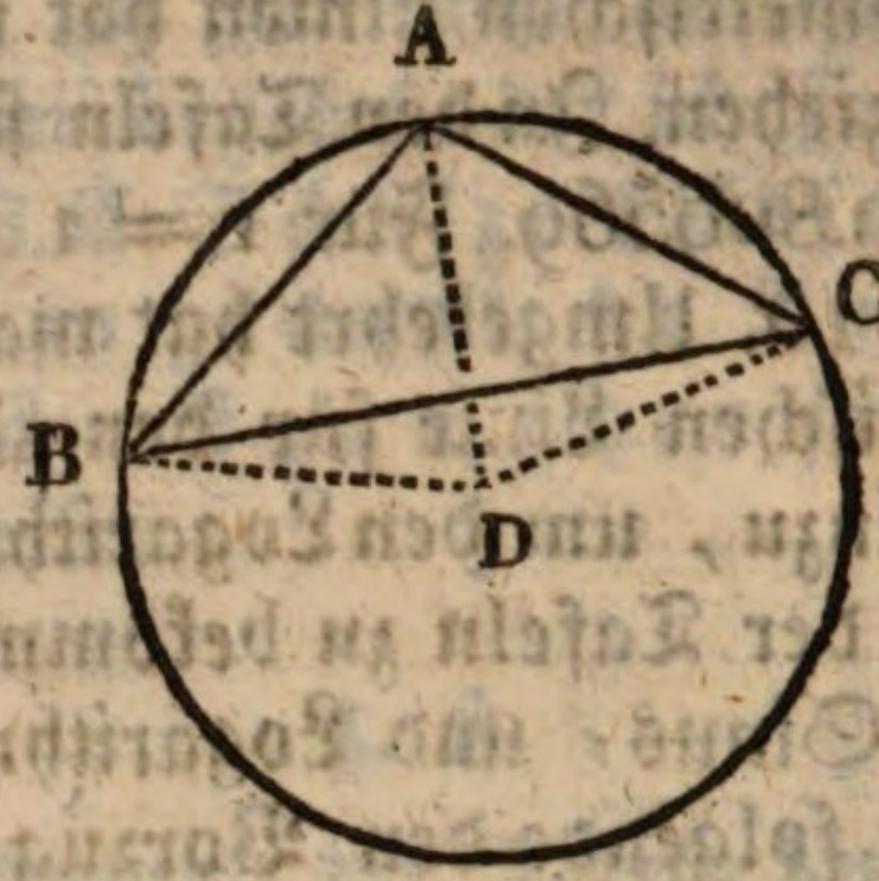
Sie zeichnen sich durch genaue und richtige Darstellung aus, und enthalten in der Einleitung eine deutliche und ausführliche Anweisung zum Gebrauche dieser Tabellen. Schade, daß dieser um die Mathematik so hochverdiente Mann in seinen besten Jahren das Leben durch einen schändlichen Meuchelmord einbüßen mußte.

Der Gebrauch der Sinustabellen, über den hier kein weitläufiger Unterricht gegeben werden kann (der Anfänger findet ihn in dem obigen Werke) gründet sich auf drey Lehrsätze, die wir nun abhandeln wollen.

§. 9.

Lehrsatz.

In einem jeden Dreyecke verhalten sich die Seiten, wie die Sinus der gegenüber stehenden Winkel.



Beweis. Das Dreyeck sey ABC, so soll nach Aussage des Lehrsatzes z. B. AB : AC = sin. ACB : sin. ABC. Man beschreibe um ABC einen Kreis, der Mittelpunct desselben sey D; man ziehe die Hülfslinien AD, DB u. CD, so ist AB : AC = $\frac{1}{2}$ AB : $\frac{1}{2}$ AC.

AB ist die Sehne des Winkels ADB, also $\frac{1}{2}$ AB = sin. $\frac{1}{2}$ ADB (§. 2.). Eben so ist AC die Sehne des Winkels ADC; also $\frac{1}{2}$ AC = sin. $\frac{1}{2}$ ADC; folglich AB : AC = sin. $\frac{1}{2}$ ADB : sin. $\frac{1}{2}$ ADC; nun ist $\frac{1}{2}$ ADB = ACB (Geomet. neunt. Absch. §. 13.), und $\frac{1}{2}$ ADC = ABC; also AB : AC = sin. ACB : sin. ABC. Auf eben diese Art wird der Beweis für die übrigen Seiten des Dreyeckes geführt.

Anmerkung. Man kann obigen Lehrsatz auch so beweisen: Um jedes Dreyeck läßt sich ein Kreis beschreiben, wo sodann jede Seite des Dreyeckes die Sehne eines Bogens ist, der doppelt so groß ist, als der ihr entgegen gesetzte Winkel; folglich ist die Hälfte einer jeden Seite der Sinus des ihr entgegen gesetzten Winkels. Weil sich nun die Hälften zu einander verhalten, wie die Ganzen, so verhalten sich also in einem Dreyecke die Sinus der Winkel, wie die diesen Winkeln entgegen gesetzten Seiten.

Zusatz. Wenn die drey Winkel eines Dreyeckes bekannt sind, kann man zwar daraus das Verhältniß der drey Seiten finden; denn diese verhalten sich,

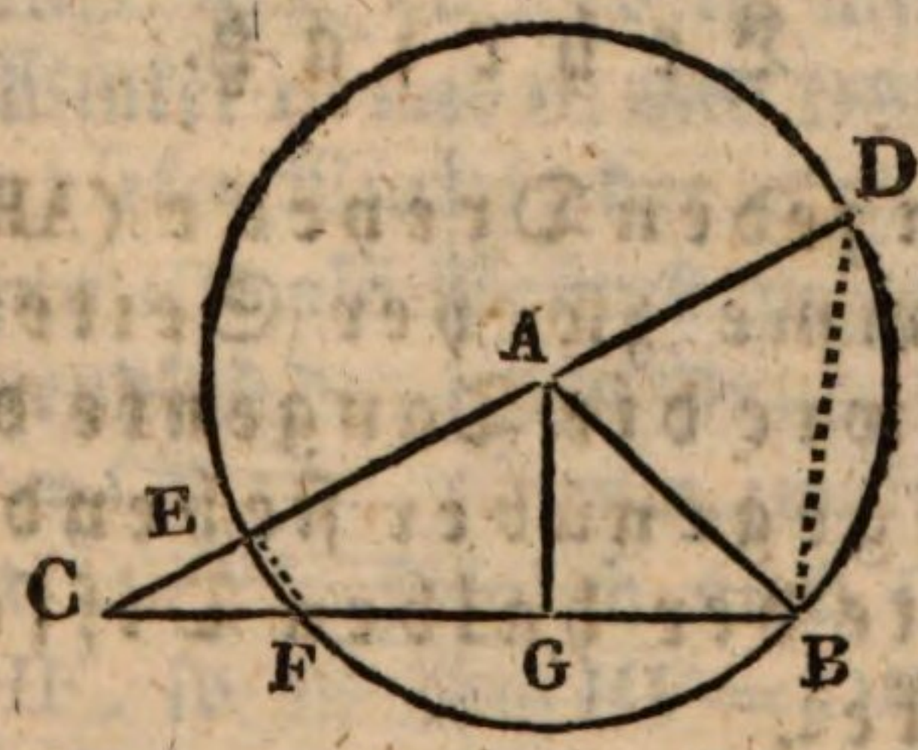
wie die Sinus der bekannten Winkel, aber die wirkliche Größe dieser Seiten kann man daraus noch nicht bestimmen. Um diese bestimmen zu können, muß eine Seite bekannt seyn.

Anmerkung. Der eben vorgetragene Lehrsatz ist sehr wichtig; denn durch ihn werden alle trigonometrischen Aufgaben nach der Regel de Tri aufgelöst.

§. 10.

Lehrsatz.

In einem jeden Dreyecke verhält sich die größte Seite oder die Grundlinie zur Summe der zwey andern, wie die Differenz derselben zu der Differenz der Stücke, in welche die Grundlinie durch die aus der Spitze des Dreyeckes auf sie gezogene senkrechte getheilt wird.



Beweis. Das Dreyeck sey CAB. Man lasse aus der Spitze A auf die Grundlinie CB die senkrechte AG fallen. Man nehme die kleinere Seite AB, beschreibe damit aus A einen Kreis, und verlängere CA bis in D; so ist CD die Summe der beyden Seiten CA und AB; denn AB = AD. CE ist die Differenz der beyden Seiten, weil EA = AB. Durch die senkrechte AG ist die Grundlinie CB in die zwey Stücke CG und GB getheilt worden, und weil FG = GB (Geomet. neunt. Absch.

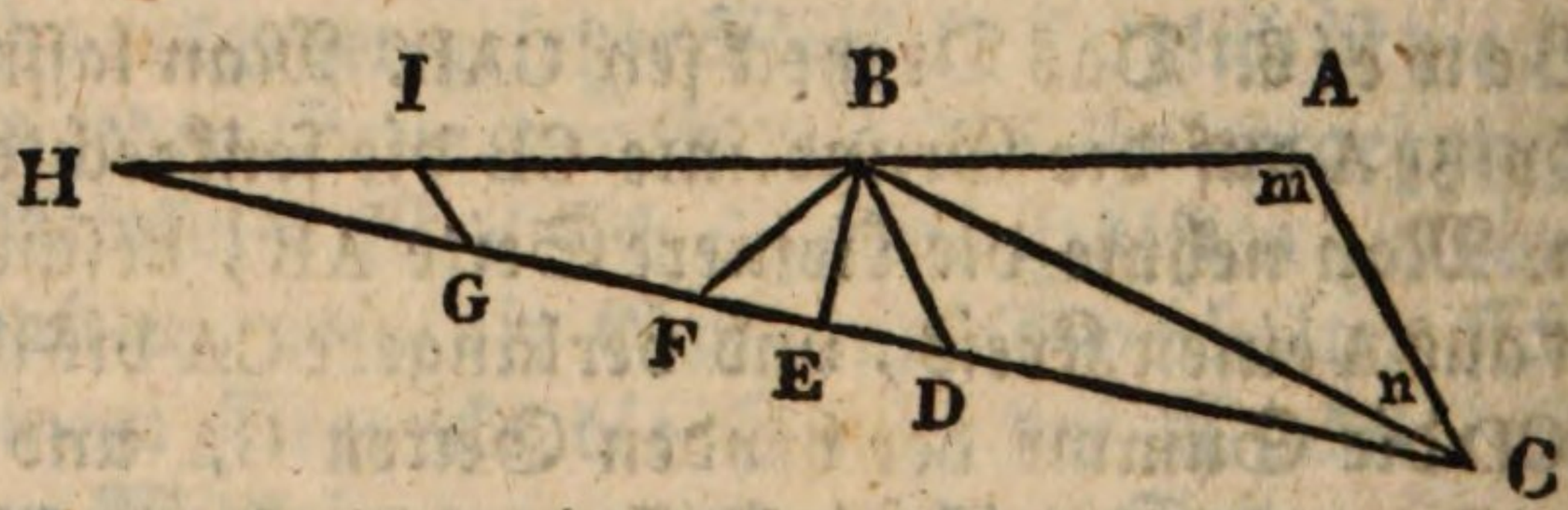
§. 2.), so ist CF die Differenz dieser zwey Stücke. Man ziehe endlich die Sehnen EF und DB.

Die zwey Dreyecke ECF und BCD sind sich ähnlich, weil darin zwey gleiche Winkel vorkommen, nähmlich $\angle C = \angle C$, und $\angle CBD = \angle CEF$; denn der Winkel CBD hat die Hälfte des Bogens FED zu seinem Maße, und der Winkel FED hat die Hälfte des Bogens FBD zu seinem Maße (Geomet. neunt. Abschn. §. 13.); beyde diese Winkel haben die Hälfte des ganzen Kreises zu ihrem Maße; sie sind also zwey rechten Winkeln gleich; nun macht der Winkel FED mit seinem Nebenwinkel CEF ebenfalls zwey rechte Winkel aus; folglich ist $\angle CBD = \angle CEF$ (Geom. Einl. §. 8. Nr. 3.); also $\triangle ECF \backsim \triangle BCD$ (Geom. zwölft. Absch. §. 9.); also $BC : CD = EC : CF$, d. i. $BC : CA + AB = CF : CE$; also u. s. w.

§. 11.

Lehrsatz.

In einem jeden Dreyecke (ABC) verhält sich die Summe zweyer Seiten zu ihrer Differenz, wie die Tangente der halben Summe der gegenüber stehenden Winkel zur Tangente der halben Differenz eben dieser Winkel.



Beweis. Man trage BC aus B nach H, so, daß $BH = BC$, und BA trage man aus B nach I, so, daß $BI = BA$. Auf solche Art ist $AH = AB + BC$ die Sum-

me beyder Seiten, und IH = BC — AB die Differenz derselben.

Nun ist der äußere Winkel HBC = m + n (Geom. sechst. Absch. §. 8.). Man errichte aus B auf HC die senkrechte BE, diese theilt die Grundlinie HC und den ∠ HBC in zwey gleiche Theile; denn △ HBC ist gleichschenkligt (Geom. fünft. §. 16.); folglich ist der Winkel CBE die Hälfte der Winkel m und n zusammen genommen. Nimmt man BE als Radius an, so ist EC die Tangente des Winkels CBE, und folglich auch die Tangente der Hälfte der Winkel m + n.

Man ziehe aus dem Puncte B mit AC die Linie BD parallel, so ist der Winkel CBD = ∠ n, und ∠ HBD = m (Geom. sechst. Absch. §. 5). Ferner ∠ BHE = ∠ BCE, weil BC = BH (Geom. fünft. Absch. §. 18.). Man ziehe BF, so, daß HF = CD, so ist △ HBF = △ BCD (Geom. fünft. Absch. §. 12.). Nun ist ∠ CBD = ∠ n; folglich auch ∠ HBF = ∠ n. Da ∠ HBF = ∠ n und HBD = ∠ m, so ist also ∠ FBD die Differenz der Winkel m und n, und DBE ist die halbe Differenz eben dieser Winkel; der ∠ DBE hat DE zur Tangente, wenn BE als Radius angenommen wird.

Man ziehe endlich durch den Punct I die IG # AC; so ist AB : BI = CD : DG (Geom. zwölft. Absch. §. 9. 2.). Nun ist AB = BI; folglich auch CD = DG. Da ferner CD = HF, so ist auch HF = DG, und HG = FD; folglich $\frac{1}{2}$ HG = $\frac{1}{2}$ FD = DE. Da △ AHC ∽ IHG, so AH : IH = HC : HG = $\frac{1}{2}$ HC : $\frac{1}{2}$ HG = EC : ED, d. i. es verhält sich die Summe AH beyder Seiten (BA + BC) zu IH ihrer Differenz, wie EC die Tangente der halben Summe der Winkel m und n zu ED der Tangente der halben Differenz eben dieser Winkel; also u. s. w.

Dritter Abschnitt.

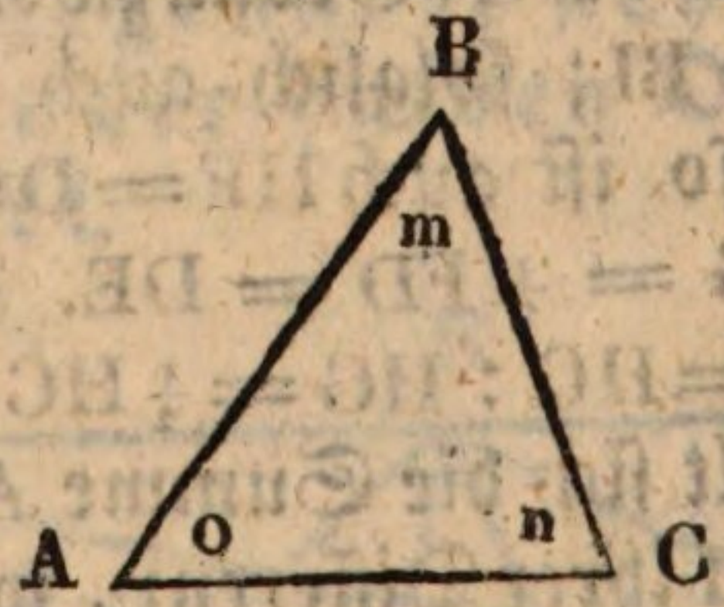
Wirkliche Berechnung der Dreyecke.

§. 12.

Aufgabe.

Es sind zwey Winkel sammt einer Seite eines Dreyeckes gegeben; man soll die übrigen zwey Seiten und den fehlenden Winkel durch Rechnung finden.

Auflösung. Den dritten Winkel findet man nach geometrischen Sätzen, indem man die beyden gegebenen Winkel addirt, und diese Summe von 180° abzieht, so ist der Rest das Maß des dritten Winkels, den man also als bekannt annehmen kann. Man hat also nur noch die zwey Seiten zu suchen.



Es sey in dem Dreyecke ABC die Seite AC mit den Winkeln o und n gegeben, so sind nur die zwey Seiten AB und BC zu finden. Diese findet man nach §. 9. Um BC zu finden, setzet man folgende Proportion an:

AC : BC = sin. m : sin. o, woraus sich ergibt

$$BC = \frac{AC \times \sin. o.}{\sin. m.}$$

Um AB zu finden, setzet man folgende Proportion an:

AB : AC = sin. n : sin. m

$$AB = \frac{AC \times \sin. n}{\sin. m.}.$$

Es sey z. B. AC = 5′, ∠ o = 42°, ∠ n = 102°, so ist ∠ m = 36°; denn (42 + 102) — 180 = 36.

$$BC = \frac{\sin. 42° \times 5}{\sin. 36} = \frac{0{,}6691306 \times 5}{0{,}5877853} = 5′\,6″\,3‴\,1^{IV},$$

$$\text{und } AB = \frac{\sin. 102° \times 5}{\sin. 36} = \frac{0{,}971476 \times 5}{0{,}5877853} = 8′\,3″\,2‴.$$

Man muß also die bekannten Winkel in den Sinustafeln aufsuchen, wo man die ihnen entsprechenden Sinus darneben findet; und um nicht mit so großen Zahlen multipliciren und dividiren zu dürfen, nimmt man die Logarithmen der Sinus, die ebenfalls in besagten Tafeln stehen (den Unterricht über die Logarithmen findet man im acht. Absch. des ersten Theiles meines Lehrbuches). Die Logarithmen thun also hier und auch bey allen folgenden Aufgaben sehr gute Dienste; denn sie verwandeln die Multiplication in eine Addition und die Division in eine Subtraction. Z. B. statt

$BC = \frac{AC \times \sin. o}{\sin. m}$ bekömmt man Log. BC = (log. AC + log. sin. o) — log. sin. m.

Anmerkung. Durch Hülfe dieser Aufgabe kann man also die Entfernung zweyer Orte, von denen nur einer zugänglich ist, trigonometrisch finden.

Um AB zu finden (Geom. vierzehnt. Absch. §. 10.) darf man nur die Standlinie CB nebst den Winkeln C

und B messen, die Summe dieser Winkel von 180° abziehen, wodurch man den < A bekömmt, und dann so schließen: AB : BC = sin. C : sin. A.

§. 13.

Aufgabe.

Es sind zwey Seiten eines Dreyeckes und ein Winkel gegeben, der aber von den gegebenen Seiten nicht eingeschlossen ist, man soll die übrigen Winkel, und die dritte Seite finden.

Auflösung. Man hat, um diese Aufgabe lösen zu können, nur noch einen Winkel zu suchen. Ist dieser gefunden, so ergibt sich der dritte Winkel nach geometrischen Sätzen, und die fehlende Seite findet man dann nach §. 12. Den zweyten Winkel aber findet man vermittelst der §. 9. bewiesenen Proportion, die man so ordnen kann, daß der unbekannte Winkel, welcher der einen bekannten Seite gegenüber steht, in die vierte Stelle kommt.

Wenn z. B. in der vorigen Figur außer den Seiten AB und BC der Winkel o gegeben ist, so ist

$$BC : \sin. o = AB : \sin. n; \text{ folglich } \sin. n = \frac{\sin. o \times AB}{BC}$$

Der Sinus, welcher durch diese Proportion gefunden wird, gehört für zweyerley Winkel, wenn es nicht etwa der ganze Sinus ist; denn die Sinus des Winkels und seines Supplements sind gleich; also kann der < n ein stumpfer oder spitziger seyn. Ob er das Eine oder das Andere ist, muß man wissen, weil sonst die gesuchte dritte Linie zu groß oder zu klein würde. Wenn der < o ein stumpfer oder ein rechter Winkel ist, so weiß man, daß n nothwendig spitzig seyn muß. Auch wenn der < o spitzig, und überdieß

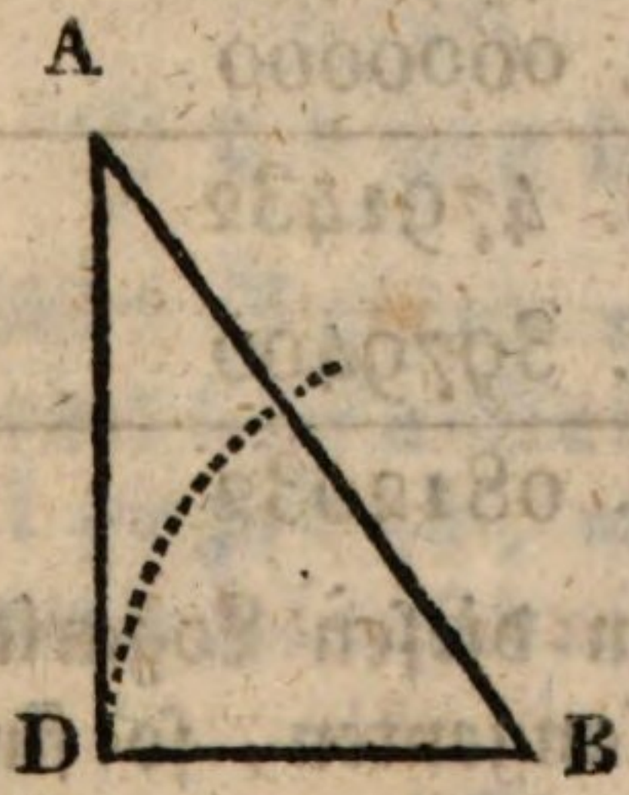
BC größer als AB ist, so ist ebenfalls der < n spitzig, weil sonst BC kleiner als AB seyn müßte, nach dem Lehrsatze: In einem jeden Dreyecke steht der größern Seite der größere Winkel gegenüber. Also bleibt die Sache nur zweifelhaft, wenn der < o spitzig und BC kleiner als AB ist. Bey der Anwendung dieser Lehren in der Ausübung kennt man meistentheils die Größe des gesuchten Winkels schon zum Theile im Voraus, weßwegen der Zweifel gewöhnlich wegfällt.

Hat man den < n gefunden, so ist auch der < m bekannt, und AC findet man vermittelst der Proportion: sin. o : BC = sin. m : AC; also AC = $\frac{BC \times \sin. m.}{\sin. o}$

§. 14.

Aufgabe.

Es sind die beyden Catheten eines rechtwinkligten Dreyeckes gegeben, man soll die Hypothenuse und die beyden spitzigen Winkel desselben finden.



Auflösung. Es seyen in dem rechtwinkligten Dreyecke ADB die Seiten AD und DB gegeben, woraus man die zwey spitzigen Winkel A und B und die Hypothenuse AB finden soll. Man suche zuerst einen von

den spitzigen Winkeln. Ist dieser gefunden, so ergibt sich auch der dritte Winkel, und dann läßt sich auch die Hypothenuse finden. Den einen spitzigen Winkel aber findet man so: Man nehme DB als Radius an, so ist AD die Tangente von dem Winkel B, woraus sich folgende Proportion ergibt:

DB : AD = r oder sin tot. : tg. B.

$$\text{tg. B} = \frac{\text{AB} \times \text{sin. tot.}}{\text{DB}}$$

Da man nun aus der gegebenen Tangente in den berechneten Tafeln der Sinus und Tangenten den entsprechenden Winkel findet, so läßt sich diese Aufgabe nach §. 9. auflösen, indem man folgende Proportion ansetzt: sin. B : AD = sin. tot. : AB

$$\text{AB} = \frac{\text{AD} \times \text{sin. tot.}}{\text{sin. B}}$$

AD sey = 3014″, und DB = 2500″, so erhält man den Winkel B durch folgende Proportion:

DB : AD = sin. tot. : tg. B, d. i.

2500 : 3014 = sin. tot. : tg. B

log. tg. B = log. 3014 + log. sin. tot. — log. 2500

log. 3014 = 3. 4791432

log. sin. sot. = 10. 0000000

13. 4791432

log. 2500 = 3. 3979400

log. tg. B = 10. 0812032

Sucht man nun diesen Logarithmus unter den Logarithmen der Tangenten, so findet man folgenden, der ihm sehr nahe kommt:

log. tg. 50° 20′ = 10. 0813231

hieraus ergibt sich, daß der Winkel B = 50° 20′ weil ein stumpfer Winkel hier unmöglich ist.

Der andere Winkel A ist also = 90° — 50°, 20′, d. i. 39° 40′.

Die Hypothenuse AB läßt sich nun so finden:

sin. B : sin. tot. = AD : AB, d. i.

sin. 50° 20′ : sin. tot. = 3014 : AB

---

log. AB = log. sin. tot. + log. 3014 — log. sin. 50° 20′

log. sin. tot. = 10.0000000

log. 3014 = 3.4791432

13.4791432

log. sin. 50° 20′ = 9.8863616

log. AB = 3.5927816

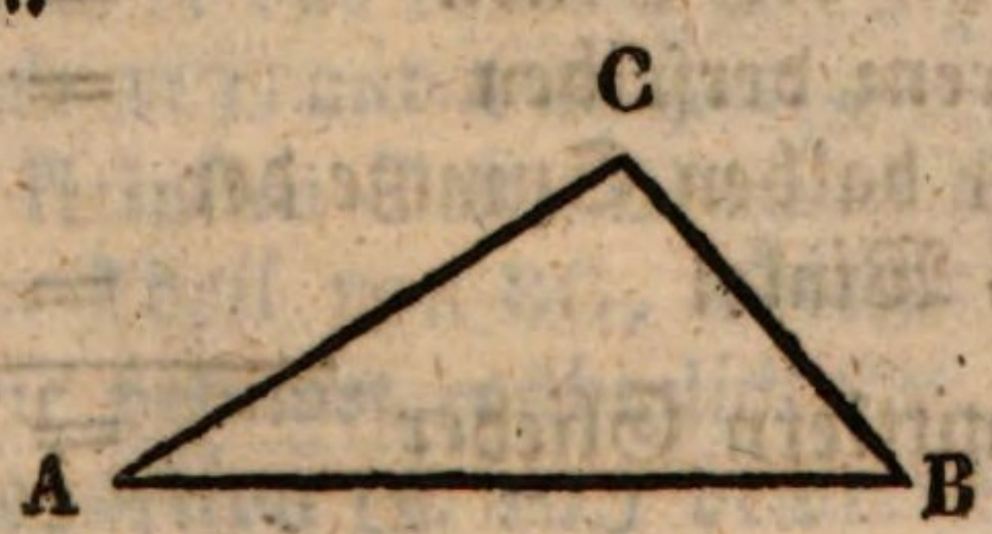
Diesem letztern Logarithmus kommt der Logarithmus der Zahl 3916 sehr nahe; folglich ist die Hypothenuse = 3916″ = 39° 1′ 6″.

Anmerkung. Die Hypothenuse ließe sich auch vermittelst des pythagoreischen Lehrsatzes finden, ohne nöthig zu haben, einen Winkel zu suchen; denn $AD^2 + DB^2 = AB^2$; folglich $\sqrt{(AD^2 + DB^2)} = AB$ (Geom. acht. Absch. §. 11.).

§. 15.

Aufgabe.

Es sind zwey Seiten eines Dreyeckes sammt dem von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel gegeben, man soll die fehlende Seite und die übrigen zwey Winkel finden.



Cc

Auflösung. Um diese Aufgabe lösen zu können; muß man den §. 11. aufgestellten Lehrsatz zu Hülfe nehmen. Man setze folgende Proportion an:

Wie sich die Summe der zwey gegebenen Seiten zu ihrer Differenz verhält, eben so verhält sich die Tangente der halben Summe der gesuchten Winkel zu der halben Differenz eben dieser Winkel. Ist die halbe Differenz gefunden, so erhält man den größern Winkel aus den zwey Winkeln, die man sucht, wenn man diese halbe Differenz zur halben Summe der gesuchten Winkel addirt; den kleinern Winkel aber bekommt man, wenn man diese halbe Differenz von der halben Summe abzieht.

Anmerkung. Aus dem eingeschlossenen Winkel kennt man vermöge Geom sechst. Absch. §. 7. die Summe der beyden anliegenden Winkel; folglich auch die halbe Summe. In der obigen Proportion kennt man also die drey ersten Glieder, woraus man auf die gewöhnliche Art das vierte Glied, die halbe Differenz der Winkel findet. Aus der halben Summe und der halben Differenz findet man nach Arithmetik §. 273. Seite 525 die Winkel selbst, und daraus auch, wenn man will, die dritte Seite. Es sey z. B. AB = 3700‴, CB = 3304‴, und ∠B = 60° 32′, so ist

die Summe der zwey Seiten	=	7004
die Differenz derselben	=	396
die Summe der gesuchten Winkel	=	119° 28′
die Hälfte dieser Summe	=	59° 44′
log. der Summe der Seiten	=	3.845346
log. der Differenz derselben	=	2.597695
log. der tg. der halben Summe der gesuchten Winkel	=	10.233905
Summe der mittlern Glieder	=	12.831600

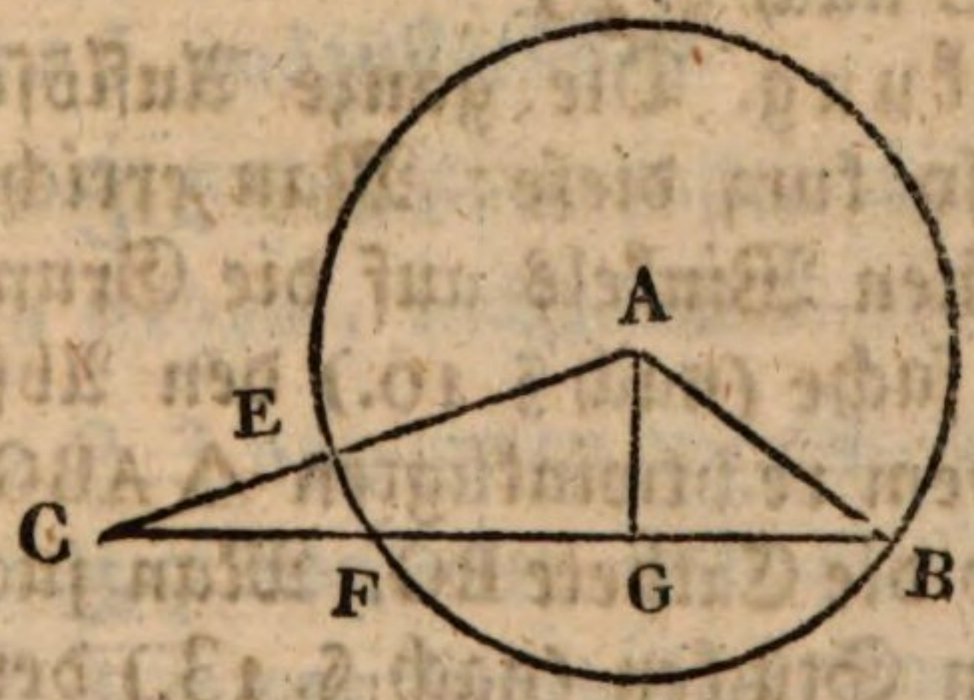
Log. tg. der halben Differenz der gesuchten Winkel = 8.986254 = 5° 32′; der größere Winkel C ist also = 59° 44′ + 5° 32′ = 65° 16′, der kleinere A = 59° 44′ − 5° 32′ = 54° 12′. Da nun die Winkel bekannt sind, so findet man AC leicht nach §. 12.

Anmerkung. Nach dieser Aufgabe läßt sich also auch die Entfernung zweyer Orte, die zugänglich sind, trigonometrisch berechnen.

§. 16.

Aufgabe.

Aus den gegebenen drey Seiten eines Dreyeckes die Winkel desselben zu finden.



Auflösung. In dem Dreyecke ABC seyen alle Seiten gegeben, BC = 24′, AC = 17′, AB = 11′. Man ziehe aus der Spitze desjenigen Winkels A, der der größten Seite BC gegenüber steht, eine senkrechte Linie AG, so wird das △ ABC in die zwey rechtwinkligten Dreyecke ACG und AGB zerlegt. Nun beschreibe man mit der kleinsten Seite AB einen Kreis, und suche zuerst den Theil von BC, welcher sich außerhalb der Peripherie befindet, nähmlich CF, welches durch folgende Proportion (§. 10.) bewerkstelliget wird:

$$BC : AC + AB = AC - AB : CF$$
$$\text{d. i. } 24' : 17' + 11 = 17' - 11' : CF$$
$$\text{d. i. } 24' : 28' = 6' : CF$$

$$CF = \frac{28' \times 6'}{24} = 7'.$$

Aus CF suche man die Sehne BF, und ihre Hälfte BG

$$BF = BC - CF, \text{ d. i.}$$
$$BF = 24' - 7' = 17'$$

$BG = \frac{1}{2} BF = 8'5''$ (Geom. fünft. Absch. §. 17.).

In dem rechtwinkligten Dreyecke ABG sind also bekannt ein Winkel, nähmlich der rechte Winkel G, die Hypothenuse AB und die Cathete BG. Hieraus läßt sich nun (nach §. 13.) der $< B$ leicht finden, und ist dieser gefunden, so ergeben sich auch die andern zwey Winkel A und C nach §. 15.

1. Anmerkung. Die ganze Auflösung obiger Aufgabe ist also kurz diese: Man errichte aus der Spitze des größten Winkels auf die Grundlinie eine senkrechte AD, suche (nach §. 10.) den Abschnitt GB, so hat man in dem rechtwinkligten $\triangle$ ABG die Hypothenuse AB und die Cathete BG. Man suche nun aus diesen bekannten Stücken (nach §. 13.) den $< B$, ist dieser gefunden, so verfahre man nach §. 15., und man wird dann auch die übrigen Winkel A und C finden.

2. Anmerkung. Obige Aufgabe erstreckt sich auf solche Dreyecke, deren Seiten ihrer Größe nach verschieden sind; denn wären alle drey Seiten gleich groß, so wüßte man die Winkel ohne Rechnung, indem jeder Winkel 60° betrüge (Geom. sechst. Abschn. §. 7. 3. Zusatz).

Druckfehler,

welche der geneigte Leser vor der Lesung des Buches zu verbessern ersucht wird.

Seite 82 Zeile 7 von unten statt §. 3. lies §. 9.

S. 97 Z. 9 von oben statt ACD lies ADC.

S. 100 Z. 9. von oben sind die Worte: gleichseitige Dreyecke sind also alle Winkel gleich groß auszustreichen.

S. 111 Z. 4 von oben sollte vor 180 das Gleichheitszeichen stehen, nähmlich = 180.

S. 112 Z. 3 von unten vor 180 sollte von stehen.

S. 133 Z. 7 von oben statt = ADCE lies AGCE.

S. 135 Z. 7 von unten statt HDCG lies ADCG.

S. 136 Z. 15 von unten geht bey 1. das Wort Zusatz ab.

S. 163 Z. 9 von unten statt §. 10. lies §. 16.

S. 164 Z. 13 von unten statt Der Winkel DEG ist EFG + FGF lies: Der Winkel DEG ist = EFG + FGE.

S. 166 Z. 13 von oben ist zwischen diese verlangte das Wort die einzuschalten.

S. 170 Z. 7 von oben statt Winkel DAF lies DAE.

S. 177 Z. 2 von oben statt (§. 38. Zus.) lies (§. 28. Zus.).

Ebendaselbst Z. 4 von oben statt m+n lies m = n.

S. 180 Z. 1 von oben statt BCG lies BCF.

S. 189 Z. 16 v. ob. statt jeder lies jederzeit.

S. 197 Z. 1 von oben statt 9, 3″ = lies 9′ 3″.

S. 201 Z. 6. von unten statt ACA lies ACB.

S. 202 Z. 6 von unten statt BG lies BF.

S. 203 Z. 17 von unten statt $\frac{24+18\times 8}{2}$ lies $\frac{24+18}{2}\times 8$.

S. 217 Z. 17 v. unt. statt CG ∦ DF lies CG ∦ DE.

Ebend. Z. 14 von unten statt EF : GF lies EF : GE.

S. 222 Z. 8 von unten statt (AC und AC) lies (AB und AC).

S. 229 Z. 18 von unten statt nach lies noch.

S. 233 Z. 4 von oben statt abc lies adc.

Ebend. Z. 15 von oben statt Nun ist AF lies Nun ist AE.

S. 245 Z. 13 von unten vor größern setze der.

S. 250 Z. 4 von unten statt g bis t lies y bis t, und statt gt = IB lies yt = IB.

S. 251 Z. 13 und 14 von oben statt mit gm in

einer geraden Linie tg liegt, lies: mit y in einer geraden Linie ty liegt.

S. 257 Z. 8 von unten statt z B lies zu B.

Ebend. letzte Zeile statt so erhält lies so enthält.

S. 264 Z. 12 von unten statt §. 2. lies §. 13.

Ebend. Z. 6 von unten zwischen desselben und kann soll sehen stehen.

S. 296 Z. 10 von unten statt nach §. 20. lies nach §. 21.

S. 299 Z. 10 von unten. Unter der daselbst befindlichen Figur soll der Buchstabe F stehen.

S. 300 Z. 13 und 14 von oben statt §. 24. und §. 20. lies §. 25. und 21.

S. 303 Z. 3 von oben statt ihre lies ihrer.

S. 318 Z. 8. von unten statt Um einen lies Zu einem.

S. 332 Z. 3 von oben statt ein 1/3 lies ein Drittel.

S. 362. Z. 9 von unten statt dem Durchmesser lies den Durchmesser.

S. 373 Z. 5 von unten ist zu beliebigen das Wort Bogen hinzuzusetzen.

S. 374 Z. 2 von oben statt des Bogens AD lies des Bogen AB.

Ebend. Z. 6 und 7 statt = s. AC und = sin. AC lies = s. AB und = sin. AB.

Bayerische Staatsbibliothek München

S. 376 Z. 8 von unten statt $<o = <n$ lies $<o = <u$.

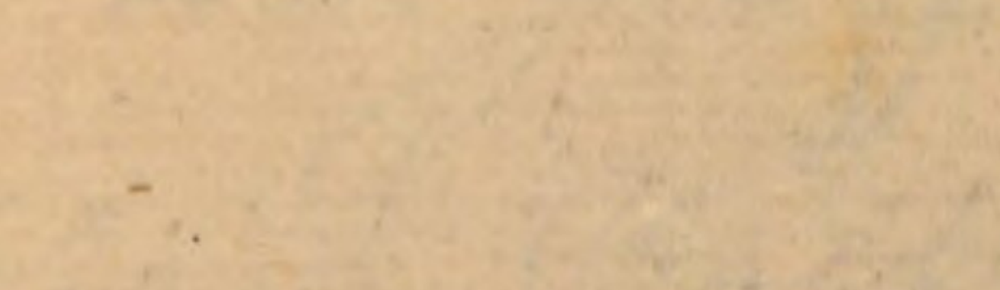
Ebend. Z. 5 von unten statt der Sinus des Winkels n lies der Sinus des Winkels u.

S. 377. Bey der daselbst befindlichen Figur kommt ober dem Buchstaben A, der am Durchmesser steht, noch ein A vor, setze statt dessen ein B hin.

S. 385 Z. 8 von oben statt folglich stehen sie mit lies folglich stehen sie bey.

S. 838. Z. 13 von oben. Am Anfange der Zeile nach dem soll Radius stehen.

Bayerische Staatsbibliothek München



BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Link, Anton

Lehrbuch der reinen Mathematik in einer leichtfaßlichen Darstellung für die Jugend und diejenigen Liebhaber dieser Wissenschaft, welche sich durch Privatfleiß darin selbst unterrichten wollen
Bd.: 2

Linz ; Leipzig 1821

Math.u. 109-2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594091-4